INTERFERENCIA

dr. Erdei Gábor, 2017-08-25

AJÁNLOTT SZAKIRODALOM:

Klein-Furtak, Optics
Richter, Bevezetés a modern optikába
Born-Wolf, Principles of optics
Füzessy Zoltán: A fotonika optikai alapjai

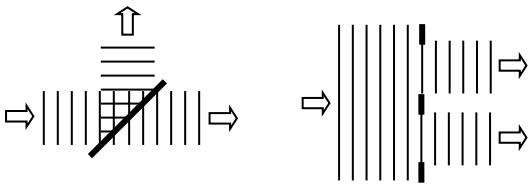
AZ INTERFERENCIA FOGALMA

Az interferencia az a jelenség, amikor két v. több diszkrét hullám fázishelyes szuperpozíciója során a térben állóhullám kép alakul ki, ami elektromágneses hullámok esetén (általában) világos-sötét interferencia csíkok formájában figyelhető meg.

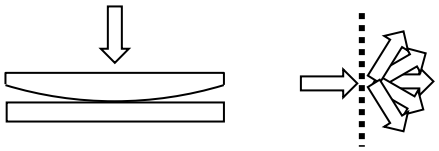
AZ INTERFERENCIAJELENSÉGEK CSOPORTOSÍTÁSA

Komponensek alapján: kéthullám
többhullám

Létrehozási mód alapján: amplitúdóosztás
hullámfrontosztás



Állóhullám kép alapján: helyfüggő interferencia
irányfüggő interferencia



KÖZELÍTÉSEK, FELTÉTELEK, JELÖLÉSEK

közelítések: homogén, lineáris, izotróp közeg, skalár közelítés

feltétel 1: azonos frekvencia (különben nincs állóhullám)
feltétel 2: azonos polarizáció (különben nincs érzékelhető szuperpozíció)
feltétel 3: térben és időben koherens hullámok (láthatóság romlik, ld. bővebben később)
feltétel 4: a két hullám intenzitása legyen azonos (különben a láthatóság romlik)

jelölések: T – periódusidő
ω – körfrekvencia (= $2\pi/T$)
ν – frekvencia (= $1/T$)
λ – hullámhossz (közegben)
k – hullámszám (= $2\pi / \lambda$)
v – fénysebesség közegben (= $\lambda \cdot \nu = \omega / k$)

Az interferenciát leíró modell a geometriai optikán alapszik, ahol az eikonálegyenletnek megfelelően figyelembevesszük az EM tér fázisát, és amennyiben két hullám keresztezi egymást, az eredő teret a találkozó komponensek fázishelyes összegzésével kapjuk meg. Mint azt már láttuk, az eikonál segítségével a tér fázisának helyfüggése a következőképpen adható meg (az időfüggő $e^{-i\omega t}$ tényező elhagyásával):

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot e^{ik_0 S(\mathbf{r})} \,, \tag{1}$$

ahol **E**(**r**) jelöli a térerősség valós vektoramplitudóját. A térbeli pozíció $\mathbf{r}_0$ helyvektor körüli kismértékű (Δ**r**) helyzetváltozás esetén a térerősség a következő alakban közelíthető:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) \approx \Delta\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0) = \Delta\left(\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \cdot e^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)}\right) + \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0) = \Delta\mathbf{E} \cdot e^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)} + \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \cdot \Delta e^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)} + \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0) \,. \tag{2}$$

Geometriai optikában az első tagot elhanyagoljuk, mivel feltételezzük, hogy a térerősség amplitudója térben sokkal lassabban változik mint a fázis (nulla hullámhosszúságú közelítés):

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \cdot \Delta e^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)} + \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \cdot \left(e^{i(k_0 \mathrm{grad}(S(\mathbf{r}_0))\Delta\mathbf{r} + k_0 S(\mathbf{r}_0))} - e^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)}\right) + \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0) \,. \tag{3}$$

A negatív előjelű tag pont akkora mint az utolsó konstans, tehát

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \cdot e^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)} \cdot e^{ik_0 \mathrm{grad}(S(\mathbf{r}_0))\Delta\mathbf{r}} \,. \tag{4}$$

Ez nem más mint egy síkhullám egyenlete. Mivel az eikonál-egyenlet alapján $n = |\mathrm{grad}(S)|$, a lokális hullámszámvektornak ($\mathbf{k}_{lok}$) a következő kifejezés felel meg:

$$\mathbf{k}_{lok} = k_0 \mathrm{grad}(S(\mathbf{r}_0)) \,. \tag{5}$$

Ez az összefüggés igen fontos: azt mutatja, hogy geometriai optikai közelítésben a fény a hullámfrontnormális irányába terjed, fázisváltozását pedig kizárólag a törésmutatóeloszlás határozza meg. Diffrakciós jelenségeknél ez nem feltétlenül van így: a fázis értékét a tér egy adott pontjában a térerősség is befolyásolhatja. Emiatt szokták a geometriai optikát lokális síkhullámú közelítésnek is hívni, bár ez némileg félrevezető, hiszen a hullámfrontok itt is lehetnek görbült felületek, feltéve, hogy a görbületi sugár sokkal nagyobb a hullámhossznál.

Most azt vizsgáljuk meg, hogy mit jelent (2)-ben a térerősségamplitudó megváltozásának elhanyagolása. Ha **J** a Jakobi-mátrix, akkor a megváltozás a következő alakban írható föl:

$$\Delta\mathbf{E} \cdot \mathrm{e}^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)} << \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \cdot \Delta\mathrm{e}^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}\Delta\mathbf{r} \cdot \mathrm{e}^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)} << \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \cdot ik_0 \mathrm{e}^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)} \cdot \mathrm{grad}(S)\Delta\mathbf{r} \tag{6}$$

Csak az *x*-vektorkomponenst kifejtve:

$$\left|\mathrm{grad}(E_x)\Delta\mathbf{r}\right| \cdot \mathrm{e}^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)} << \left|E_x\right| \cdot k_0 \mathrm{e}^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)} \cdot \left|\mathrm{grad}(S)\Delta\mathbf{r}\right| , \tag{7}$$

és a hibát felülről becsülve:

$$\frac{\left|\mathrm{grad}(E_x)\right|}{\left|E_x\right|} << k_0 \cdot \left|\mathrm{grad}(S)\right| . \tag{8}$$

Az eikonál-egyenlet értelmében, és némi átrendezés után ebből a következőt kapjuk:

