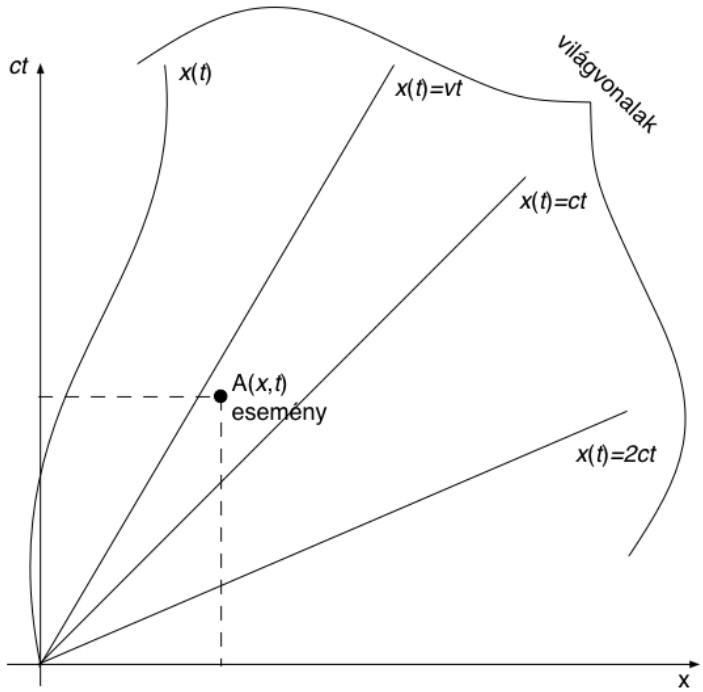
A speciális relativitáselmélet geometriai bemutatása, Sander Bais „Very Special Relativity“ c. könyve alapján

Bokor Nándor, BME, 2013.

Posztulátumok:
1. A fénysebességet minden inerciarendszerben minden irányban *c*-nek mérjük.
2. A fizika törvényei minden inerciarendszerben ugyanazok.

1. ábra: Az *esemény* és a *világvonal* fogalma.



1. ábra

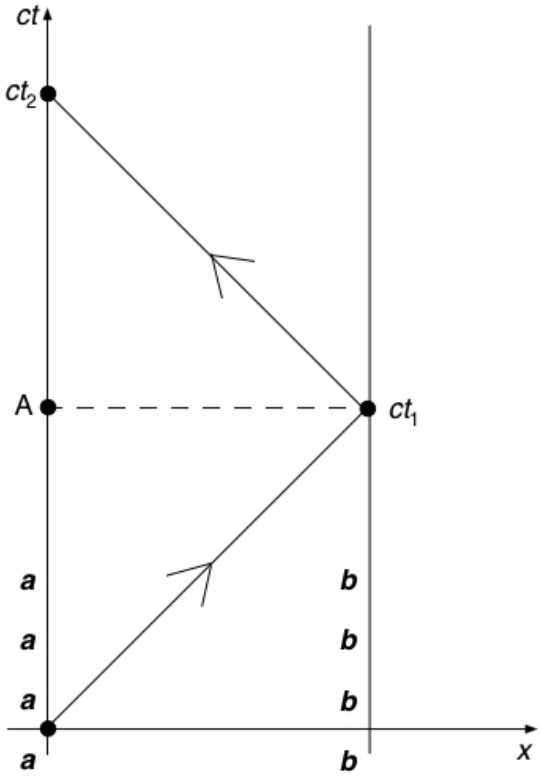
2. ábra: Órák kalibrációja a K vonatkoztatási rendszerben.

Egymáshoz képest nyugvó illetők (***a*** és ***b***) egymáshoz kalibrálják az órájukat.

Amikor ***a*** megkapja a fényjelet, az órája t_2-t mutat. Ezt az értéket elküldi ***b***-nek, hogy az úgy korrigálhassa a saját órája állását, hogy (visszamenőleg) a t_1 éppen t_2 fele legyen.

Ez azt is jelenti, hogy ***a*** világvonalán az A esemény időpontja $\frac{t_2}{2} = t_1$

$\Rightarrow$ a szaggatott vonal az *egyidejűséget* jelöli ki.



2. ábra

3. ábra: Órák kalibrálása a K′ vonatkoztatási rendszerben.

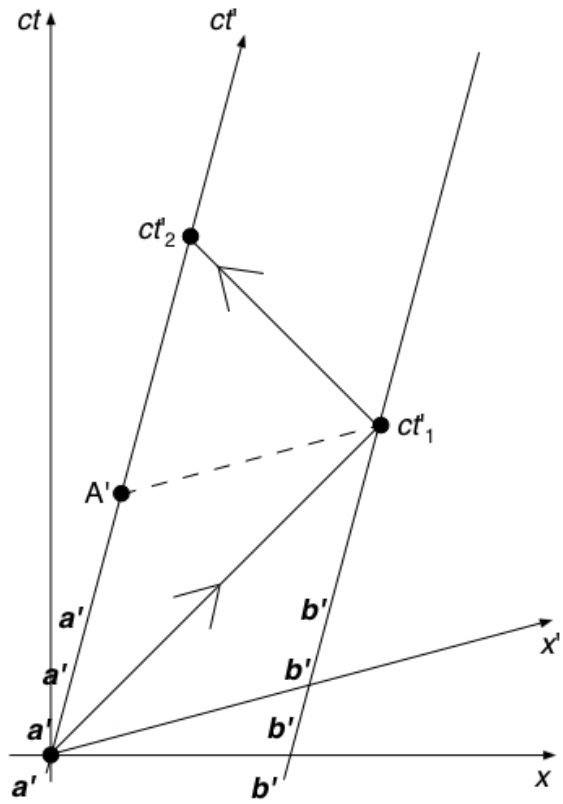
Ugyanez a kalibrálás egy olyan K′ rendszerben, amely K-hoz képest mozog. (Itt ***a′*** és ***b′*** a két, órával rendelkező ember.)

Az ***a′*** által kibocsátott fényjel is 45°-os egyenes az ábrán!

A gondolatmenet ugyanaz, mint az előbb ⇒ ***a′*** világvonalán az A′ esemény ideje $\frac{t'_2}{2} = t'_1$ ⇒ az egyidejűség vonalát ***a′*** és ***b′*** számára a ferde szaggatott vonal jelzi.

