FIZIKA BSc, III. évfolyam / 1. félév
„Optika” – előadásjegyzet

BEVEZETŐ, FÉNYMODELLEK

Dr. Koppa Pál, Dr. Erdei Gábor, 2017-11-24

Mivel foglalkozik az optika?

- Fény terjedésével (elektromágneses hullámok λ: $10^{-4}..10^{-9}$ m, azaz 100 µm .. 1 nm)
- Fény-anyag közötti kölcsönhatásokkal (pl. nemlineáris optika)
- Fény keletkezésével, elnyelődésével (pl. kvantumoptika)

Tudománytörténet, fénymodellek, technikai fejlődés

Asszíria	i.e. 1000	tükrök, gyújtólencsék (pl. Nimrud-lencse? – csiszolt kristály)
Euklidész	i.e.280	„*Optika*” fény ≡ látás (sugarak a szemből erednek, egyenes vonalban terjednek és a tárgyakkal kölcsönhatásban vannak, egy pontba csak egy sugár megy a szemből) $c = \infty$; tükrözési törvény
Héron (Alexandria)	1.sz.	„*Catoptrics*” egyik pontból a másikba a legrövidebb úton terjednek; visszaverődés (megszerkesztette, igazolta a legrövidebb út alapján)
Ptolemaiosz	2.sz.	törési törvény (kísérleti úton) $\theta' = a\cdot\theta - b\cdot\theta^2$ ← kis szögben OK!
Szidon	2. sz.	színtelen üveg (mangán használata színtelenítésre)
Alhazen (Bagdad)	11.sz	Abu Ali Mohamed Ibu Al Hosan *Ign Al-Haitham*; fény: fényforrásból ered a szem csak „detektor”; szem modell: camera obscura elve alapján; részecske modell (törés/tükrözés felületi erőhatások következménye); véges és sűrűségfüggő sebesség
Velence	13. sz.	víztiszta üveg, önfoncsoros tükör
Roger Bacon	13. sz.	nagyító lencse, utána: szemüveg Olaszországban (Firenze, 1280)
Leonardo da Vinci	15. sz.	camera obscura (tűlyuk kamera)
Hans és Zacharias Janssen	1600	mikroszkóp
Leonard Digges, Hans Lipperhey	1608	távcső (Anglia, Hollandia), Galileo Galilei tudományos megfigyelései kb. 1609-től
Johannes Kepler	1609 1611	„*Dioptrice*”, kis szögekre: $\theta' \approx N\cdot\theta$, totálreflexió, fókusz definíció Kepler-távcső
Cristoph Scheiner	1619	a szem anatómiája, a kép a retinán keletkezik
René Descartes	1637	„*La Dioptrique*”; elasztikus közeg - éter, benne mintha teniszlabdák mechanikus mozgást végeznének; hibás törés hipotézis: sebesség párh. komp. megmarad: $v'\cdot\sin\theta' = v\cdot\sin\theta$; fényseb. anyagfüggő $N\cdot v' = v$ (tőle függetlenül Willebrod Snell is megtalálta 1621-ben), Descartes-felületek, szem működése, szivárvány magyarázat, $c \approx \infty$
Francesco Maria Grimaldi	1650	diffrakció megfigyelése árnyék szélén (az elnevezés is tőle ered), a fényt folyadék hullámzásához hasonlítja (éter hullámzásai)
Pierre de Fermat	1657	a természet a legkönnyebbet választja: legrövidebb idő elve, „optikai ellenállás” → véges sebesség, törési törvény újabb levezetése → eszerint a fény üvegben lassabban terjed mint levegőben
Robert Hooke	1665	„*Micrographia*”, irizálás megfigyelése (színes minták színtelen anyagokon: toll, kagylóhéj); tőle függetlenül Robert Boyle is felfedezte; Hooke a fény rezgésnek tételezte fel (1666 – Newton színbontása és összegzése)
Isaac Newton	1672	tükrös távcső
Olaf Römer	1675	fénysebesség mérése 24% pontossággal Jupiter holdak alapján (tulajdonképpen a Doppler-effektust használta, mert a Föld sebessége miatt folytonosan nő vagy csökken a Jupiter-Föld távolság) 1728-ban James Bradley távcsöves méréssel igazolta – „aberráció”

Christian Huygens (v. Huyghens)	1679	éter (finom, rugalmas anyag), benne mint elasztikus hullám (inkább impulzusnak gondolta, mert hullámhossz szerinti periodicitásról nem írt) terjed a fény (előbb publikálta mint Newton, mégis több mint 100 év múlva hitték el!), egymást lökdöső golyócskák, elemi gömbhullámok – összhangban van Fermat-elvével
Isaac Newton	1704	„*Opticks*"; 100 évre bebetonozta a részecskemodellt, szín: részecske mérete; fehér fény = színek összege (spektrum elnev.); Newton-gyűrűk
Chester Moore Hall	1750	akromatikus dublet (fókusztávolság hullámhossz-függésének korrigálására)
Thomas Young	1801	interferencia kísérlet és magyarázat (útkülönbség számít) → térbeli koherencia; a fény periodikus hullám; a színnek köze van a hullámhosszhoz (vékonyrétegek színének magyarázata); szemlencse akkommodációja, színlátás alapjai
Étienne-Louis Malus	1809	polarizáció (Bartholonius 1669-ben kimutatta kalcittal a kettőstörést, amit Huygens és Newton is vizsgált korábban); megállapította, hogy a reflektált és szórt fény is polarizált; a kifejezés tőle származik
Joseph von Fraunhofer	1814	spektroszkóp feltalálása; a Nap színképében lévő spektrumvonalak felfedezése és leírása (William Hyde Wollaston is felfedezte 1804-ben)
Thomas Young	1817	transzverzalitás (Dominque François Arago polarizált fénnyel végzett kísérletei nyomán), lineáris polarizáció
Augustin Jean Fresnel	1818	diffrakciós kísérletek → fény hullámelméletének matematikai leírása; transzverzalitás miatt az éter nem lehet folyékony csak szilárd; diszperzió magyarázata az anyag részecskeszerkezete alapján; kristályoptika
Louis Mande Daguerre	1839	fémlemezre történő fotózás
Petzvál József	1840	nagy fényerejű portréobjektív (képmezőhajlás csökkentése)
Christian Doppler	1842	mozgó fényforrás (csillag) színének megváltozása (Doppler-effektus)
Jean Bernard Léon Foucault	1850	fénysebesség mérése vízben, levegőben (vízben lassabb): részecskeelm. Ø
Armand Hypolite Louis Fizeau	1851	a fényt a mozgó anyag részben magával ragadja (Fresnel feltételezése nyomán), folyó vízzel demonstrálta → speciális relativitás elmélet
Robert Wilhelm Bunsen Gustav Kirchhoff	1861	prizmás spektroszkóp, a Nap spektrumvonalainak magyarázata: abszorpció, emisszió → spektrumanalízis (majd kvantummechanika)
Armand Hypolite Louis Fizeau	1862	interferogram láthatóságának vizsgálata (→ időbeli koherencia)
James Clerk Maxwell	1862	elektromágneses hullámelmélet (Michael Faraday nyomány); Kohlrausch és Weber megmérték az EM hullám sebességét = fénysebesség
Thomas Alva Edison	1879	működőképes izzólámpa (első demonstráció: 1802, Humphry Davy)
Abbe-Schott-Zeiss	1884	optikai üveggyártás beindítása
Michelson és Morley	1887	interferométeres kísérlet → nincs abszolút éter? ; $c' = c + v$?
Heinrich Hertz	1888	a fény elektromágneses hullám – kísérleti bizonyíték (állóhullámú kísérletek EM rádióhullámmal @ 55 MHz → sebesség, polarizáció)
Harold Dennis Taylor	1892	savas eső és napfény hatására szennyeződött lencsén ZnO vékonyréteget fedezett fel, ami némileg csökkentette a reflexiót
Max Planck	1900	feketetest sugárzás, EM tér kvantált: $\Delta E = h \cdot \nu$
Willem De Sitter	1913	kettőscsillagok vizsgálata → „c" független a fényforrás sebességétől → ← Newton mechanika (speciális relativitáselmélet kiindulópontja)
Albert Einstein	1905	fotoelektromos hatás; részecske modell (foton); speciális relativitás-elmélet → mozgó testek és fény kölcsönhatása
	1917	indukált emisszió
Gábor Dénes	1947	hologram elve
Theodore H. Maiman	1960	lézer