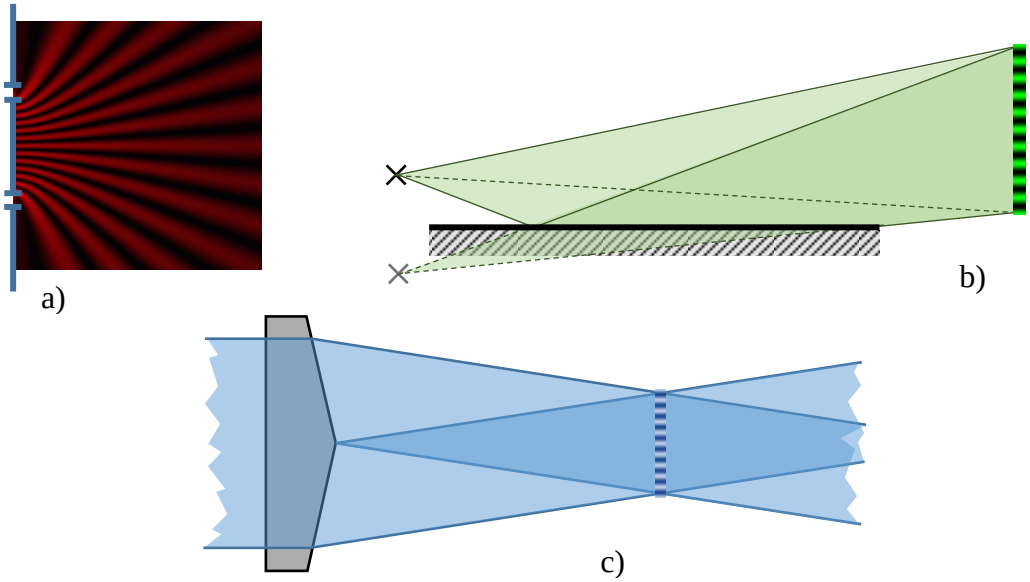
$$\frac{\left|\mathrm{grad}(E_x)\right| \cdot \lambda}{\left|E_x\right|} << 2\pi \,. \tag{9}$$

A fenti kifejezés vagy úgy értelmezhető, hogy hullámhossznyi szakaszon a relatív térerősségváltozásnak elhanyagolható mértékűnek kell lennie, vagy pedig úgy, hogy a hullámhossznak kell sokkal kisebbnek lennie mint a térerősségváltozás jellemző térbeli kiterjedése (nulla hullámhosszúságú közelítés).

MŰSZAKI PÉLDÁK KÉTHULLÁM INTERFERENCIÁRA

Hullámfrontosztó:

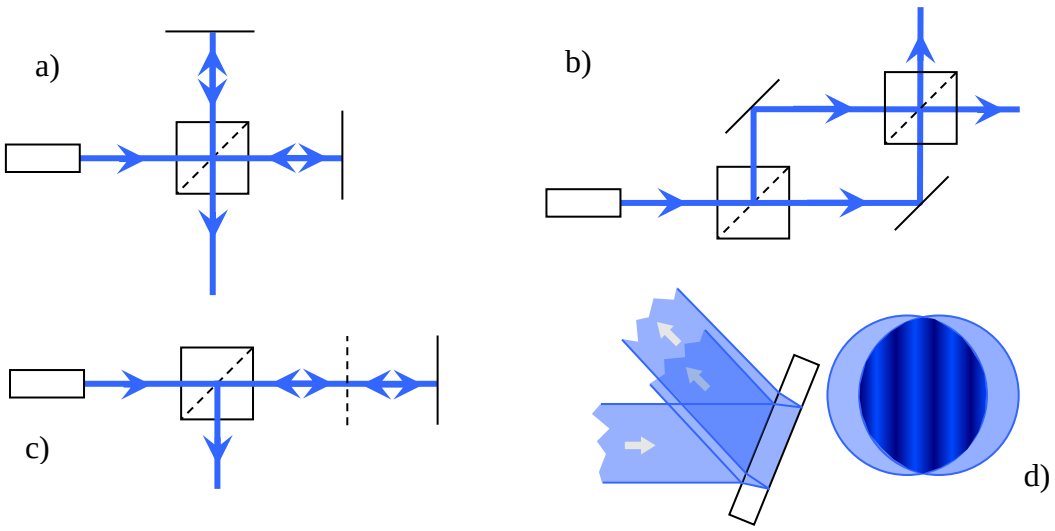
- Young-féle kétréses kísérlet a)
- Lloyd-tükör b)
- Fresnel-biprizma c)



Hullámfrontosztó interferométerek vázlatos felépítése. A Young-féle kétréses kísérletnél (a) feltüntettük a térerősségamplitudó-négyzet térbeli eloszlását.

Amplitúdóosztó:

- Síkpárhuzamos, vagy ékes lemez (alacsony felületi reflexió esetén)
- Michelson-interferométer (ld. még Twyman-Green-interferométer) a)
- Mach-Zehnder-interferométer b)
- Fizeau interferométer (pl. légrés két üveglemez között, Newton-gyűrűk) c)
- Nyíró interferométer (shearing interferometer) d)



Példák amplitúdóosztó interferométerekre.

A Michelson-interferométert távolságmérésre, Fourier-transzormációs spektrometriára, felületalak mérésre használják, a Mach-Zendert holografikus elrendezésekben, gázok törésmutatójának mérésére alkalmazzák, Fizeau-interferométereket elsősorban felület és hullámfrontalak mérésre használnak, a nyíró interferométereket pedig lézerek kollimáltságának vizsgálatára használják (azaz annak eldöntésére, mennyire sík a hullámfrontjuk).

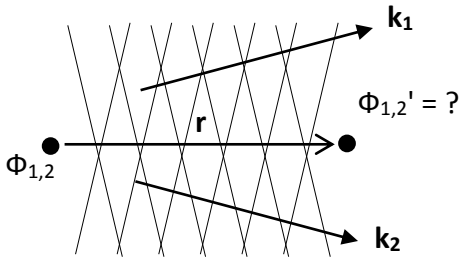
KÉT SÍKHULLÁM INTERFERENCIÁJA PARAXIÁLIS KÖZELÍTÉSBEN

Vizsgáljuk meg a legegyszerűbb esetet, amikor két azonos irányban lineárisan polarizált, de nem azonos irányban terjedő síkhullám találkozik:

$$E_1(\boldsymbol{r},t) = E_{01}\cdot\cos\left(-\omega t+\mathbf{k}_1\mathbf{r}+\varphi_1\right)=E_{01}\cdot\cos\left(\Phi_1\right)$$
$$E_2(\boldsymbol{r},t) = E_{02}\cdot\cos\left(-\omega t+\mathbf{k}_2\mathbf{r}+\varphi_2\right)=E_{02}\cdot\cos\left(\Phi_2\right) \qquad (10)$$

Ennél a tárgyalásnál kivételesen *valós* terminológiát használunk, az intenzitásszámolásnál ui. így látványosabb lesz az időátlagolás hatása. Az eredő térerősség:

$$E(\boldsymbol{r},t) = E_1(\boldsymbol{r},t)+E_2(\boldsymbol{r},t) \qquad (11)$$



Alapprobléma

A teljesítménysűrűséget a Poynting-vektor hossza adja meg:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t)\equiv\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\,, \qquad (12)$$

amely dielektrikumban terjedő síkhullám esetén a következő alakú:

$$S(\mathbf{r},t)=\frac{\mathbf{k}}{\mu\omega}E(\mathbf{r},t)^2=v\cdot\varepsilon\cdot E(\mathbf{r},t)^2\,. \qquad (13)$$