A „vesszősek“ az egyidejűség vonala mentén mérnek távolságot (a vesszőtlenek is, a saját egyidejűségi vonalaik mentén) ⇒ az x′-tengely a szaggatott vonallal lesz párhuzamos!

AZ EGYIDEJŰSÉG RELATÍV.



3. ábra

4. ábra: Mi a helyzet a *newtoni* kinematikában? Galilei-transzformáció.

Az *idő* abszolút (csak egyféle egyidejűségi vonalak vannak az ábrán, a vízszintes szaggatott vonalak). $\Rightarrow$ a fénysebesség viszont így relatív.

a által kibocsátott fényjel sebessége: $c\left(=\frac{x}{t}\right)$

a' szerint:

$$c' = \frac{x - \Delta x}{t} = c - \frac{\Delta x}{t} = c - v,$$

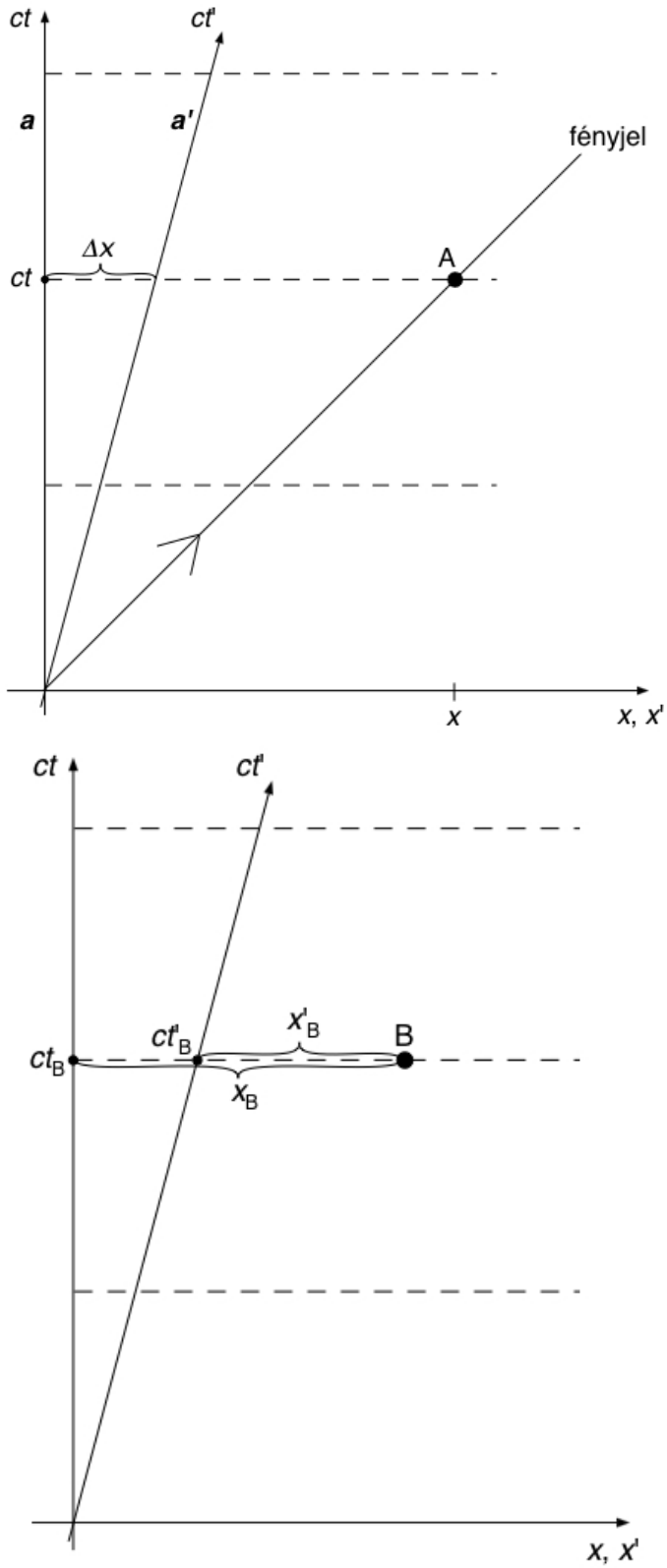
ahol v: ***a'*** sebessége.

.....

Galilei-transzformáció (pl. a B eseményre, ld. alsó ábra):

$$x'_B = x_B - \Delta x_B = x_B - vt_B$$
$$t'_B = t_B$$

.....



4. ábra

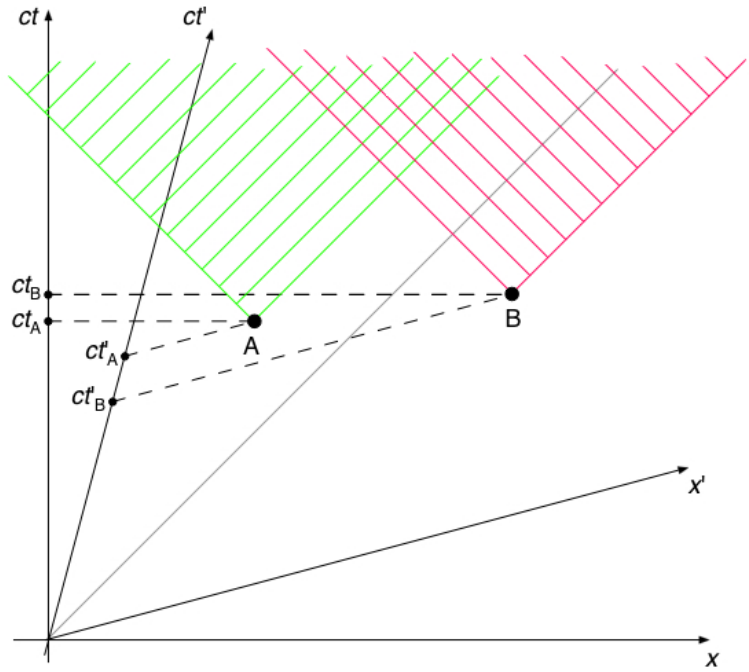
5. ábra: Vissza Einsteinhez. Események sorrendje.

Az események sorrendje lehet különböző K-ban és K′-ben:

$t_A < t_B$, de $t'_A > t'_B$

A jelenség magyarázata, hogy a „vesszősek“ és a „vesszőtlenek“ más-más módon jelzik az egyidejűséget az ábrán (ennek pedig a fénysebesség abszolút volta az oka).