...

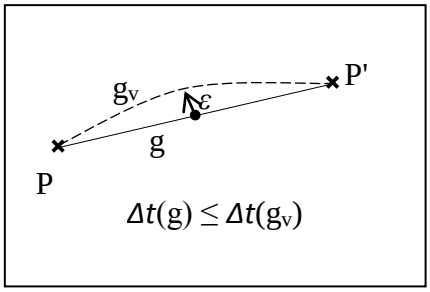
Források

Klein-Furtak: *„Optics”*
Simonyi Károly: *„A fizika kultúrtörténete”*
M. Born – E. Wolf: *„Principles of Optics”*
John Gribbin: *„Schrödinger kiscicái és a valóság keresése - A kvantummechanika rejtélyeinek nyomában”*

+ internet (elsősorban wikipedia)

Fermat-elv (a „legrövidebb idő” elve)

A Fermat-elv eredeti megfogalmazásban: a fény két pont között azon az úton terjed, amelyiket a *legrövidebb idő* alatt tudja megtenni. Ez nem törvény, hanem hasznos eszköz a fény útjának számolására, szemléltetésére. Mivel a *terjedési út* fogalma általános fénynyaláb (tehát nem pl. gömb- vagy síkhullám esetén) csak geometriai optikai környezetben értelmezhető, a Fermat-elv is csupán geometriai optikai közelítésben használható.



Fermat feltételezte, hogy a sűrűbb közegek jobban akadályozzák a fény terjedését mint a ritkábbak, és az anyagok e tulajdonságának jellemzésére bevezette az „optikai ellenállás” fogalmát. Az ennek megfelelő korszerű terminológia a *törésmutató* (*n*):

$$n \equiv \frac{c}{v}\ , \tag{1}$$

ahol „*c*” a vákuumban és „v” az adott közegben mért fénysebesség. Mivel az eltelt idő arányos a megtett úttal (differenciálisan), vizsgálhatjuk az idő helyett az utat is. Csakhogy a fény különböző törésmutatójú közegekben eltérő távolságot tesz meg azonos idő alatt. A tárgyalás az *optikai úthossz* (optical path length, *OPL*) bevezetésével egyszerűsíthető le:

$$\Delta t = \int_P^{P'} dt \ \ ;\ \ OPL \equiv c\cdot\Delta t = \int_P^{P'} c\,dt \ \ ;\ \ v = \frac{d\ell}{dt} \ \ \Rightarrow \ \ dt = \frac{d\ell}{v} \ \ ;\ \ OPL = \int_P^{P'} \frac{c}{v(\mathbf{r})} d\ell = \int_P^{P'} n(\mathbf{r})\,d\ell \tag{2}$$

Az optikai úthossz arányos a fény P-ből P'-be jutásának idejével: definíció szerint ez az a távolság, amit a fény vákuumban ugyanannyi idő alatt tesz meg, mint ami alatt P-ből P'-be eljut. A Fermat-elv ebben a megfogalmazásban: a fény két pont között azon az úton terjed, amely mentén legkisebb az optikai úthossz.

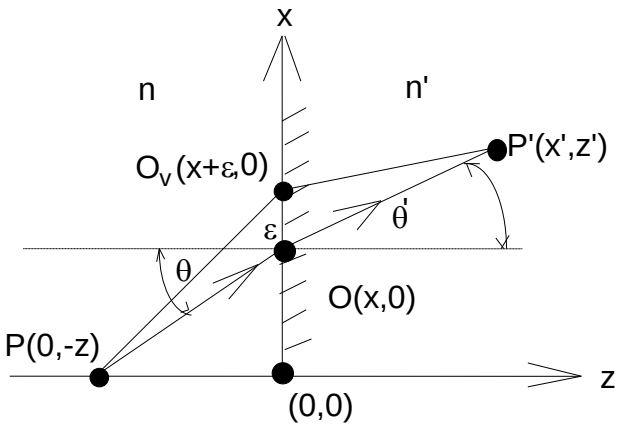
Teljesen általános, tehát a fényterjedés törvényeivel pontosabb összhangot mutató modern megfogalmazás szerint: a fény két pont között olyan úton terjed (g), amelyet ha kis mértékben megváltoztatunk egy, a pályagörbére jellemző ε paraméter függvényében, akkor az új úton (g_v) mért *OPL* első rendben nem különbözik az eredetitől (esetleg csak másod- vagy magasabb rendű változások lépnek fel). Matematikailag megfogalmazva a valódi terjedési út ε függvényében elsőrendben stacionárius:

$$\left.\frac{dOPL}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_0} = 0 \tag{3}$$

Azaz a valóságos út lehet: minimális idejű
maximális idejű
azonos idejű minden környező úttal.

A Fermat-elv segítségével pontosan le lehetett írni a fénytörés, tükrözés törvényeit, a tükrök és lencsék fókuszáló hatásának jellemzőit stb. További jelentősége abban áll, hogy ez adta az első lökést a *variációszámítás* kialakulásának.

Példa: a törési törvény



$$OPL(PO_vP') = n\sqrt{(x+\varepsilon)^2+z^2} + n'\sqrt{(x'-x-\varepsilon)^2+z'^2} \tag{4}$$

$$\left.\frac{dOPL}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2}\cdot 2\frac{n(x+\varepsilon)}{\sqrt{(x+\varepsilon)^2+x^2}} + \frac{1}{2}\left.\frac{2n'(x'-x-\varepsilon)(-1)}{\sqrt{(x'-x-\varepsilon)^2+z'^2}}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{nx}{\sqrt{x^2+z^2}} = \frac{(x'-x)n'}{\sqrt{(x'-x)^2+z'^2}} \tag{6}$$

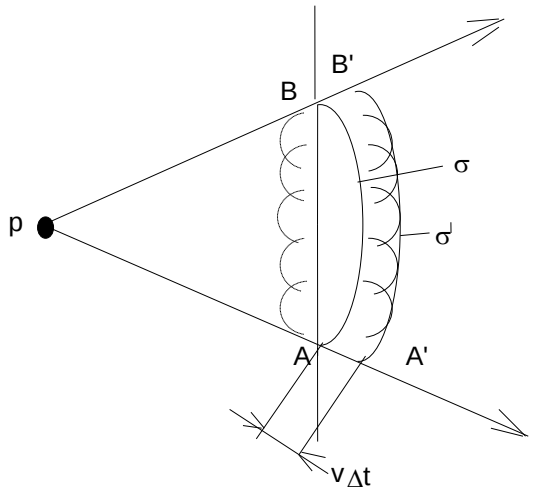
$$\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} = \sin\theta \;\; ; \;\; \frac{x'-x}{\sqrt{(x'-x)+z'}} = \sin\theta' \rightarrow n\sin\theta = n'\sin\theta' \rightarrow \boxed{\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{n'}{n} = \frac{\frac{c}{v'}}{\frac{c}{v}} = \frac{v}{v'}} \tag{7}$$

Huygens-elv

A hullámfront minden pontja új elemi hullámok kiindulópontja.