A fenti képletben *v* jelöli a terjedési sebességet. *S*-nek *T* időre vett időátlaga az intenzitás:

$$I(\boldsymbol{r},T)\equiv\left\langle S(\boldsymbol{r},t)\right\rangle\;\Rightarrow\;I(\boldsymbol{r})=\frac{v\cdot\varepsilon}{2}\cdot\left\langle E(\mathbf{r},t)^2\right\rangle\,, \qquad (14)$$

mivel harmonikus jel esetén „*I*” *T*-től független, ha $T\to\infty$. Amennyiben $\mathbf{k_1}$ közel párhuzamos $\mathbf{k_2}$-vel, azaz paraxiális közelítésben vagyunk, *E* helyére síkhullámok *összegét* is beírhatjuk az eredő intenzitás meghatározása végett. Nagyszögű fényterjedés esetén $\mathbf{E_1}$ és $\mathbf{E_2}$ nem párhuzamos, ami bonyolultabbá teszi a tárgyalást (ld. melléklet). Tehát paraxiális, skalár közelítésben az interferenciakép intenzitása a következő:

$$I(\mathbf{r})=\frac{v\cdot\varepsilon}{2}\cdot\left\langle\left(E_1(\mathbf{r},t)+E_2(\mathbf{r},t)\right)^2\right\rangle. \qquad (15)$$

A négyzetreemelés argumentumába behelyettesítve az (10) térerősségeket:

$$\left(E_1(\mathbf{r},t)+E_2(\mathbf{r},t)\right)^2=E_{01}^2\cdot\cos^2(\Phi_1)+E_{02}^2\cdot\cos^2(\Phi_2)+2E_{01}E_{02}\cdot\cos(\Phi_1)\cdot\cos(\Phi_2)\,. \qquad (16)$$

A vegyes szorzat a 2cos(α)cos(β) ≡ cos(α−β) + cos(α+β) azonosság felhasználásával:

$$2E_{01}E_{02}\cdot\cos(\Phi_1)\cdot\cos(\Phi_2)=E_{01}E_{02}\cdot\big(\cos(\Phi_1-\Phi_2)+\cos(\Phi_1+\Phi_2)\big). \qquad (17)$$

A fáziskülönbséget leíró tag (10) alapján időfüggetlen:

$$\delta(\mathbf{r})=\Phi_1-\Phi_2=(\omega-\omega)\cdot t+(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{r}+(\varphi_1-\varphi_2)=(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{r}+(\varphi_1-\varphi_2). \qquad (18)$$

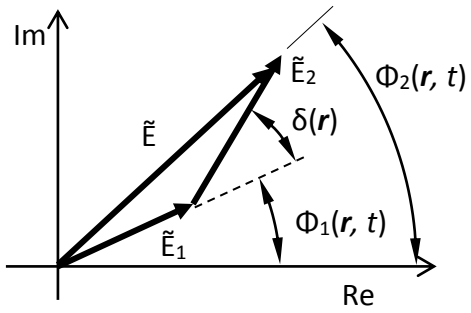
A fázisok összege pedig:

$$\Phi_1+\Phi_2=2\omega\cdot t+(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{r}+(\varphi_1+\varphi_2), \qquad (19)$$

aminek a koszinusza az időátlagolás után zérus. Így (15)-ből a következő marad:

$$I(\mathbf{r})=v\cdot\varepsilon\cdot\left[\frac{E_{01}^2+E_{02}^2}{2}+E_{01}\cdot E_{02}\cdot\cos(\delta(\mathbf{r}))\right]. \qquad (20)$$

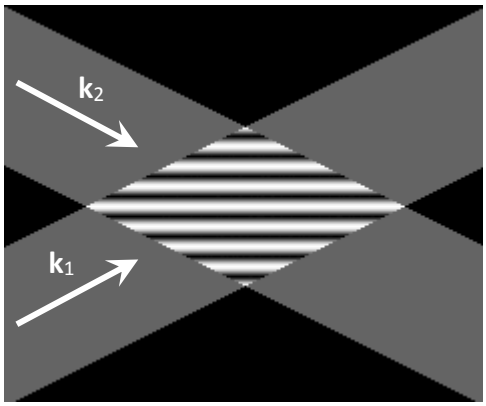
Mivel a két nyaláb *ω*-ja azonos, az átlagolásnál az időfüggő tagok kiesnek, tehát interferencia lép fel: az intenzitáskép időben állandó, és a „cos” függvény miatt periódikusan változik *δ*-val. Ha a térerősségeket a komplex síkon ábrázoljuk, a jelenség a következő módon értelmezhető:



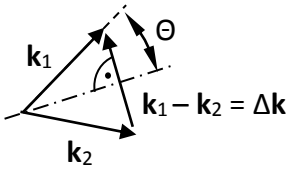
Fazorösszegzés

φ-n keresztül a fáziskülönbséghez hozzáadódhat optikai úthosszkülönbség (*OPD* – Optical Path Difference), vagy időkésleltetés (*τ*):

$$OPD\equiv OPL_1-OPL_2\ :\ \delta=2\pi/\lambda_0\cdot OPD\ ;\ \tau=t_1-t_2\ :\ \delta=\omega\cdot\tau \qquad (21)$$



CSÍKSEREG PERIÓDUSÁNAK MEGHATÁROZÁSA



(18)-ből látszik, hogy formailag olyan, mintha a csíksereg hullámszámvektora $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ lenne. Ebből a periódus (p) könnyen megkapható:

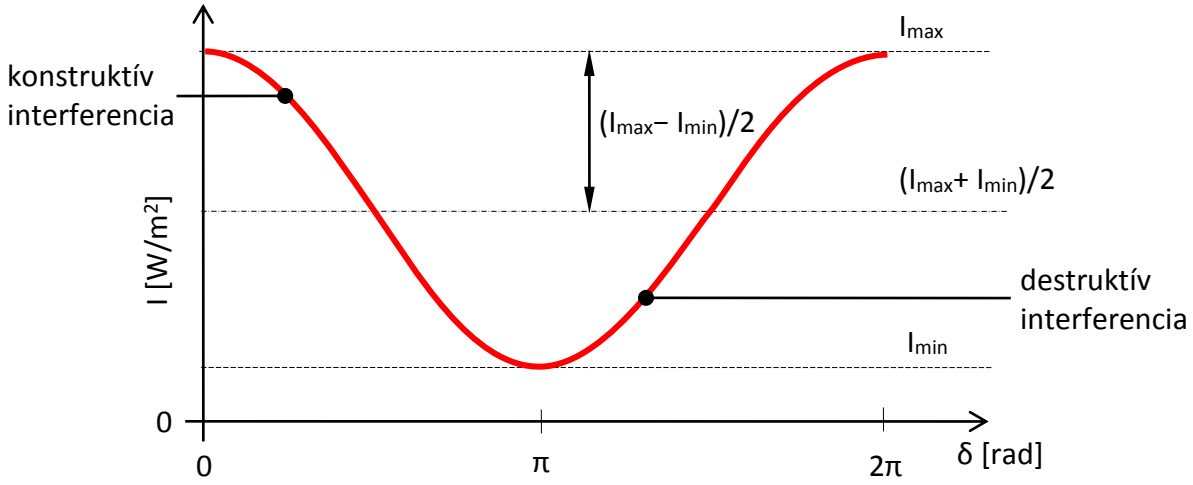
$$p = \frac{2\pi}{\Delta k} = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|} = \frac{2\pi}{2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sin\Theta} = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin\Theta} \qquad (22)$$

AZ INTERFERENCIACSÍKOK LÁTHATÓSÁGA

Az interferenciajelenségek erősségét az ún. láthatósággal jellemezzük. Legyen a két hullám intenzitása külön-külön a következő:

$$I_1 = \frac{v \cdot \varepsilon}{2} \cdot E_{01}{}^2 \; ; \; I_2 = \frac{v \cdot \varepsilon}{2} \cdot E_{02}{}^2 \quad \Rightarrow \quad I(\boldsymbol{r}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos\big(\delta(\boldsymbol{r})\big) \qquad (23)$$

Az $I(\delta)$ függvényt az alábbi diagrammon ábrázoltuk.