De: A és B között nem lehet *ok-okozat* kapcsolat. Az A és B által befolyásolható események a zöld, ill. piros tartományon belül fekszenek (ezek az ún. jövőbeli fénykúpok); látható, hogy A és B egymás fénykúpján (befolyási tartományán) *kívül* fekszenek.



5. ábra

6. ábra: Sebességtranszformáció.

$u = \frac{x_D}{t_D} =$ < a zöld háromszögek hasonlósága miatt > =

$$\Rightarrow = \frac{|x'_A| + x'_D}{t'_A} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow = \frac{ct'_A - ct'_D}{|x'_A|} \cdot c \qquad (2)$$

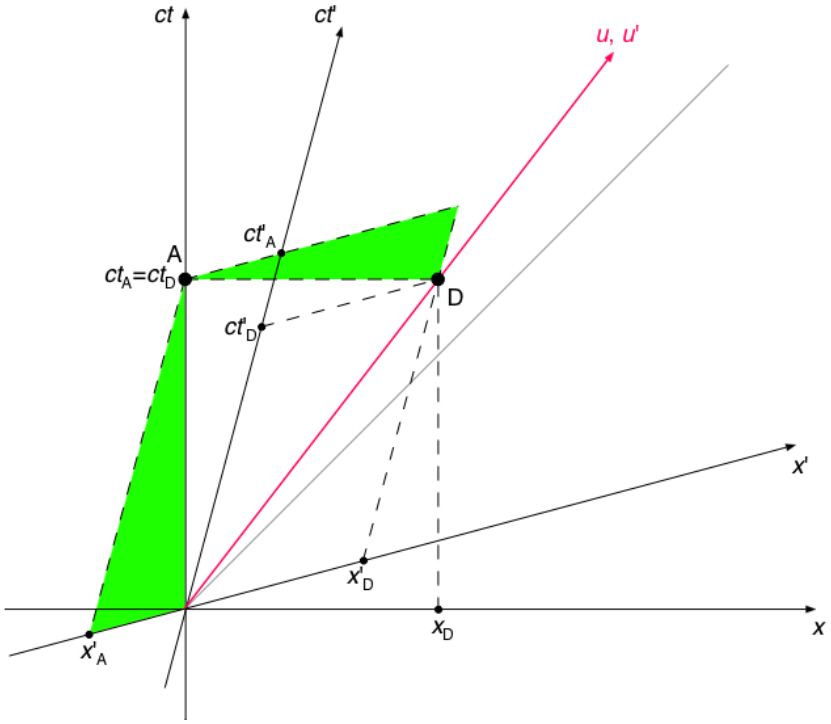
(1) $\Rightarrow \quad x'_D = ut'_A - |x'_A|$

(2) $\Rightarrow \quad t'_D = t'_A - u \cdot \frac{|x'_A|}{c^2}$

A két utolsó egyenletet egymással osztva:

$$u' = \frac{x'_D}{t'_D} = \frac{ut'_A - |x'_A|}{t'_A - u\frac{|x'_A|}{c^2}} = \frac{u - \frac{|x'_A|}{t'_A}}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{|x'_A|}{t'_A}} = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

Megjegyzés: a vesszős tengelyek kalibrálását még nem végeztük el (a vesszőtlenekhez képest), de ez még nem okozott gondot, mert minden aránypárban (pl. $\frac{x_D}{t_D}$, (1), (2)) a számláló és a nevező mindig ugyanabban a rendszerben van kalibrálva (vagy mindkettő a vesszősben, vagy mindkettő a vesszőtlenben).



6. ábra

7. ábra: Inverz sebességtranszformáció.

(A sebességtranszformáció inverze természetesen algebrailag is kijön, ha magát az előző sebességtranszformációs egyenletet u-ra megoldjuk.)

$u' = \frac{x'_D}{t'_D} =$ < a zöld háromszögek hasonlósága miatt > =

$$\Rightarrow = \frac{x_D - x_A}{t_A} \qquad (1)$$

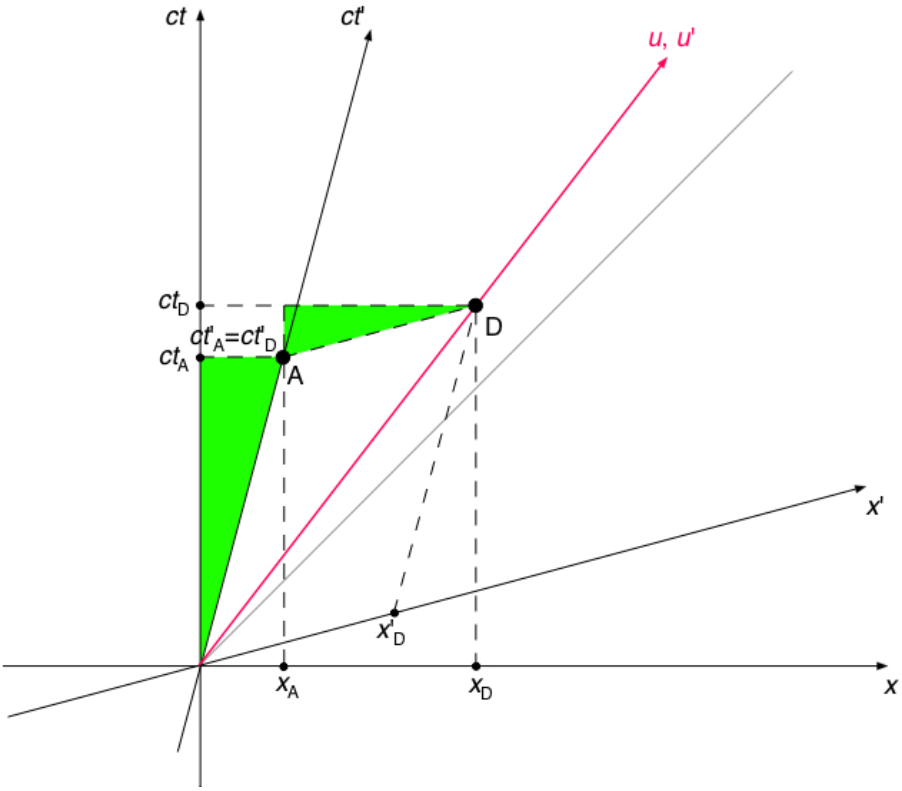
$$\Rightarrow = \frac{ct_D - ct_A}{x_A} \cdot c \qquad (2)$$