Új hullámfront → burkoló görbe

Példa: gömbhullám terjedése apertúrán keresztül

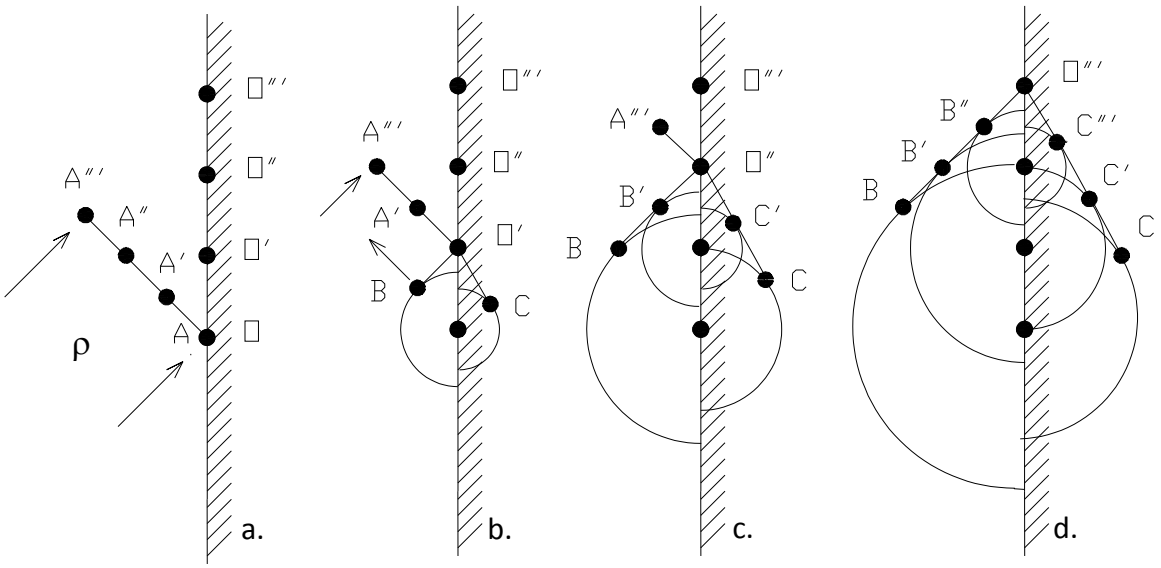


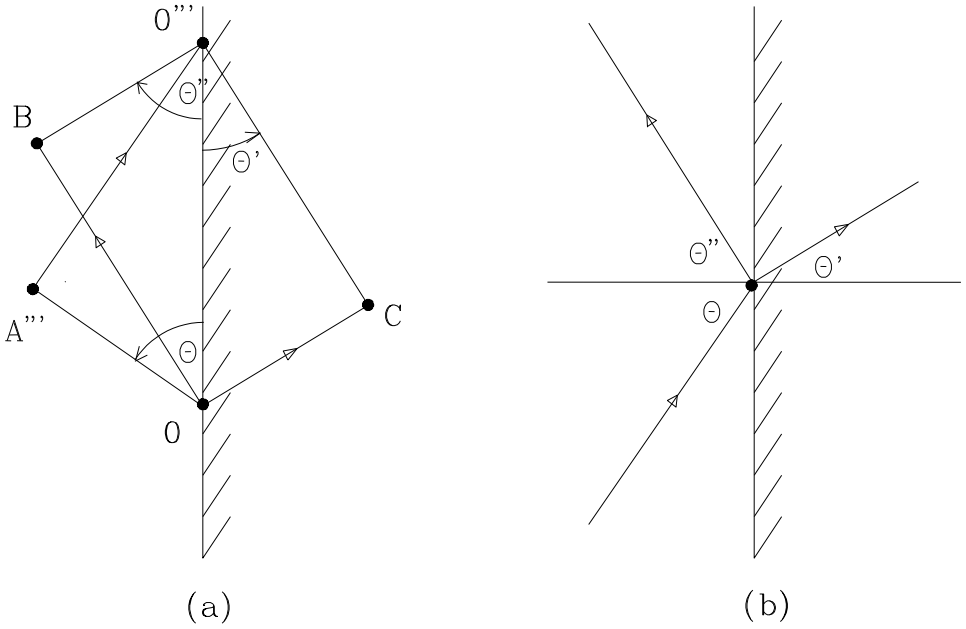
σ - hullámfront t időpontban

σ' - új hullámfront t+Δt időpontban

Feltételezés: a hátrafelé haladó hullámok burkolóját nem kell figyelembe venni (ezt egyszerűen kimondja az elv, mivel csak így magyarázható, hogy nem terjed a hullám visszafelé is.) σ'-n megismételve az előző szerkesztést, újabb burkoló szerkeszthető σ". Itt van a hullámfront a t+2Δt időpontban.

Példa: tükrözés és törés törvénye a Huygens elv alapján





$$v' \langle v \;\; ; \;\; \overline{OB} = v\Delta t \;\; ; \;\; \overline{O'''C} = v'\Delta t \;\; ; \;\; \overline{A'''O'''} = v\Delta t \tag{8}$$

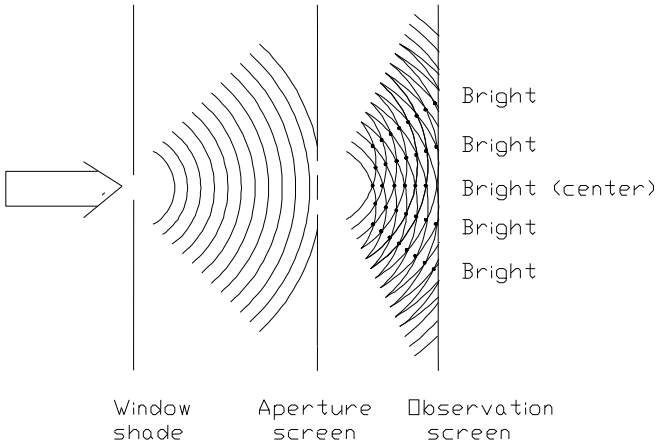
$$OO''' = -\frac{\overline{A'''O'''}}{\sin\theta} = \frac{\overline{OB}}{\sin\theta''} = \frac{\overline{OC}}{\sin\theta'} \rightarrow \frac{v\Delta t}{\sin\theta} = \frac{v\Delta t}{\sin\theta''} = \frac{v'\Delta t}{\sin\theta'} \rightarrow \frac{\sin\theta}{v} = \frac{\sin\theta'}{v'} \tag{9}$$