A láthatóság definíciója a következő:

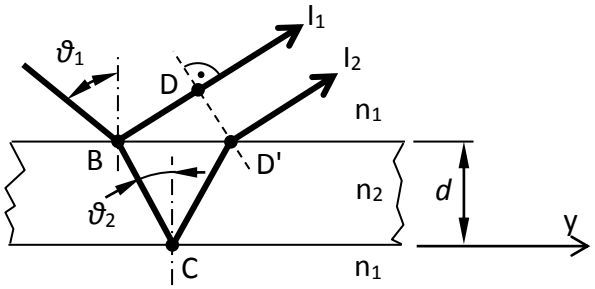
$$V \equiv \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2\sqrt{I_1 \cdot I_2}}{I_1 + I_2} = \frac{2 \cdot E_{01} \cdot E_{02}}{E_{01}^2 + E_{02}^2} \qquad (24)$$

$V_{max} = 1$, ha $I_1 = I_2$. Ebben az esetben:

$$I(\boldsymbol{r}) = 4 \cdot I_1 \cdot \cos^2\left(\frac{\delta(\boldsymbol{r})}{2}\right) \qquad (25)$$

PÉLDA: SÍKPÁRHUZAMOS LEMEZ

A felületre beeső, áthaladó és visszavert síkhullámokat egy-egy fénysugárral reprezentáljuk.



Feltétel: a reflexiós tényező kicsi: $R << 1$ (pl. levegő-üveg esetén 4% merőleges beesésnél).

Mivel $I_1 \approx I_2$, az interferenciajelenség kéthullám közelítésben tárgyalható. A felületről visszavert két síkhullám közötti fáziskülönbség az optikai úthossz alapján számolható:

$$OPD_{BD'-BD} = n_2 \cdot 2d/\cos(\vartheta_2) - n_1 \cdot 2d \cdot \sin(\vartheta_1) \cdot \mathrm{tg}(\vartheta_2) = 2d \cdot n_2 \cdot \cos(\vartheta_2) \qquad (26)$$

Mivel $n_2 > n_1$ esetén B pontban (fordított esetben C pontban) az elektromágneses tér reflexió esetén π fázisugrást szenved, a BD'-BD közötti fázistolás:

$$\delta = OPD_{BD'-BD} \cdot \frac{2\pi}{\lambda_0} + \pi = \frac{4\pi \cdot n_2 d}{\lambda_0} \cdot \cos(\theta_2) + \pi \ . \qquad (27)$$

(23) egyenlet alapján konstruktív interferenciát (megnövekedett reflexiót) akkor látunk, ha $\delta = m \cdot 2\pi$, m = 0, 1, 2, ... Destruktív az interferencia (csökken a reflexió), ha $\delta = m \cdot 2\pi + \pi$, m = 0, 1, 2, ... Merőleges beesésnél, $d \rightarrow 0$ esetén $\delta \rightarrow \pi$, azaz a reflexió zérus, a lemez „eltűnik".

Haidinger-csíkok: ha $d(y)$ = const., az interferenciakép ϑ_2-irányfüggő.

Newton-gyűrűk: ha ϑ_2 = const., akkor az interferenciakép y-helyfüggő d(y)-on keresztül.

AZ INTERFERENCIA IDŐBELI KOHERENCIA-FELTÉTELE

Interferencia koherens, vagy részlegesen koherens nyalábok szuperpozíciója esetén lép fel. Ez utóbbi esetben az egyik nyalábot alkotó ω körfrekvenciájú spektrumkomponensek csak a másik nyaláb azonos körfrekvenciájú komponenseivel képesek interferálni. Ha a két nyaláb között Δt az időkülönbség, minden nyalábpárra a fáziskülönbség más: $\delta(\omega)$. Akkor látunk interferenciát, ha a spektrum összes (ω_1-től ω_2-ig terjedő) ω-jára teljesül az alábbi feltétel (ld. (21) összefüggés):

$$2\pi >> \delta(\omega_1) - \delta(\omega_2) = \omega_1 \cdot \Delta t - \omega_2 \cdot \Delta t = \Delta\omega \cdot \Delta t \ \rightarrow \ 1 >> \Delta\nu \cdot \Delta t \qquad (28)$$

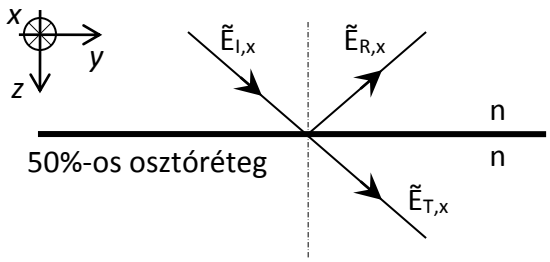
Egyenlőség esetén:

$$\tau_c \equiv \Delta t \ \rightarrow \ \tau_c = 1/\Delta\nu \ \rightarrow \ \tau_c >> \Delta t \qquad \text{v.} \qquad L_L = c \cdot \tau_c >> \mathrm{OPD}, \qquad (29)$$

ahol L_L jelöli a longitudinális koherenciahosszat. A jelenséget a következő előadáson tárgyaljuk részletesen.

HOVÁ LESZ A FÉNY KÉTHULLÁM-INTERFERÓMÉTEREKBEN?

A fény által hordozott teljesítményt interferenciával nem lehet eltüntetni, csak a térbeli vagy időbeli eloszlását megváltoztatni ill. átrendezni! (Energiamegmaradás törvénye.)



Vizsgáljuk meg a legtöbb interferométerben alkalmazott 50%-os intenzitás osztó felület hatását a térerősségvektorra. Az egyszerűség kedvéért csak az **E** vektor beesési síkra merőleges (x) komponensét tekintjük, ami „S" polarizációs állapotnak felel meg, vagyis ha a beeső fény (E_I) x-irányban polarizált, áthaladás (E_T) és visszaverődés (E_R) után a polarizációs állapota nem változik meg. A többi térvektor komponensre a vizsgálat analóg módon lefolytatható. A vizsgált tér monokromatikus, ezért leírására a komplex formalizmust használjuk, az időfüggő $e^{-i\omega t}$ tényező elhagyásával. Az ábrának megfelelően, „n" törésmutatójú közegben lévő 50%-os osztóréteg esetén a komplex térerősség amplitudókra és intenzitásokra igazak az alábbi egyenletek.