(1) $\Rightarrow \quad x_D = u' t_A + x_A$

(2) $\Rightarrow \quad t_D = t_A + u' \cdot \frac{x_A}{c^2}$

A két utolsó egyenletet egymással osztva:

$$u = \frac{x_D}{t_D} = \frac{u' t_A + x_A}{t_A + u' \frac{x_A}{c^2}} = \frac{u' + \frac{x_A}{t_A}}{1 + \frac{u'}{c^2} \frac{x_A}{t_A}} = \frac{u' + v}{1 + \frac{u' v}{c^2}}$$



7. ábra

8. ábra: Időtágulás.

t'_A: O és A között eltelt „sajátidő“ (végig ***a'*** méri, a saját órájával).
t_A: O és A között ***a*** által mért idő. Ő ehhez a méréshez felhasználja az egyidejűségi vonalat (praktikusan: lekérdezi a ***b*** karóráján mutatott értéket).

t_B: O és B közötti „sajátidő“ (végig ***a*** órája méri).
t'_B: O és B között ***a'*** által mért idő. Ő ehhez a méréshez felhasználja az egyidejűségi vonalat (praktikusan: lekérdezi a ***d'*** karóráján mutatott értéket).

A szimmetria miatt:

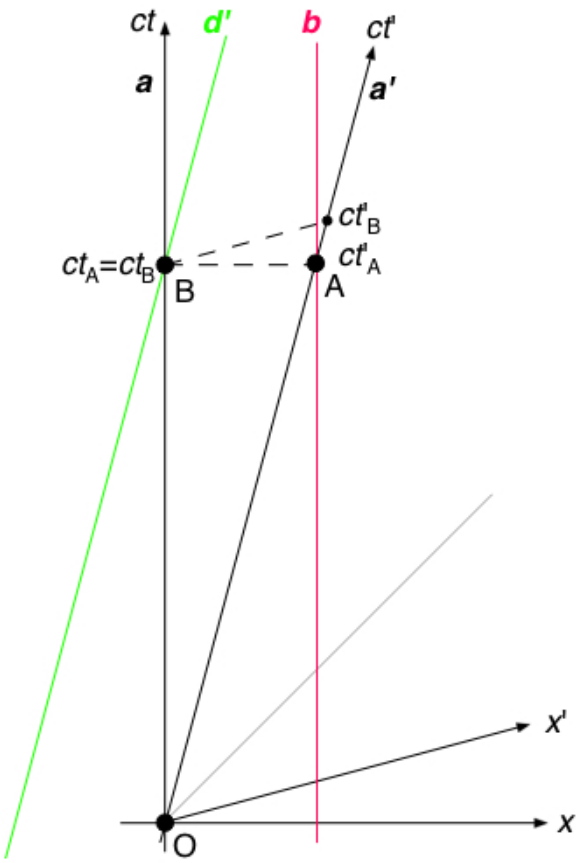
$t_A = \gamma \cdot t'_A$ és $t'_B = \gamma \cdot t_B$,

ahol a két γ ugyanaz.

$$\Rightarrow \quad t'_B = \gamma \cdot t_B = \gamma \cdot t_A = \gamma^2 t'_A, \qquad \text{tehát } \gamma > 1.$$

A sajátidő mindig a legrövidebb időtartam két esemény között. Ha bárki más méri az időtartamot, ennél hosszabbat fog mérni.

IDŐDILATÁCIÓ.



8. ábra

9. ábra: Időtágulás (folyt.)

A zöld és a piros háromszög hasonlósága miatt:

$$v\left(=\frac{x_A}{t_A}\right)=\frac{ct'_B-ct'_A}{|x'_B|}\cdot c$$

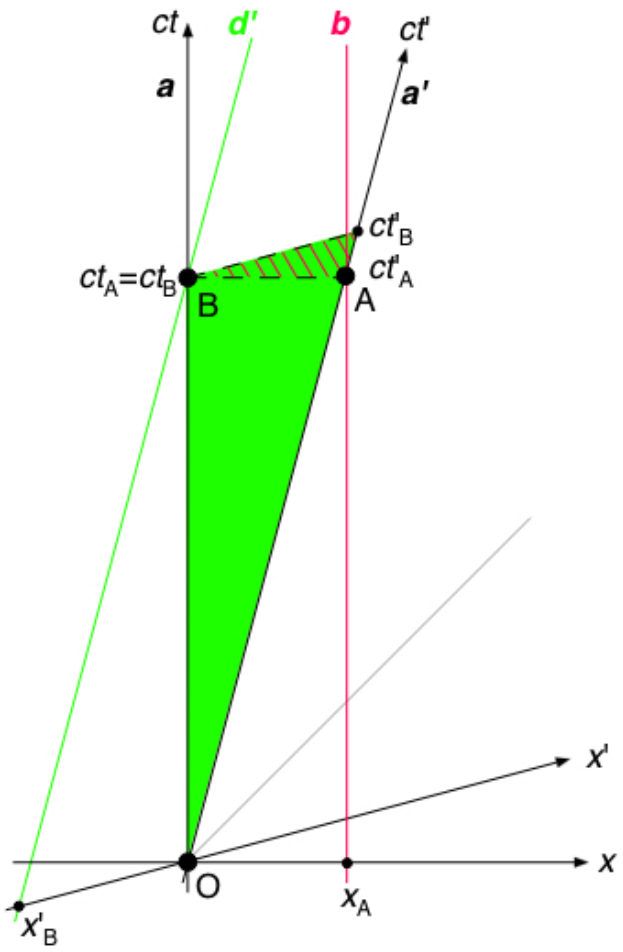
Az előző oldal alapján: $t'_A=\frac{1}{\gamma^2}t'_B$

$$\Rightarrow \qquad v=\frac{c^2t'_B\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)}{|x'_B|}=\frac{c^2\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)}{v} \qquad \left(\text{mert } \frac{|x'_B|}{t'_B}=v\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{v^2}{c^2}=1-\frac{1}{\gamma^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Ez az időtágulásban szereplő faktor.