Ebből ugyanazt kapjuk mint a Fermat-elvnél: $\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{v}{v'} = \frac{\frac{c}{v'}}{\frac{c}{v}} = \frac{n'}{n}$ (10)

Huygens-Fresnel elv

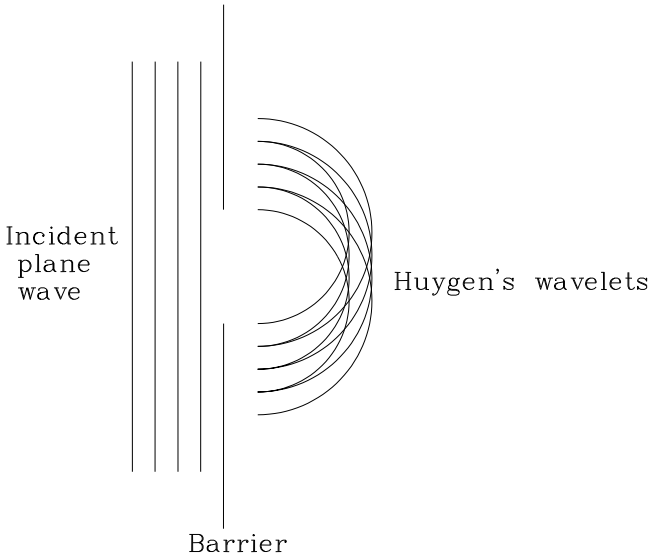
Huygens-burkoló görbéje nem magyarázza a diffrakciót és interferenciát.

Young + Fresnel: interferencia magyarázata hullámelmélettel.



Az azonos fázisú helyek erősítik egymást! Fényes vonalak a térben. Young továbbá megadta a színes vékonyrétegek (pl. szappanbuborék, olajfolt) működésének fizikai magyarázatát, és Newton vékony lemezeken végzett interferencia kísérletei alapján meghatározta λ értékét különböző színű fényekre. Úthosszkülönbség: λ egész számú többszöröse → erősítés, fényes vonalak.

Huygens-Fresnel elv: A hullámfront minden pontja új elemi hullámok kiindulópontja. A fényjel (zavar) értékét a tér egy tetszőleges pontjában úgy kapjuk meg, hogy szuperponáljuk az elemi hullámokat (később a diffrakció elméletben ennek pontosabb matematikai leírását is megadjuk).

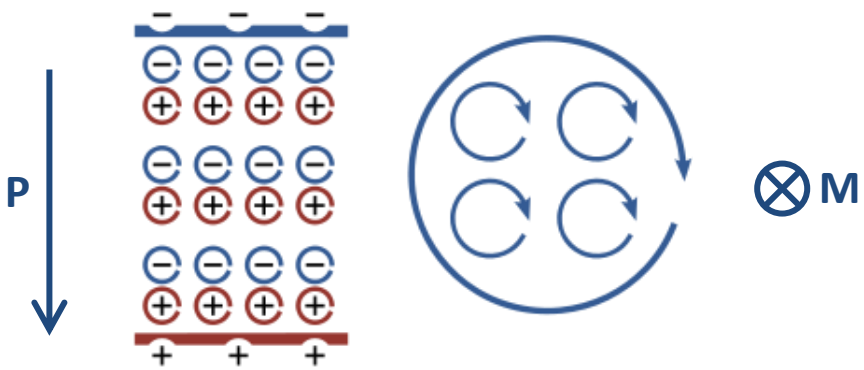


A diffrakció magyarázata. A fény bejut az árnyékzónába is. A szuperpozíciónál erősítések, kioltások lépnek fel.

EM hullámterjedés izotróp, lineáris közegben

Optikai frekvenciákon (≈ 10^{14} Hz) az EM sugárzás hullámhossza (100-1000 nm) nagyságrendekkel nagyobb az atomi méreteknél (≈ 0,1 nm). Ez azt jelenti, hogy az egyes atomok elektronburkában jelen lévő mikroszkópikus áramok és töltések hatását sok atomra kiterjedő tartományokra kiátlagolhatjuk, hiszen még ezen tartományok is jóval kisebbek mint a fény hullámhossza. Az optikában a mikroszkópikus töltések-áramok azért fontosak, mert ezek határozzák meg a fény-anyag kölcsönhatás jellemzőit.

A mikroszkopikus töltések és áramok magyarázata a következő. Az atomok elektromos térben polarizálódnak, és az elemi dipólusok összességét a **P** dipólmomentum-sűrűséggel (polarizációval) vehetjük figyelembe. Hasonlóan, a mágneses tér rendezi az atomi szinten fellépő köráramok által kiváltott elemi mágneseket (pályamomentum), amit összességében az **M** mágneses dipólmomentum sűrűség (mágnesezettség) foglal magában. A mikroszkopikus áramok/töltések az átlagolási tartomány belsejében kioltják egymást, emiatt makroszkopikusan csak a vizsgált tartomány felületén lévő töltések/áramok hatását érzékeljük. A fentieket szemlélteti az alábbi ábra (forrás: wikipedia):



Ezek felhasználásával vezettük be elektrodinamikában az új térjellemzőket:

$$\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad ; \quad \mathbf{H} \equiv \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \tag{11}$$

amelyekkel felírhatók az ún. makroszkopikus Maxwell egyenletek anyagban. A (11) összefüggések lineáris közelítést takarnak, általános esetben (pl. nagy térerősségek esetén vagy speciális kristályokban) a polarizáció és mágnesezettség függenek az elektromos térerősségtől ill. mágneses indukciótól. A makroszkopikus Maxwell-egyenletekben ρ és **j** már csak a szabad töltések és áramok sűrűségét tartalmazza:

$$\left.\begin{aligned} &\text{I.} \quad \mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \\ &\text{II.} \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &\text{III.} \quad \mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \\ &\text{IV.} \quad \mathrm{div}\mathbf{D} = \rho \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$
$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$
$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

Fontos: inhomogén közegben ε_r, μ_r és a belőlük származtatott „n" törésmutató helyfüggőek! Az utolsó egyenlet a szabad töltések és az elektromos térerősség viszonyát kifejező ún. differenciális Ohm-törvény. Az ebben szereplő σ vezetőképesség **D**-hez és **H**-hoz hasonlóan makroszkopikus anyagjellemző. A kifejezést klasszikus fizikai közelítésben a Drude-modellel lehet értelmezni (itt nem tárgyaljuk), amely a vezető anyagok fizikai tulajdonságait szabad töltéshordozók (elektrongáz, plazma), valamint helyhez kötött iontörzsek kölcsönhatásából származtatja. Az egyenlet ebben a formában csak az elektrongáz plazmafrekvenciájánál jóval kisebb frekvenciákon igaz ($\omega << \omega_p$). Fémek esetében a plazmafrekvenciához tartozó hullámhossz λ_p = 70-80 nm körül (mélyen az UV tartományban) van, tehát látható sugárzásra a közelítés használható. A plazmafrekvencia körül **j** és **E** fázisban eltolódhat egymáshoz képest, valamint az anyagjellemzők erős frekvenciafüggést mutatnak. (Plazmafrekvencián $\varepsilon = 0$ és **k** = 0.)