Összintenzitás állandó – energiamegmaradás:

$$|\tilde{E}_{I,x}|^2 = |\tilde{E}_{T,x}|^2 + |\tilde{E}_{R,x}|^2 \qquad (30)$$

50%-os intenzitás osztási arány:

$$|\tilde{E}_{T,x}|^2 = |\tilde{E}_{R,x}|^2 \qquad (31)$$

Ẽ-tangenciális komponensére vonatkozó határfeltétel:

$$\tilde{E}_{T,x} = \tilde{E}_{I,x} + \tilde{E}_{R,x} \qquad (32)$$

(30) és (32)-ból:

$$|\tilde{E}_{T,x}|^2 + |\tilde{E}_{R,x}|^2 = |\tilde{E}_{T,x} - \tilde{E}_{R,x}|^2 \rightarrow \tilde{E}_{T,x}\cdot \tilde{E}_{R,x}^{*} = -\tilde{E}_{T,x}^{*}\cdot \tilde{E}_{R,x} \rightarrow \tilde{E}_{T,x}^{*} = -\frac{\tilde{E}_{T,x}\tilde{E}_{R,x}^{*}}{\tilde{E}_{R,x}} \qquad (33)$$

(31)-ből következik, hogy:

$$\tilde{E}_{T,x}\cdot \tilde{E}^{*}_{T,x} = \tilde{E}_{R,x}\cdot \tilde{E}^{*}_{R,x}\,. \qquad (34)$$

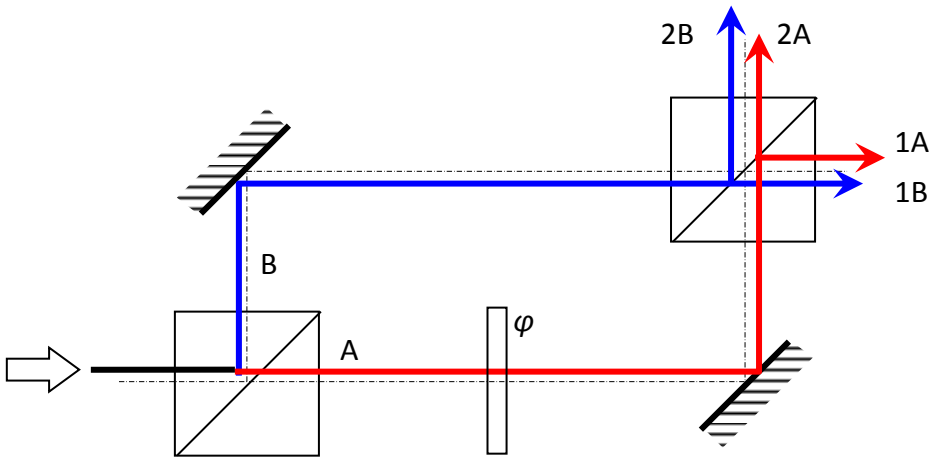
Ezt összevetve a fenti kifejezéssel a következőt kapjuk:

$$\tilde{E}_{T,x}\cdot \tilde{E}_{T,x} = -\tilde{E}_{R,x}\cdot \tilde{E}_{R,x} \rightarrow \tilde{E}_{R,x} = i\cdot\tilde{E}_{T,x}\,. \qquad (35)$$

A fenti összefüggés azt jelenti, hogy bármilyen módon is állítunk elő egy 50%-os osztóréteget (dielektrikumtükör, fémréteg stb.), a visszavert és áthaladó térerősségek között éppen π/2 fáziskülönbség van! A fenti egyenletekből az alábbiak is levezethetőek:

$$\tilde{E}_{R,x} = 2^{-½}\cdot e^{i\cdot¾\pi}\cdot\tilde{E}_{I,x} \quad \text{illetve} \quad \tilde{E}_{T,x} = 2^{-½}\cdot e^{i\cdot¼\pi}\cdot\tilde{E}_{I,x}\,. \qquad (36)$$

Vizsgáljuk most meg az interferenciát egy Mach-Zehnder interferométerben, ahol a fényút „A” ágában egy φ fáziskésleltető lemez (retarder) van.



Ha a belépő nyaláb $\tilde{E}_I$, akkor (36) segítségével az $\tilde{E}_1$ és $\tilde{E}_2$ kilépő nyalábok a következőképpen írhatók fel:

$$\tilde{E}_1 = \tilde{E}_{1A} + \tilde{E}_{1B} = \tilde{E}_I\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{i¼\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{i¾\pi}\cdot e^{i\varphi} + \tilde{E}_I\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{i¾\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{i¼\pi}$$

$$\tilde{E}_2 = \tilde{E}_{2A} + \tilde{E}_{2B} = \tilde{E}_I\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{i¼\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{i¼\pi}\cdot e^{i\varphi} + \tilde{E}_I\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{i¾\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{i¾\pi} \qquad (37)$$

Az egyenleteket egyszerűsítve:

$$\tilde{\mathrm{E}}_1 = \frac{\tilde{\mathrm{E}}_\mathrm{I}}{2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \frac{\tilde{\mathrm{E}}_\mathrm{I}}{2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}$$

$$\tilde{\mathrm{E}}_2 = \frac{\tilde{\mathrm{E}}_\mathrm{I}}{2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,½\pi}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \frac{\tilde{\mathrm{E}}_\mathrm{I}}{2}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,½\pi} \qquad (38)$$

Ebből az intenzitások:

$$I_1 = \frac{v\varepsilon}{2}\left|\tilde{E}_1\right|^2 = \frac{v\varepsilon}{2}\frac{\left|\tilde{E}_I\right|^2}{4}\cdot\left(1+1+e^{i(\pi+\varphi-\pi)}+e^{i(-\pi-\varphi+\pi)}\right) = \frac{I_I}{4}\cdot\left(2+e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)$$

$$I_2 = \frac{v\varepsilon}{2}\left|\tilde{E}_2\right|^2 = \frac{v\varepsilon}{2}\frac{\left|\tilde{E}_I\right|^2}{4}\cdot\left(1+1+e^{i\left(½\pi+\varphi+½\pi\right)}+e^{i\left(-½\pi-\varphi-½\pi\right)}\right) = \frac{I_I}{4}\cdot\left(2+e^{i(\pi+\varphi)}+e^{-i(\pi+\varphi)}\right), \qquad (39)$$

ahol I_I a megvilágító nyaláb intenzitása. A fenti egyenletekből adódik a végeredmény:

$$\boxed{\mathrm{I}_1 = \frac{\mathrm{I}_\mathrm{I}}{2}\cdot\left(1+\cos(\varphi)\right)}$$

$$\boxed{\mathrm{I}_2 = \frac{\mathrm{I}_\mathrm{I}}{2}\cdot\left(1+\cos(\varphi+\pi)\right)} \qquad (40)$$

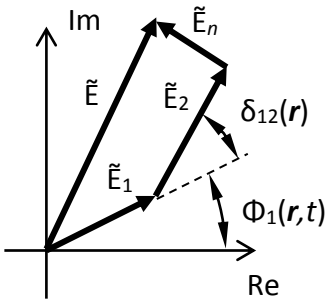
Azaz, az interferométer után kapott két nyaláb között mindig π fáziskülönbség van, vagyis az 1. és 2. nyalábok MINDIG ellenfázisban vannak. Más szóval, a Mach-Zehnder interferométernél (ill. bármely másiknál) a fény hol az egyik kimenő nyalábba megy, hol a másikba, az úthosszkülünbségnek (*φ* fáziskülönbségnek) megfelelően. Ha *φ* = 0, akkor az összes fény az 1. nyalábba megy. Ugyanígy a Michelsonnál a fény vagy elhagyja az interferométert, vagy visszaverődik a fényforrás felé.