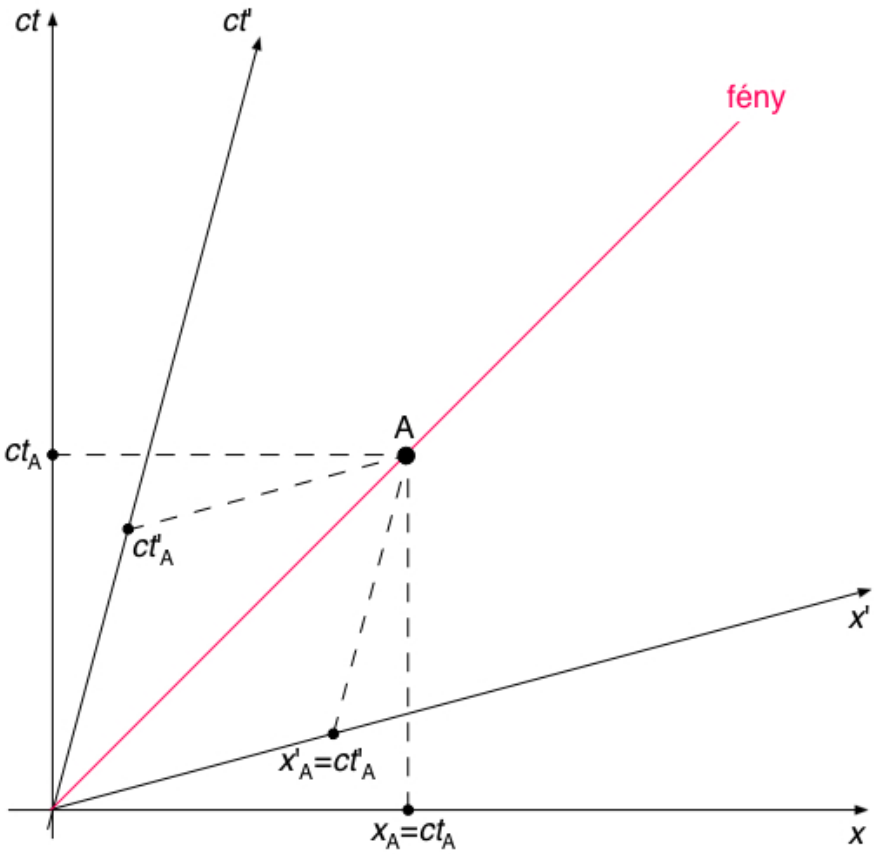
9. ábra

10. ábra: A kalibrálásról.

A ct- és x-tengelyek kalibrálása (azaz az 1 méteres osztások távolsága az ábrán) ugyanaz kell hogy legyen, csak így lehet 45°-os egyenes a fény világvonala.

Ugyanezen okból a ct'- és x'-tengelyek kalibrálása is ugyanaz kell hogy legyen (az 1 méteres osztások távolsága az ábra ct'- és x'-tengelyein ugyanakkora kell hogy legyen).

(A vesszős és vesszőtlen tengelyek *egymáshoz* való kalibrálásáról itt még nincs szó!)



10. ábra

11. ábra: Hosszkontrakció: K-ban mozgó, K′-ben álló rúd hossza.

A kalibrációról előbb írottak miatt:

Ugyanaz a viszony x'_E és x_E között, mint t'_B és t_B között.

8. ábra: $t'_B = \gamma \cdot t_B$

$$\Rightarrow \qquad x'_E = \gamma \cdot x_E$$

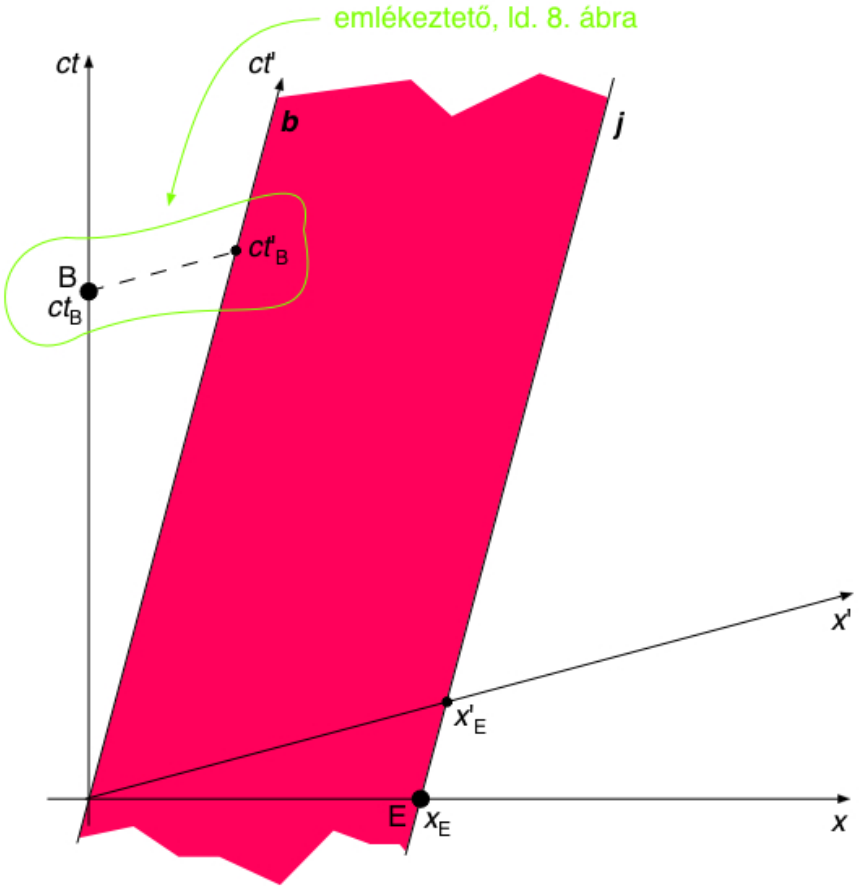
A rúd „sajáthossza“ (nyugalmi hossza):

$$l_0 = x'_E \qquad \text{(K′-ben mérik)}$$

A rúd „mozgási hossza“:

$$l = x_E = \frac{x'_E}{\gamma} = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad \text{(K-ban mérik)}$$

HOSSZKONTRAKCIÓ.



11. ábra

12. ábra: Hosszkontrakció: K′-ben mozgó, K-ban álló rúd hossza.