Hullámterjedés dielektrikumokban

Feltevések: $\sigma = 0$, $\rho = 0$ (azaz nincsenek szabad töltések, és az anyag nem vezeti az áramot). Ezekből levezethető az alábbi hullámegyenlet (forrásmentes differenciálegyenletek):

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad ; \quad \nabla^2 \mathbf{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad ; \; c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \; ; \; n^2 = \varepsilon_r \mu_r \text{ (Maxwell-reláció)} \tag{13}$$

A részletes levezetést a következő alfejezetben tárgyaljuk. A (12) egyenletek legegyszerűbb megoldása az ω körfrekvenciájú (monokromatikus) síkhullám, melynek alakja komplex jelölésmóddal a következő:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \varphi_1)}$$
$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \varphi_2)} \tag{14}$$

A hullámszámvektor nagysága a következő alakokban írható fel:

$$|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = n\frac{2\pi}{\lambda_0} = n\frac{2\pi}{c \cdot T} = n\frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{v} \tag{15}$$

A fenti próbafüggvényeket visszahelyettesítve a II. Maxwell-egyenletbe a következőt kapjuk:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{k}\times\tilde{\mathbf{E}}}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}_0 \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\varphi_2)} = \frac{\mathbf{k}}{\omega}\times\mathbf{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\varphi_1)}, \tag{16}$$

ami csak akkor teljesülhet a tér minden pontjában, ha $\varphi_1 = \varphi_2$. Tehát az EM síkhullám tényleg transzverzális (mivel $\tilde{\mathbf{B}} \perp \tilde{\mathbf{E}} \perp \mathbf{k}$), és $\tilde{\mathbf{E}}$ valamint $\tilde{\mathbf{B}}$ egymással fázisban rezegnek. Lentebb bemutatjuk, hogy abszorbens közegben **k** komplex, vagyis ekkor $\varphi_1 \neq \varphi_2$.

Hullámterjedés véges vezetőképességű anyagban

Általános esetben a **D** és az **E** vektorok fázisban elcsúszhatnak egymáshoz képest, azaz a dielektromos permittivitás (és az ebből származtatható a hullámszám ill. törésmutató) komplex mennyiségek. Erre mutatunk egy példát, a véges (azaz nem nulla) vezetőképességű anyagok (tipikusan fémek) esetét, amely segítségével értelmezhető, hogy mit jelentenek az újonnan bevezetett komplex anyagjellemzők. Azt továbbra is feltételezzük, hogy $\rho = 0$.

Az egyszerűség kedvéért csak **E**-re mutatjuk be a levezetést. Az I. Maxwell-egyenletbe behelyettesítjük az áramsűrűség és **E** viszonyát kifejező differenciális Ohm-törvényt:

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \quad \rightarrow \quad \mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \sigma\mathbf{E} \quad \rightarrow \quad \mathrm{rot}\mathbf{H} = \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \sigma\mathbf{E}, \tag{17}$$

majd a kapott egyenletet idő szerint differenciáljuk:

$$\mathrm{rot}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{18}$$

A II. Maxwell-egyenletet átalakítjuk:

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mu\mathbf{H}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{rot}\mathbf{E}}{\mu} = -\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \mathrm{rot}\frac{\mathrm{rot}\mathbf{E}}{\mu} = -\mathrm{rot}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \tag{19}$$

és behelyettesítjük (18)-be:

$$-\mathrm{rot}\frac{\mathrm{rot}\mathbf{E}}{\mu} = \varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\,. \tag{20}$$

Felhasználva a $\nabla\times(f\cdot\mathbf{A}) \equiv \nabla f\times\mathbf{A} + f\cdot(\nabla\times\mathbf{A})$ azonosságot:

$$-\mathrm{grad}\frac{1}{\mu}\times\mathrm{rot}\mathbf{E} - \frac{1}{\mu}\cdot\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{E} = \varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\,. \tag{21}$$

Figyelem: μ helyfüggését általános esetben a rotáció képzésnél figyelembe kell venni! (Ha a **H**-ra vonatkozó hullámegyenletet vezetjük le, akkor ε és σ helyfüggését kell vizsgálni.)

$$-\mu\cdot\mathrm{grad}\frac{1}{\mu}\times\mathrm{rot}\mathbf{E} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{E} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma\mu\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\,. \tag{22}$$

mivel $\mathrm{grad}(\mu^{-1}) \equiv -\mathrm{grad}(\mu)/\mu^2$

$$\frac{\mathrm{grad}\,\mu}{\mu}\times\mathrm{rot}\mathbf{E} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{E} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma\mu\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\,. \tag{23}$$

A gyakorlatban használt anyagok többségére igaz, hogy μ = const., ezért fennáll a következő közelítés (felső becslés):

$$\frac{\mathrm{grad}\,\mu}{\mu}\times\mathrm{rot}\mathbf{E} << -\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{|\mathrm{grad}\,\mu|}{\mu} << \frac{|\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{E}|}{|\mathrm{rot}\mathbf{E}|}\,, \tag{24}$$

vagyis egyenletünkből az elhanyagolás után ez lesz:

$$-\text{rot rot}\mathbf{E} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma\mu\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \ . \tag{25}$$

Hasonlóan (bár kissé bonyolultabban) levezethető B-re is:

$$-\text{rot rot}\mathbf{B} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} + \sigma\mu\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \ , \tag{26}$$

ahol a következő közelítéseket kellett alkalmaznunk (felső becslés):

$$\frac{|\text{grad } \sigma|}{\sigma} << \frac{|\text{rot}\mathbf{E}|}{|\mathbf{E}|} \quad \text{és} \quad \frac{|\text{grad } \varepsilon|}{\varepsilon} << \frac{|\text{rot}\mathbf{E}|}{2|\mathbf{E}|} \ . \tag{27}$$

Mivel μ = const., a második feltétel bal oldalát μ-vel bővíthetjük (+ Maxwell-reláció), így:

$$\frac{|\text{grad } n^2|}{n^2} = \frac{2|\text{grad } n|}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{|\text{grad } n|}{n} << \frac{|\text{rot}\mathbf{E}|}{4|\mathbf{E}|} \ . \tag{28}$$

Annak érdekében, hogy szemléltessük mit is jelent a fenti feltétel, alkalmazzuk arra az egyszerű esetre, amikor egy (14) alakú síkhullám terjed a közegben. Ekkor (28) jobb oldala a következő felső becsléssel közelíthető:

$$\frac{|\text{rot}\mathbf{E}|}{4|\mathbf{E}|} = \frac{|-i\mathbf{k}\times\mathbf{E}|}{4|\mathbf{E}|} < k\cdot\frac{|\mathbf{E}|}{4|\mathbf{E}|} = \frac{\pi}{2\lambda} \ , \tag{29}$$

amivel (28) a következő alakra egyszerűsödik:

$$\frac{|\text{grad } n|\cdot\lambda}{n} = \frac{\Delta n}{n} << \frac{\pi}{2} \ . \tag{30}$$

Ez azt jelenti, hogy hullámhossznyi szakaszon mérve a relatív törésmutatóváltozásnak $\pi/2$-nél jóval kisebbnek kell lennie. Ez nem teljesül térben nagyon gyorsan változó törésmutatójú struktúráknál, pl. hullámhossz alatti diffrakciós rácsok esetében. A feltétel sérül emellett különböző anyagok határfelületén is, amit a Maxwell-egyenletek határfeltételeivel veszünk figyelembe az elektrodinamikában (ld. későbbi órán).