„N" DB SÍKHULLÁM INTERFERENCIÁJA (TÖBBHULLÁM INTERFERENCIA)

Amennyiben nem két, hanem több, azonos *ω* körfrekvenciájú síkhullám interferenciáját vizsgáljuk (továbbra is paraxiális, skalár közelítésben), (11)-ből a következő lesz:

$$\tilde{E} = \sum_{n=1}^{N}\tilde{E}_{0n} = \sum_{n=1}^{N}E_{0n}\cdot e^{i\Phi_n}\,. \qquad (41)$$

Mivel a kéthullám interferenciánál már láttuk az időátlagolás hatását, a továbbiakban a sokkal egyszerűbb komplex formalizmust használjuk.



Fazorösszegzés

Az intenzitás értéke:

$$I = \langle S\rangle = \frac{v\cdot\varepsilon}{2}\mathrm{Re}\left\{\left|\sum_{n=1}^{N}E_{0n}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi_n}\right|^2\right\} = \frac{v\cdot\varepsilon}{2}\mathrm{Re}\left\{\sum_{n=1}^{N}E_{0n}^2+\sum_{n=1}^{N}\sum_{\substack{m=1\\n\neq m}}^{N}E_{0n}E_{0m}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\Phi_m-\Phi_n\right)}\right\}. \qquad (42)$$

A vegyes szorzatban minden tag kétszer szerepel. Mivel ezek páronként komplex konjugáltjai egymásnak, a képzetes rész mindenhol kiesik. Az eredmény:

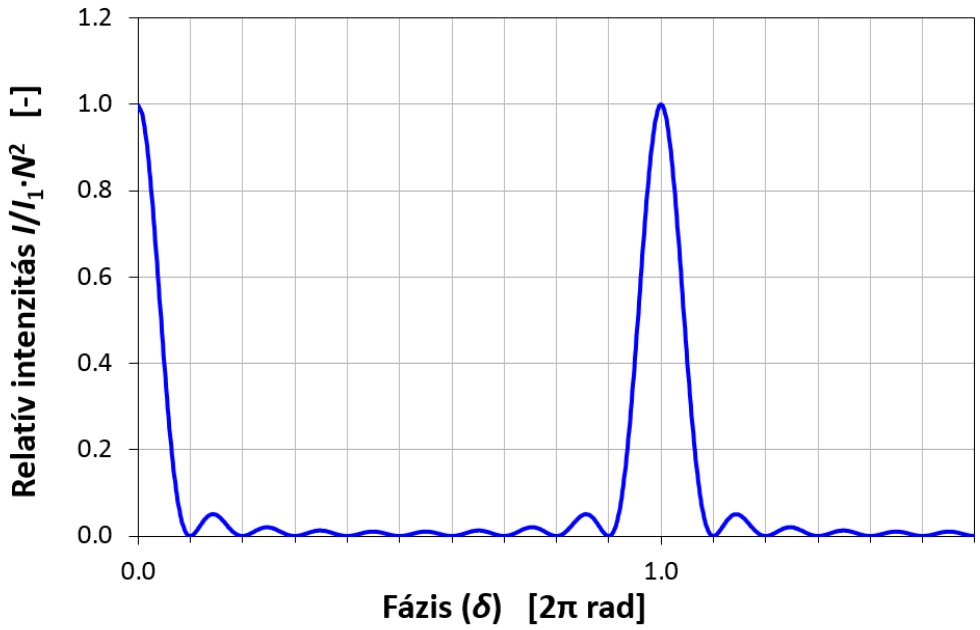
$$I = \sum_{n=1}^{N} I_n + \sum_{n=1}^{N} \sum_{\substack{m=1 \\ n \neq m}}^{N} \sqrt{I_n I_m} \cdot \cos(\Phi_m - \Phi_n) \tag{43}$$

Feltevések: $\delta_{n+1,n} = \Phi_{n+1} - \Phi_n = \delta = \text{const.}$ és $I_n = I_1 = \text{const.}$

A fenti feltételezések mellett a sorösszegzés analitikusan elvégezhető:

$$\boxed{I(\delta) = \frac{I_1}{N^2} \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{N \cdot \delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right)^2}. \tag{44}$$

A kapott interferogram N = 10 hullám esetére az alábbi ábrán látható. Konstruktív interferenciát ekkor kapunk: $\delta_m = m \cdot 2\pi$, ahol m = 0, ±1, ±2, ... – itt vannak a nagy csúcsok. A minimumhelyek távolsága pedig $\Delta\delta = 2\pi/N$, összesen $N-1$ van két csúcs között.



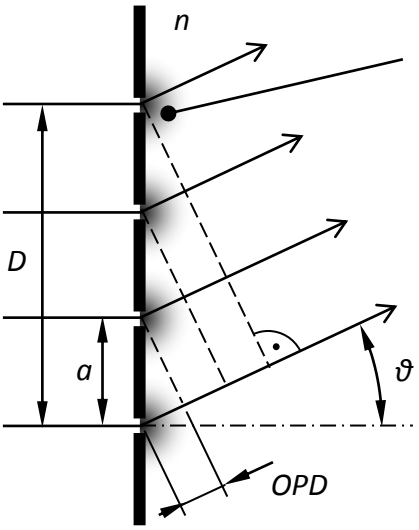
Interferogram N = 10 db hullámkomponens esetén.

PÉLDÁK TÖBBHULLÁM-INTERFERENCIÁRA

- diffrakciós rács
- síkpárhuzamos lemez (ρ >> 0)
- Fabry-Perot interferométer (v. etalon)
- vékonyréteg struktúrák (mátrixos leírásmód)

DIFFRAKCIÓS RÁCS

Egy egyszerű diffrakciós rács felépítése az alábbi ábrán látható. A struktúra egy dimenziós, azaz a papír síkjára merőleges irányban változatlan alakú. A rács N darab rést tartalmaz egy átlátszatlan ernyőn, amelyek mérete összemérhető a hullámhosszal (λ_0), így a fénydiffrakció miatt belőlük gyakorlatilag hengeres hullámfrontok terjednek tova – ezek interferenciáját vizsgáljuk a távoltérben.



pontforrás – ld. diffrakció jövő órán

D – apertúra mérete

a – rácsállandó

n – törésmutató

A feladat két szomszédos pontforrásból a végtelent elérő hullámok fáziskülönbségének (δ) meghatározása. Amennyiben ez ismert, a fent tárgyalt többhullám interferencia mindkét feltétele fennáll, vagyis az interferogram (44) alapján kiértékelhető. A tér egy adott ϑ irányában, a rácstól nagy távolságban a hengeres hullámfrontok lokálisan síkhullámnak tekinthetők. E hullámfrontokat visszavetítve a rácsra (ld. szaggatott vonalak az ábrán) a fáziskülönbség az egyik rés és a szomszédos résnek megfelelő hullámfront közötti úthosszkülönbségből meghatározható:

$$\begin{aligned} OPD &= n \cdot a \cdot \sin(\vartheta) \\ \delta &= \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot OPD = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n \cdot a \cdot \sin(\vartheta) \end{aligned} \tag{45}$$

(44) alapján konstruktív interferencia a következő diszkrét irányokban lép föl:

$$\delta_m = m \cdot 2\pi \quad \Rightarrow \quad \sin(\vartheta_m) = m \cdot \frac{\lambda_0}{n \cdot a} = m \cdot \frac{\lambda}{a} \,, \tag{46}$$

ahol *m* egész szám jelöli az ún. diffrakciós rendek sorszámát. Minél nagyobb a hullámhossz, annál nagyobb a rendek iránya közötti távolság. A valóságban a diffrakciós rács réseiből kiinduló hullámok intenzitása nem egyforma minden ϑ irányban, hanem a rések konkrét alakjától, méretétől (általában a transzmissziójuk térbeli eloszlásától) függő mértékben nullához tart amint $\vartheta \to 0$, ezért a diffrakciós rendek intenzitása is fokozatosan csökken, ahogyan *m* növekszik. Emellett a diffrakciós rendek száma is véges: mivel sin(ϑ) max. értéke 1, az *m* legnagyobb értéke

$$m_{\max} = \frac{a}{\lambda} \,. \tag{47}$$

Felbontóképesség: $R \equiv \lambda/\Delta\lambda$ – azért így definiálták, mert ez a mennyiség egy adott rács esetén hullámhosszfüggetlen állandó (ld. alább).