8. ábra: $t_A = \gamma \cdot t'_A$

$$\Rightarrow \qquad x_F = \gamma \cdot x'_F$$

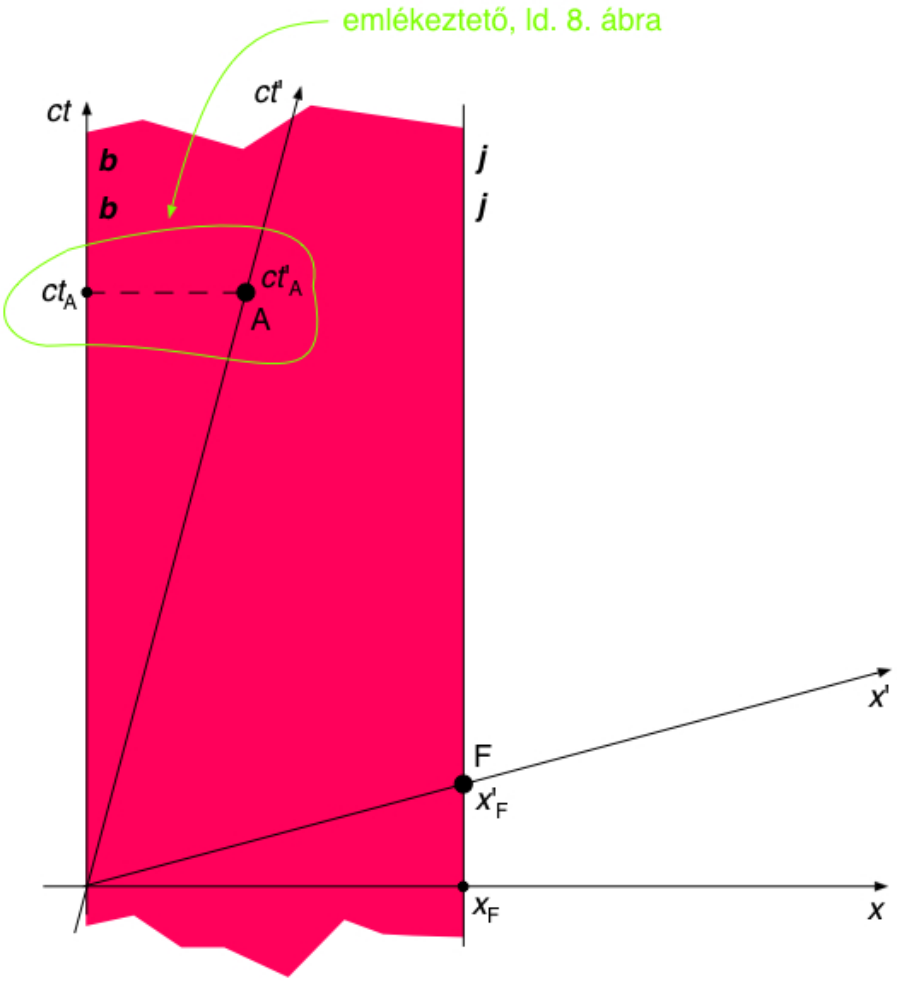
A rúd „sajáthossza“ (nyugalmi hossza):

$$l_0 = x_F \qquad \text{(K-ban mérik)}$$

A rúd „mozgási hossza“:

$$l = x'_F = \frac{x_F}{\gamma} = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad \text{(K′-ben mérik)}$$

Megjegyzés: az ábra naiv euklideszi értelmezéséből $x_F < x'_F$ következne, de látjuk a képletből, hogy $x_F > x'_F$! Ez előrevetíti, hogy a vesszős és vesszőtlen tengelyek egymáshoz kalibrálása nem az euklideszi geometriának megfelelő lesz.



12. ábra

13. ábra: Kalibráció.

A 10. ábrán volt szó az x'- és ct'-tengelyek egymáshoz kalibrálásáról (ill. az x- és ct-tengelyek egymáshoz kalibrálásáról).

Most: hogyan kell a ct- és ct'- (és ct''-, stb.) tengelyeket egymáshoz kalibrálni?

Pl.:
$ct_A = cT$ (méterben mérve). Hol van az a G esemény, amelyre $ct'_G = cT$?

$$t'_G = T = t_A = \gamma \cdot t'_A > t'_A \quad \Rightarrow$$ G „felfelé“ helyezkedik el az ábrán.

G koordinátái K-ban:

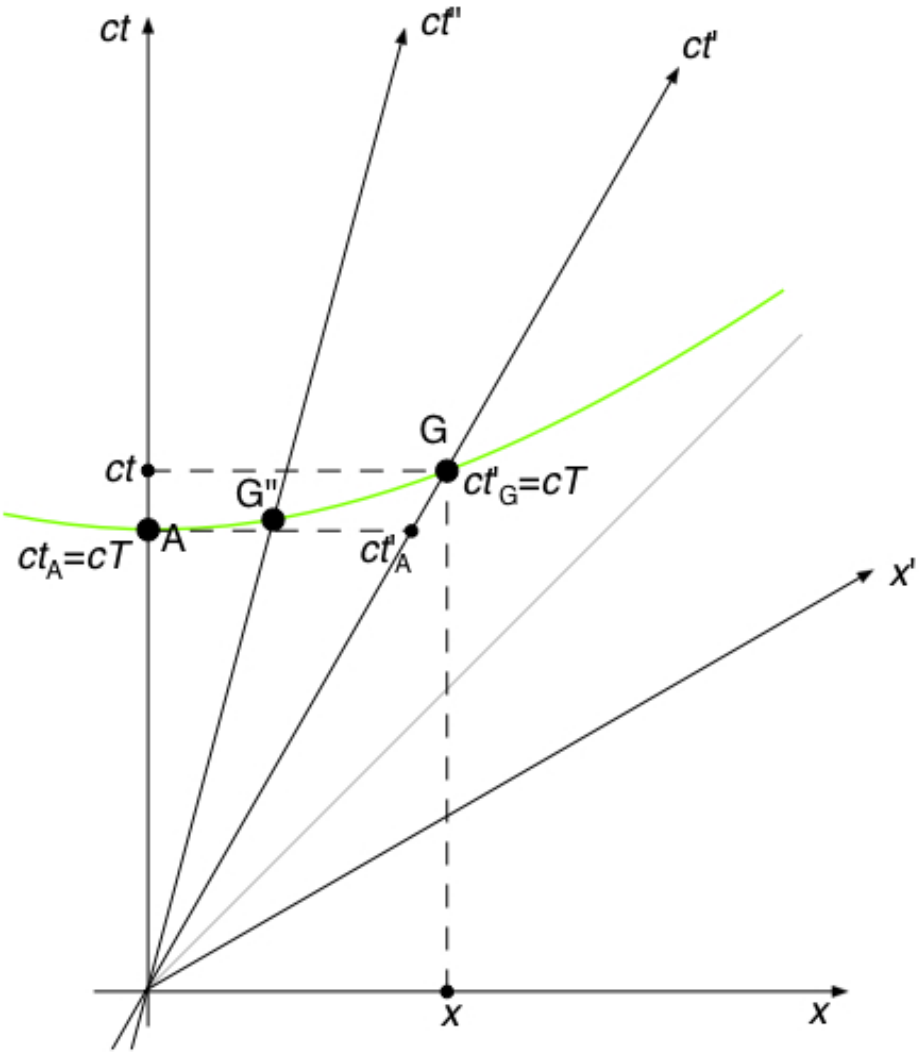
$$ct = \gamma ct'_G = \gamma cT \qquad (1)$$
$$x = vt = \gamma vT \qquad (2)$$