A $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) \equiv \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$ vektorazonosság felhasználásával a (25)-(26) egyenletek így alakulnak át:

$$\begin{aligned} \nabla^2\mathbf{E} - grad\ div\ \mathbf{E} &= \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \ ; \\ \nabla^2\mathbf{B} - grad\ div\ \mathbf{B} &= \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \ . \end{aligned} \tag{31}$$

A III.-IV. Maxwell-egyenletek és (27) miatt a második tag mindkét esetben nulla, tehát:

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{E} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}} \ ; \qquad \boxed{\nabla^2\mathbf{B} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}} \ . \tag{32}$$

Ezek az egyenletek írják le a hullámterjedést véges vezetőképességgel rendelkező (pl. fémes) anyagokban, kettejüket együtt ún. *távíróegyenleteknek* nevezzük. A fenti egyenletek lineárisak, tehát a harmonikus függvények szintén megoldásai. Vizsgáljuk most csak az ω körfrekvenciájú időfüggést mutató megoldásokat. A komplex jelölésrendszert alkalmazva az ilyen függvények lineárisan polarizált esetben a következő alakban írhatók fel:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \cdot e^{i\omega t} \tag{33}$$

Mivel az egyszeres idő szerinti deriválás iω-val való szorzásnak felel meg, a hullámegyenlet az időfüggetlen, ún. Helmholtz-egyenlet alakot ölti (*B*-re hasonlóan):

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathrm{r}) + \varepsilon\mu\omega^2 \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathrm{r}) - i\mu\sigma\omega \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathrm{r}) = 0 \quad . \tag{34}$$

Az egyenlet formailag a dielektrikumokban felírható alakú lesz, ha bevezetjük a komplex dielektromos permittivitást:

$$\tilde{\varepsilon} \equiv \varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon_{re} - i \cdot \varepsilon_{im} \;\rightarrow\; \boxed{\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathrm{r}) + \tilde{\varepsilon}\mu\omega^2 \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathrm{r}) = 0} \quad . \quad (\varepsilon_{im} \geq 0 \text{ elnyeléskor}) \tag{35}$$

A Helmholtz-egyenlet megoldását síkhullámalakban feltételezve:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{E}}_0 \cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tag{36}$$

azt kapjuk, hogy:

$$-\mathbf{k}^2 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_0 + \tilde{\varepsilon}\mu \cdot \omega^2 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k}^2 = \tilde{\varepsilon}\mu \cdot \omega^2 , \tag{37}$$

azaz a hullámszámvektor komplex:

$$\tilde{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{k}_{re} - i \cdot \mathbf{k}_{im} ,$$

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k}_{re}\cdot\mathbf{r})} \cdot e^{-\mathbf{k}_{im}\cdot\mathbf{r}} \quad . \tag{38}$$

A komplex hullámszám tehát $\mathbf{k}_{im}$ irányában exponenciálisan csillapodó téramplitudót jelent.

Összefoglalva: a komplex permittivitás és hullámszám vektor azt fejezi ki, hogy az anyag valamilyen mértékben csillapítja a ráeső sugárzást. A csillapítás mértékét a behatolási mélység (δ) jellemzi, amely definíció szerint az a távolság, ahol az amplitudó 1/e-ed részére csökken. A fenti egyenletből:

$$\delta \equiv \frac{1}{k_{im}} . \tag{39}$$

Komplex dielektromos permittivitás csak az abszorbens közegekre jellemző (vezető anyagok, vagy erősen elnyelő dielektrikumok), ezzel szemben a hullámszámvektor más esetekben is lehet komplex, mint például a jövő órán tárgyalásra kerülő teljes belső visszaverődés során.

Abszorbens közegekben a $\tilde{\mathbf{k}}$ komponensei az alábbi egyenlet megoldásával számíthatók ki:

$$\tilde{\mathbf{k}}^2 = \left(\mathbf{k}_{re} - i\mathbf{k}_{im}\right)^2 = k_{re}^2 - k_{im}^2 - i \cdot 2\mathbf{k}_{re}\mathbf{k}_{im} = \tilde{\varepsilon}\mu \cdot \omega^2 , \tag{40}$$

amiből a valós és képzetes részek szétválasztásával és $k_0^2 = \omega^2/c^2$ kiemelésével a következőt kapjuk:

$$\boxed{k_{re}^2 - k_{im}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{re}\mu \cdot c^2} \quad \text{és} \quad \boxed{\mathbf{k}_{re}\mathbf{k}_{im} = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon_{im}\mu \cdot c^2}{2}} \quad . \tag{41}$$

Általános esetben $\mathbf{k}_{im}$ és $\mathbf{k}_{re}$ nem párhuzamosak (pl. totálreflexió esetén az elhaló hullámnál éppen merőlegesek egymásra). Irányukra a IV. Maxwell-egyenlet ad megkötést, amiből az ω körfrekvenciájú (36) síkhullám esetén a következő feltétel írható fel:

$$\tilde{\mathbf{E}}_0 \cdot \tilde{\mathbf{k}} = 0 \quad \rightarrow \quad \tilde{\mathbf{E}}_0 \cdot \mathbf{k}_{re} = i \cdot \tilde{\mathbf{E}}_0 \cdot \mathbf{k}_{im} . \tag{42}$$

A fenti összefüggés részletes elemzése a *Richter: Bevezetés a modern optikába* c. tankönyv I. kötet 2.2.2.2.2 alfejezetében található. Mi a következő fejezetben csak azt az egyszerű esetet vizsgáljuk, amikor $\mathbf{k}_{im}$ és $\mathbf{k}_{re}$ párhuzamosak.

A Maxwell-reláció analógiájára definiálhatjuk a komplex törésmutatót:

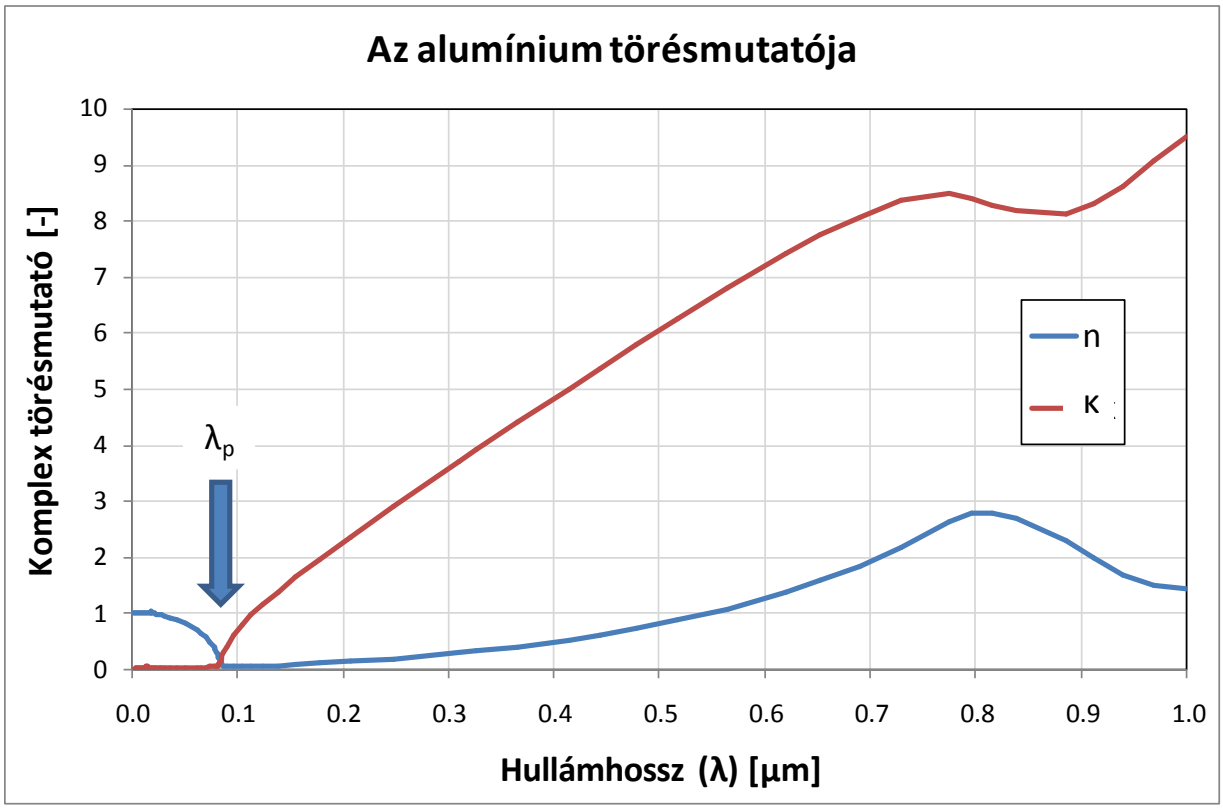
$$n^2 \equiv \varepsilon_r \mu_r \rightarrow \boxed{\tilde{n}^2 \equiv \frac{\tilde{\varepsilon}\mu}{\varepsilon_0 \mu_0} = \tilde{\varepsilon}\mu \cdot c^2}, \quad \text{azaz} \tag{43}$$

$$\tilde{n} = n - i \cdot \kappa, \qquad \text{más konvenció szerint: } \tilde{n} = n(1 - i \cdot \kappa), \tag{44}$$

ahol κ-t kioltási tényezőnek nevezik (κ > 0 elnyeléskor). A következő alfejezetben bemutatandó k_{re} és k_{im} meghatározásának mintájára kiszámítható n_{re} és n_{im} értéke:

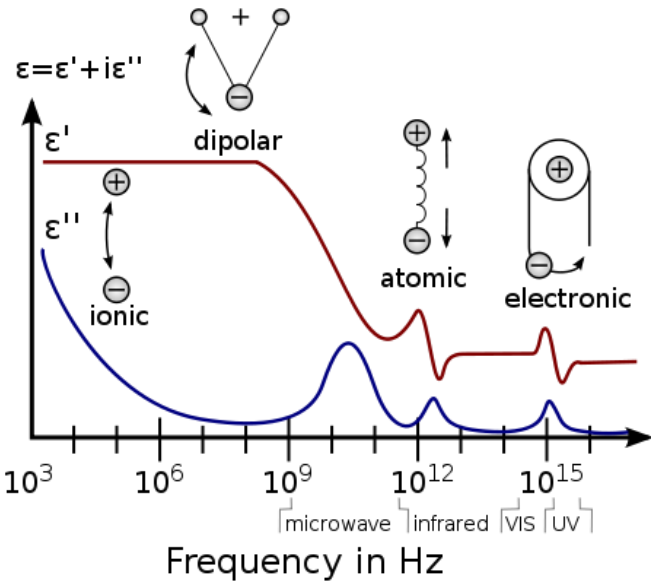
$$\boxed{\kappa^2 = n_{im}^2 = \mu \cdot c^2 \left(-\frac{\varepsilon_{re}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_{re}^2 + \varepsilon_{im}^2} \right)} \; ; \; \boxed{n^2 = n_{re}^2 = \mu \cdot c^2 \left(\frac{\varepsilon_{re}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_{re}^2 + \varepsilon_{im}^2} \right)}. \tag{45}$$

A komplex törésmutatót a felületi reflexió mértékét számszerűsítő Fresnel-formulák, valamint vékonyrétegek interferometrikus leírásánál fogjuk használni. Mind a dielektromos permittivitás, mind a törésmutató erőteljesen függ a vizsgált sugárzás hullámhosszától. Egy tipikus fém, az alumínium esetére az alábbi ábrán bemutatjuk e hullámhosszfüggést.



(forrás: http://refractiveindex.info)

Ahogy korábban megjegyeztük, általános esetben nem csak a vezetőképesség, hanem bármilyen abszorpció leírható a komplex dielektromos permittivitással. A szabad elektronok fent vizsgált plazmája mellett az egyedi atomok, molekulákban kötött atomok, ionok is rezonálhatnak a beeső sugárzással, ezzel abszorpciót okozva. Mivel ezek a folyamatok különböző hullámhosszakon lépnek föl, ε_{re} és ε_{im} változatos frekvenciafüggést mutat. Egy (fiktív) abszorbens dielektrikumra mutat példát az alábbi ábra.



(forrás: wikipedia)

Ha $k_{im} \| k_{re}$ (pl. ha egy vezető anyag felületére merőlegesen esik be a fény)

A törésmutatót definiáló képlet alapján mindig igaz az alábbi összefüggés:

$$\tilde{\mathbf{k}}^2 = \tilde{n}^2 \frac{\omega^2}{c^2} = \tilde{n}^2 k_0^2 \,, \tag{46}$$

maga a $\tilde{\mathbf{k}}$ vektor azonban nem feltétlenül arányos $\mathbf{k}_0$-al, mivel attól eltérhet az iránya. Nézzük meg azt az esetet amikor ez teljesül, azaz ha $\mathbf{k}_{im} \| \mathbf{k}_{re}$ (pl. ha egy vezető anyag felületére merőlegesen esik be a fény). A (40) egyenlet alapján:

$$\left(\mathbf{k}_{re} - i\mathbf{k}_{im}\right)^2 = k_{re}^2 - k_{im}^2 - i \cdot 2\mathbf{k}_{re}\mathbf{k}_{im} = k_{re}^2 - k_{im}^2 - i \cdot 2k_{re}k_{im}\,, \tag{47}$$

$$\left.\begin{aligned} k_{re}^2 - k_{im}^2 &\equiv a \\ k_{re}k_{im} &\equiv b \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

ahol a következő segédjelöléseket vezettük be:

$$a = k_0^2 \varepsilon_{re} \mu \cdot c^2 \quad \text{és} \quad b = \frac{k_0^2 \varepsilon_{im} \mu \cdot c^2}{2} \,. \tag{49}$$