Rayleigh-kritérium: Amikor $I(\lambda)$ minimuma $I(\lambda+\Delta\lambda)$ maximumához esik, ld. ábra.

Ez matematikailag azt jelenti, hogy:

$$\sin(\vartheta_m(\lambda)) + \Delta\sin(\vartheta_m(\lambda)) = \sin(\vartheta_m(\lambda + \Delta\lambda)) \,, \tag{48}$$

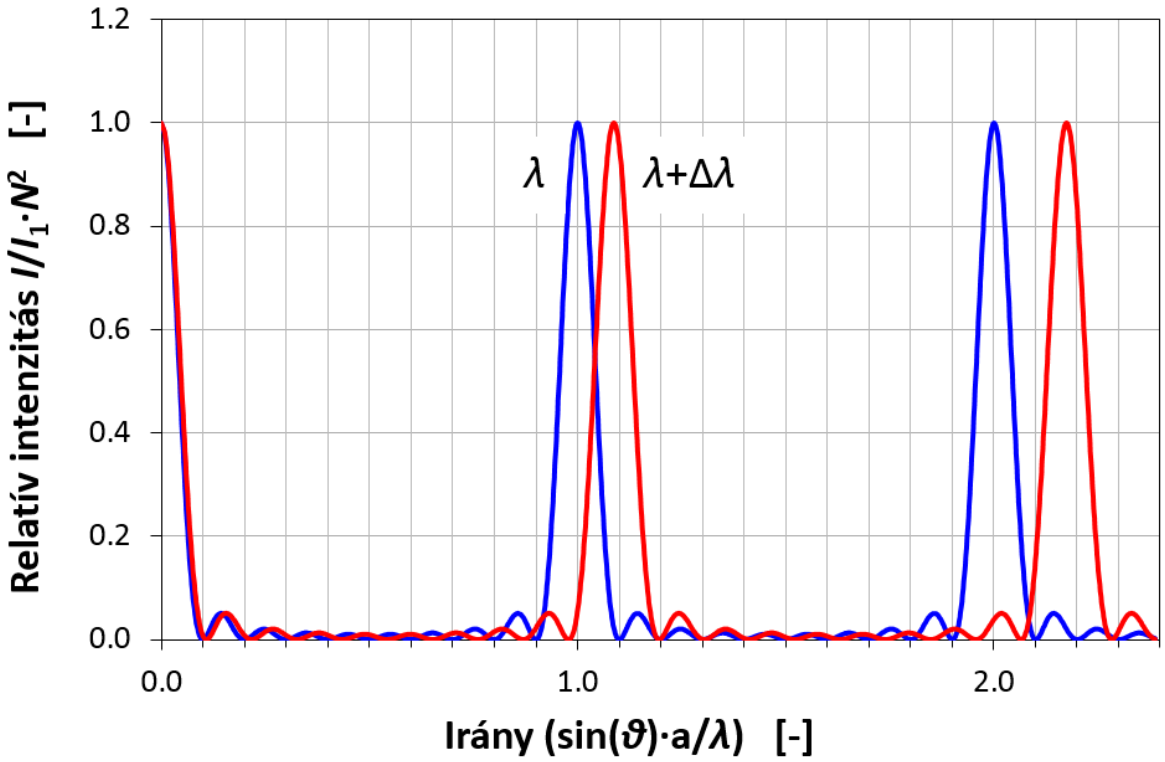
ahol $\Delta\sin(\vartheta_m(\lambda))$ az első minimumhelyre mutat. A feltételből meghatározható „*R*”:

$$\left.\begin{aligned} \delta_m = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot a\cdot \sin\left(\vartheta_m(\lambda)\right) = m\cdot 2\pi \quad &\Rightarrow \sin\left(\vartheta_m(\lambda)\right) = \frac{m\cdot\lambda}{a} \\ \Delta\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot a\cdot \Delta\sin\left(\vartheta_m(\lambda)\right) = \frac{2\pi}{N} \quad &\Rightarrow \Delta\sin\left(\vartheta_m(\lambda)\right) = \frac{\lambda}{a\cdot N} \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$\boxed{\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = R = m\cdot N = m\cdot\frac{D}{a}}\,.$$

Azaz minél nagyobb a rács *D* apertúrája a rácsállandóhoz képest (vagy más szóval minél több rés van az apertúrán belül), annál nagyobb a felbontás, tehát annál közelebbi spektrumvonalak is felbonthatók a ráccsal. A felbontóképesség *m*-el is nő.



Diffrakciós rács interferogrammja *N* = 10 db rés esetén. A pirossal ábrázolt függvénynél a hullámhosszat Δλ-val megnöveltük a kékhez képest úgy, hogy éppen a Rayleigh-kritérium teljesüljön.

AZ INTERFERENCIA MŰSZAKI ALKALMAZÁSÁNAK TERÜLETEI

- spektroszkópia
- méréstechnika
- holográfia
- interferenciaszűrők
- lézerek

MELLÉKLET – NAGYSZÖGŰ INTERFERENCIA

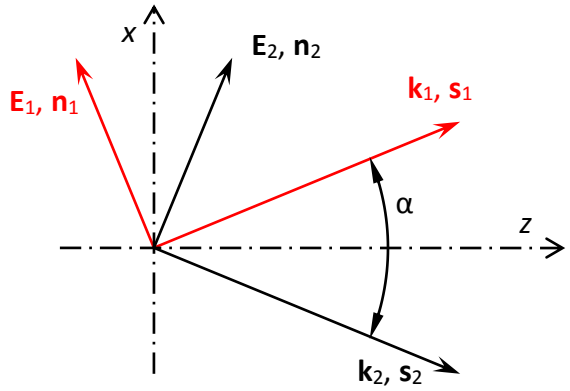
A fénymodelleket leíró előadásjegyzet (60) egyenlete alapján dielektrikumban terjedő síkhullám esetén a Poynting-vektor időátlaga (**s** jelöli a hullámfrontnormális irányába mutató egységvektort):

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r},T)\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\tilde{\mathbf{E}}\times\tilde{\mathbf{H}}^*\} = \frac{1}{2\mu\omega}\mathrm{Re}\{\tilde{\mathbf{E}}\times(\mathbf{k}\times\tilde{\mathbf{E}}^*)\} = \frac{v\cdot\varepsilon}{2}\tilde{\mathbf{E}}\times(\mathbf{s}\times\tilde{\mathbf{E}}^*)\,. \qquad (50)$$

A valósrészképzést elhagyjuk, mivel dielektrikumokban **E** és **H** mindig fázisban vannak, valamint nem jelöltük a térerővektorok helyfüggését. A következő két tetszőleges szöget bezáró harmonikus síkhullám interferenciáját vizsgáljuk:

$$\tilde{\mathbf{E}}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1\cdot e^{i\Phi_1(\mathbf{r})} \text{ és } \tilde{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_2\cdot e^{i\Phi_2(\mathbf{r})}. \qquad (51)$$

Az elektromos térerősségek legyenek az *x*-*z* síkban (P-polarizáció). Ugyanez a vizsgálat az S-polarizációra a továbbiakban leírtakkal analóg módon lefolytatható.