Fejezzük ki a kapcsolatot x és ct között úgy, hogy v-t eliminájuk! Így a konklúziónk nem csak a G, hanem a G″, stb. eseményekre is igaz lesz.

(1), (2) $\quad \Rightarrow \quad ct = cT \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{c^2 t^2}}}$

$$\Rightarrow \quad c^2 t^2 - x^2 = c^2 T^2$$

Egy *hiperbola* egyenletét kaptuk (az ábrán zölddel jelölve). Ez az ún „kalibrációs hiperbola“.



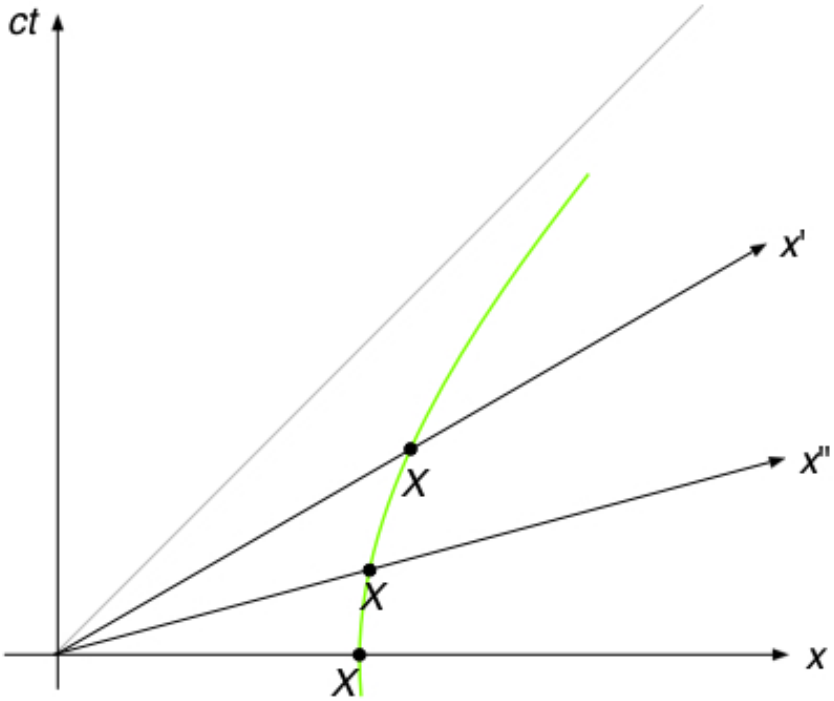
13. ábra

14. ábra: Kalibráció 2.

A 8. ábráról írottak értelmében az x-, x'-, x''-, stb. tengelyek egymáshoz kalibrálása hasonlóan, kalibrációs hiperbolával történik, amelynek egyenlete:

$$x^2 - c^2 t^2 = X^2$$

(a tengelyeken X méter osztást kijelölő hiperbola egyenlete).



14. ábra

15. ábra: A fénytani Doppler-effektus.

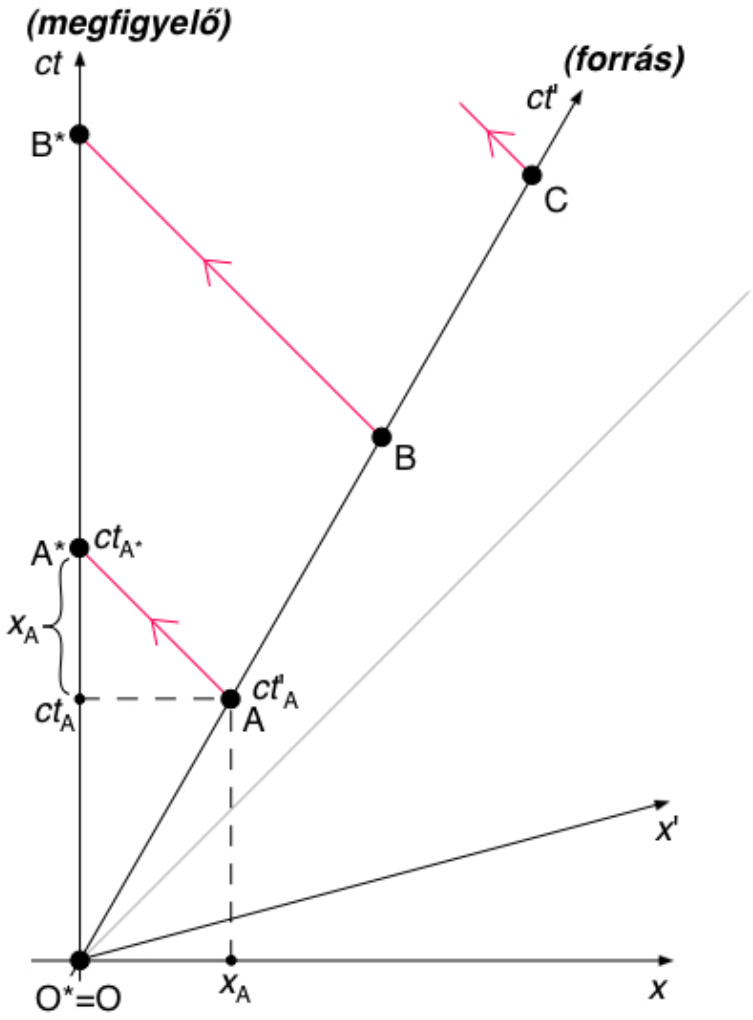
O, A, B, C, ...: kibocsátási események
O*, A*, B*, C*, ...: detektálási események

$$ct_{A^*} = ct_A + x_A = ct_A + vt_A = ct_A\left(1+\frac{v}{c}\right) = \frac{ct'_A}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(1+\frac{v}{c}\right) = ct'_A\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