(48)-ból k_{im}^2 kifejezhető:

$$\left(k_{im}^2\right)^2 + a \cdot k_{im}^2 - b^2 = 0\,. \tag{50}$$

A k_{im}^2-ben másodfokú egyenlet megoldása (a − előjeles változat fizikailag értelmezhetetlen):

$$k_{im}^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} = -k_0^2 \frac{\varepsilon_{re}\mu \cdot c^2}{2} + k_0^2 \frac{1}{2}\sqrt{\left(\varepsilon_{re}\mu \cdot c^2\right)^2 + \left(\varepsilon_{im}\mu \cdot c^2\right)^2} \,, \tag{51}$$

ebből:

$$\boxed{k_{im}^2 = k_0^2 \mu \cdot c^2 \left(-\frac{\varepsilon_{re}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_{re}^2 + \varepsilon_{im}^2} \right)} \tag{52}$$

valamint a valós rész:

$$k_{re}^2 = a + k_{im}^2 = k_0^2 \frac{\varepsilon_{re}\mu \cdot c^2}{2} + k_0^2 \frac{1}{2}\sqrt{\left(\varepsilon_{re}\mu \cdot c^2\right)^2 + \left(\varepsilon_{im}\mu \cdot c^2\right)^2} \,, \tag{53}$$

ebből

$$\boxed{k_{re}^2 = k_0^2 \mu \cdot c^2 \left(\frac{\varepsilon_{re}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_{re}^2 + \varepsilon_{im}^2} \right)}. \quad (54)$$

Látható, hogy ha σ = 0, akkor $\varepsilon_{im} = 0$, $k_{im} = 0$ valamint

$$k = k_{re} = k_0 \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \ . \quad (55)$$

A fenti egyenleteket összevetve a törésmutató (45) képletével megkapjuk a jól ismert összefüggéseket:

$$\boxed{\begin{aligned} k_{re} &= k_0 n \\ k_{im} &= k_0 \kappa \end{aligned}}. \quad \text{(Illetve κ másik definíciója szerint } \kappa = \frac{k_{im}}{k_{re}}\text{.)} \quad (56)$$

Érdekes megfigyelni, hogy ha (52) alapján kiszámoljuk a behatolási mélységet, akkor ugyanazt a kifejezést kapjuk, mint véges vezetőképességű anyagokban terjedő nagyfrekvenciás tér esetén megfigyelhető „skin”-effektusnál:

$$\delta = \frac{1}{\omega \sqrt{\frac{\varepsilon_{re}\mu}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma\mu}{\omega\varepsilon_{re}} \right)^2} - 1 \right)}}. \quad (57)$$

A fent bemutatott alumínium esetén, 550 nm-es hullámhosszon δ = 13 nm.

Energiaterjedés EM hullámokban

Az EM tér teljesítmény-sűrűség vektora az ún. Poynting-vektor (a terjedés irányára merőlegesen elhelyezkedő egységnyi felületen időegység alatt átáramló energia):

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t) \, . \quad (58)$$

Az optikára jellemző nagy frekvenciákon jelenleg nem lehetséges a pillanatnyi teljesítmény detektálása, ugyanis a detektorok időállandója sokkal nagyobb mint a fény rezgésének periódusideje (*T*). Emiatt csak időátlagot tudunk megfigyelni:

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r},T) \rangle = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \rangle \quad (59)$$

Ezen vektor abszolút értékét nevezzük intenzitásnak (*I*). A komplex formalizmus használatával:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\left\{ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \cdot e^{i\omega t} \right\} = \tfrac{1}{2}\left(\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \cdot e^{i\omega t} + \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\omega t} \right), \quad (60)$$

hasonlóan **H**-ra. (A komplex vektoramplitudó jelentését a polarizációt taglaló órán fogjuk értelmezni, most elégedjünk meg azzal, hogy segítségével leírható a lineárisan, cirkulárisan és elliptikusan poalrizált sugárzás.) **E**-t és **H**-t visszahelyettesítve (58)-ba könnyen belátható, hogy:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) \right\} + \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) \cdot e^{2i\omega t} \right\}. \quad (61)$$

Az időátlagolás a második tagot kiejti:

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r},T) \rangle = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) \right\}. \quad (62)$$

Felhasználva (16)-t, vezető közegekre ebből a következő adódik (**a**×(**b**×**c**) ≡ (**a**·**c**)**b** − (**a**·**b**)**c**):

$$\left\langle \mathbf{S}(\mathbf{r},T)\right\rangle = \frac{1}{2\mu\omega}\mathrm{Re}\left\{\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\times\left(\tilde{\mathbf{k}}^{*}\times\tilde{\mathbf{E}}^{*}(\mathbf{r})\right)\right\} = \frac{1}{2\mu\omega}\left|\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\right|^{2}\mathbf{k}_{re} - \frac{1}{2\mu\omega}\mathrm{Re}\left\{\left(\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\cdot\tilde{\mathbf{k}}^{*}\right)\cdot\tilde{\mathbf{E}}^{*}(\mathbf{r})\right\}. \quad (63)$$

A IV. Maxwell-egyenletből következő (42) összefüggés miatt a második tag síkhullám esetén izotróp közegben mindig nulla. **E** helyére behelyettesítve a síkhullámokat leíró (36)-et, a Poynting-vektor időátlagára a következő kifejezés adódik:

$$\boxed{\left\langle \mathbf{S}(\mathbf{r},T)\right\rangle = \frac{1}{\mu}\frac{\mathbf{k}_{re}}{\omega}\frac{\left|\tilde{\mathbf{E}}_{0}\right|^{2}}{2}\cdot e^{-2\mathbf{k}_{im}\cdot\mathbf{r}}}. \quad (64)$$

Itt azt feltételeztük, hogy μ valós (ez optikában nagyon jó közelítés). A fenti kifejezés Lambert-Beer-törvény néven is ismert, amely azt fejezi ki, hogy homogén abszorbens közegben (pl. a felületre merőleges terjedés esetén) exponenciálisan csökken a síkhullám teljesítménysűrűsége és amplitudója.

Mit tehet ma egy fizikus a diplomájával (az optika területén)?

Iparág	Alkalmazás	Termék, kutatás	Magyar vonatkozás
Informatika, adatátvitel	adattárolás	CD, DVD, Blue Ray	Philips, Sony
		Holografikus TB	Optilink
	adatbiztonság	Holografikus	Bayer
	adatátvitel	hálózat	Furukawa
		chipek között	SZTAKI
	megjelenítés	3D képernyő	Holografika
	adatfeldolgozás	akuszto-optika	BME AFT
		neuro-számítógép	SZTAKI
Energetika, nehézipar	anyagmegmunkálás	nagyteljesítményű lézerrendszerek	Lasram
	magfúzió	fúziós reaktor szimulációja	BME NTI
		fúziós reaktor méréstechnikája	Wigner FK
Orvostudomány	lézeres sebészet	orvosi lézerek	Lasram
	vizelet diagnosztika, vércukor mérés	automata mikroszóp, fizikai paraméterek optikai mérése, kémiai indikátorcsíkok optikai leolvasása	77Elektronika
	orvosi képalkotás	Pozitron Emissziós Tomográfia (PET)	Mediso
		konfokális 3D mikroszkóp kétfotonos gerjesztéssel	Femtonics
	színlátás korrekció	vékonyrétegek	BME MOGI
	vízminőség vizsgálat	3D digitális holográfia	SZTAKI
Élelmiszeripar	szenzorok	NIR spektrométer	Siemens-BME
Félvezető gyártás	félvezető diagnosztika	lézeres fényforrások és mérőberendezések	Semilab
Világítástechnika	világítás	nagy hatékonyságú LED-es kültéri megvilágító rendszerek	Optimal Optik
		Hg-mentes kisülő lámpa	GE-BME
		LED-es fényforrások	GE
	kijelzők	műszerfal	Bosch
Alapkutatás	anyagtudomány, biológia	femto és attoszekundumos lézerimpulzusok	ELI
Hadiipar	…		