(50)-ba beírva a két síkhullám térerősségeinek az összegét (azaz $\mathbf{E_1}+\mathbf{E_2}$ és $\mathbf{H_1}+\mathbf{H_2}$ -t):

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r},T)\rangle = \frac{v\cdot\varepsilon}{2}(\tilde{\mathbf{E}}_1+\tilde{\mathbf{E}}_2)\times(\mathbf{s}_1\times\tilde{\mathbf{E}}_1^*+\mathbf{s}_2\times\tilde{\mathbf{E}}_2^*)\,. \qquad (52)$$

Felbontva a zárójeleket:

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r},T)\rangle = \frac{v\cdot\varepsilon}{2}\left(\tilde{\mathbf{E}}_1\times(\mathbf{s}_1\times\tilde{\mathbf{E}}_1^*)+\tilde{\mathbf{E}}_2\times(\mathbf{s}_2\times\tilde{\mathbf{E}}_2^*)+\tilde{\mathbf{E}}_1\times(\mathbf{s}_2\times\tilde{\mathbf{E}}_2^*)+\tilde{\mathbf{E}}_2\times(\mathbf{s}_1\times\tilde{\mathbf{E}}_1^*)\right)\,. \qquad (53)$$

A vektoriális szorzatokat $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \equiv (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$ alapján felbontva:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{S}(\mathbf{r},T)\rangle = \frac{v\cdot\varepsilon}{2}\Big((\tilde{\mathbf{E}}_1\cdot\tilde{\mathbf{E}}_1^*)\cdot\mathbf{s}_1+(\tilde{\mathbf{E}}_2\cdot\tilde{\mathbf{E}}_2^*)\cdot\mathbf{s}_2+(\tilde{\mathbf{E}}_1\cdot\tilde{\mathbf{E}}_2^*)\cdot\mathbf{s}_2+(\tilde{\mathbf{E}}_2\cdot\tilde{\mathbf{E}}_1^*)\cdot\mathbf{s}_1-\\ -(\tilde{\mathbf{E}}_1\cdot\mathbf{s}_2)\cdot\tilde{\mathbf{E}}_2^*-(\tilde{\mathbf{E}}_2\cdot\mathbf{s}_1)\cdot\tilde{\mathbf{E}}_1^*\Big)\end{aligned}\,. \qquad (54)$$

Az egyforma komponensek szorzatainál kiesett az $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$-nek megfelelő tag, mivel **k** merőleges **E**-re. A kereszttagoknál ugyanez nem mondható el, ezért benne maradtak az összefügésben. Paraxiális közelítésben ezt a két utolsó tagot hanyagoljuk el, valamint felhasználva, hogy $\mathbf{s_1}$ közel párhuzamos $\mathbf{s_2}$-vel, a tagokat skalárisan összegezhetjük. Az intenzitás ekkor

$$I(\mathbf{r}) = \langle S(\mathbf{r},T)\rangle = \frac{v\cdot\varepsilon}{2}\left((\tilde{\mathbf{E}}_1\cdot\tilde{\mathbf{E}}_1^*)+(\tilde{\mathbf{E}}_2\cdot\tilde{\mathbf{E}}_2^*)+(\tilde{\mathbf{E}}_1\cdot\tilde{\mathbf{E}}_2^*)+(\tilde{\mathbf{E}}_2\cdot\tilde{\mathbf{E}}_1^*)\right), \qquad (55)$$

ami valóban ekvivalens (15)-el, illetve (20)-el. Amennyiben $|\mathbf{E_1}| = |\mathbf{E_2}| = E$, de a két hullám nem egyirányú, hanem tetszőleges szöget zár be, (54)-ből a következő lesz:

$$\left\langle \mathbf{S}(\mathbf{r},T)\right\rangle = \frac{v\cdot\varepsilon}{2}\left(2E^2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\mathbf{s} + 2E^2\cos(\delta)\cos(\alpha)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\mathbf{s} + \right.$$
$$\left. + \tilde{E}_1\cdot\tilde{E}_2^*\sin(\alpha)\cdot\mathbf{n}_2 - \tilde{E}_2\cdot\tilde{E}_1^*\sin(\alpha)\cdot\mathbf{n}_1\right). \tag{56}$$

Itt **s** a két hullámszámvektor szögfelezőjének irányába, $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$ pedig a térerősségvektorok irányába mutató egységvektor. Ez utóbbiak különbsége éppen **s** irányába mutat, így:

$$\left\langle \mathbf{S}(\mathbf{r},T)\right\rangle = \frac{v\cdot\varepsilon}{2}\left(2E^2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\mathbf{s} + 2E^2\cos(\delta)\cos(\alpha)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\mathbf{s} + \right.$$
$$\left. + 2E^2\cos(\delta)\sin(\alpha)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\mathbf{s}\right). \tag{57}$$

A fenti egyenletekben a fáziskülönbséget a szokásos módon jelöltük: $\delta \equiv \Phi_1 - \Phi_2$. Átalakítva:

$$\left\langle \mathbf{S}(\mathbf{r},T)\right\rangle = v\cdot\varepsilon\cdot E^2\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos(\delta)\cos(\alpha)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos(\delta)\sin(\alpha)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\cdot\mathbf{s}\,, \tag{58}$$

ami trigonometrikus azonosságok felhasználásával roppantul leegyszerűsödik:

$$\left\langle \mathbf{S}(\mathbf{r},T)\right\rangle = v\cdot\varepsilon\cdot E^2\left(1+\cos(\delta)\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\mathbf{s}\,. \tag{59}$$

Ez az összefüggés azt mutatja, hogy a teljesítmény a szögfelező irányába terjed, <**S**> abszolútértéke pedig a keresett intenzitás:

$$\boxed{I(\mathbf{r}) = v\cdot\varepsilon\cdot E^2\left(1+\cos(\delta(\mathbf{r})\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \tag{60}$$

A fenti képlet értelmezése igen egyszerű: minél nagyobb a nyalábok által bezárt α szög, a szögfelező irányába egyre kevesebb teljesítmény terjed, emiatt az intenzitás koszinuszosan gyengül. Mivel a levezetés S- és P-polarizációra ugyanazt adja, az (60) összefüggés két tetszőlegesen, de azonos irányban polarizált hullámra igaz. Amikor a két hullám terjedési iránya α = 180°-ot zár be egymással, azaz pont egymással szembe haladnak, tökéletes állóhullám jön létre: a térerősség továbbra is harmonikusan rezeg, vannak csomópontok és duzzadási helyek, de energia nem terjed semmilyen irányba.