Mindkét oldal reciprokát véve:

$$f_{megfigyelt} = f_{kibocsátott}\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

Megjegyzés: a fenti képlet egymástól *távolodó* forrás és megfigyelő esetére vonatkozik.



15. ábra

16. ábra: Lorentz-transzformáció.

Cél: (x_P, t_P) ismeretében $(x'_P, t'_P) = (?,?)$

„Segédesemények“: A, B.

A zöld és piros háromszögek mind hasonlóak (az azonos színűek egybevágóak is).

$$x'_P = x'_B - \Delta x'_{PB} = x'_B - |x'_A| = x'_B - vt'_A = \frac{x_P}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - v\frac{t_P}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ahol felhasználtuk a hosszkontrakció (ld. 11. ábra) és az időtágulás (ld. 8. ábra) képletét. Azaz az x'-re vonatkozó Lorentz-transzformációs formula:

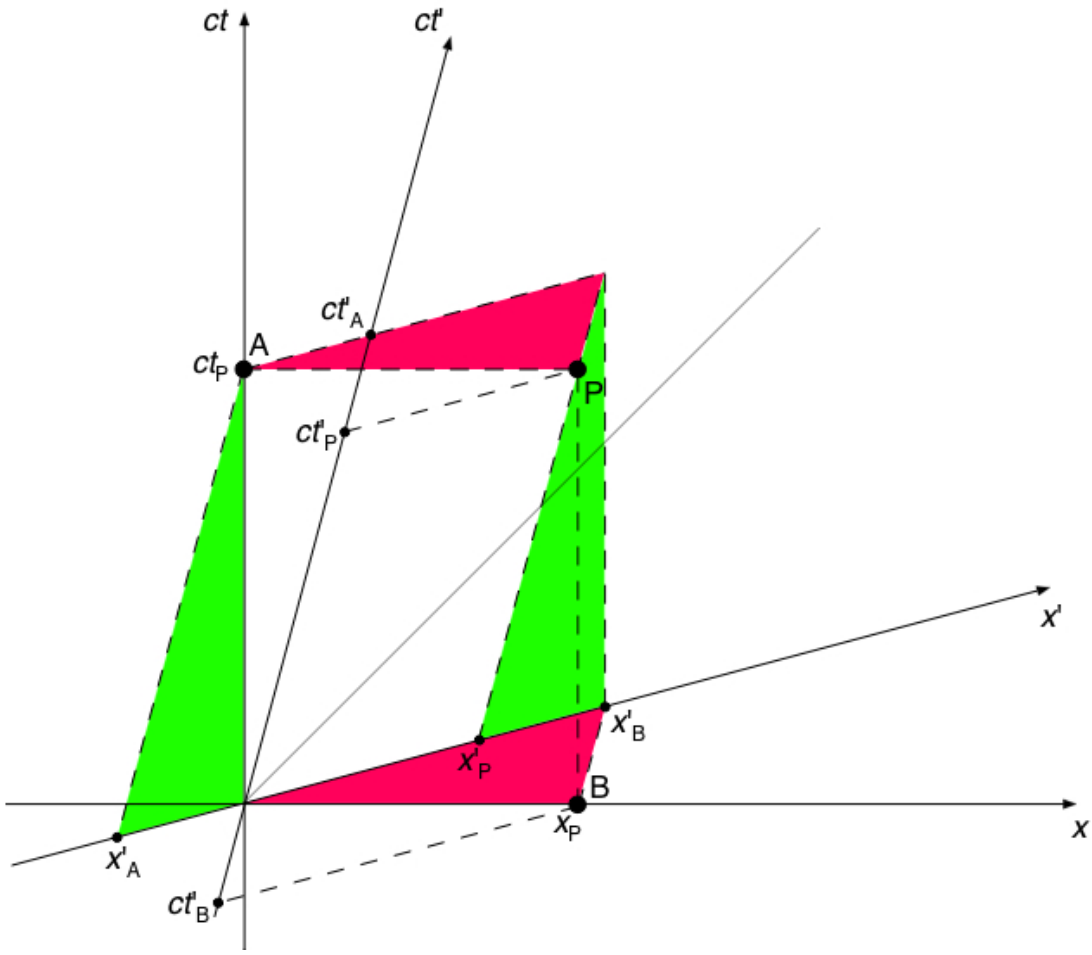
$$x'_P = \frac{x_P - vt_P}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{(L1)}$$

Hasonlóan:

$$ct'_P = ct'_A - |ct'_B| = \left\langle \frac{|ct'_B|}{x'_B} = \frac{v}{c} \right\rangle = ct'_A - \frac{v}{c}x'_B = c\frac{t_P}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v}{c}\frac{x_P}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Azaz a t'-re vonatkozó Lorentz-transzformációs formula:

$$t'_P = \frac{t_P - \frac{v}{c^2}x_P}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{(L2)}$$



16. ábra

17. ábra: Inverz Lorentz-transzformáció.

(Megjegyzés: az inverz transzformációs formulák természetesen megkaphatók algebrai úton is: ehhez az (L1), (L2) egyenletrendszert kell megoldani x-re és t-re.)

„Segédesemények“: D, E.

$$x_P = x_E + \Delta x_{EP} = x_E + x_D = x_E + vt_D = \frac{x'_P}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + v\frac{t'_P}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ahol felhasználtuk a hosszkontrakció (ld. 12. ábra) és az időtágulás (ld. 8. ábra) képletét. Azaz az x-re vonatkozó (inverz) Lorentz-transzformációs formula:

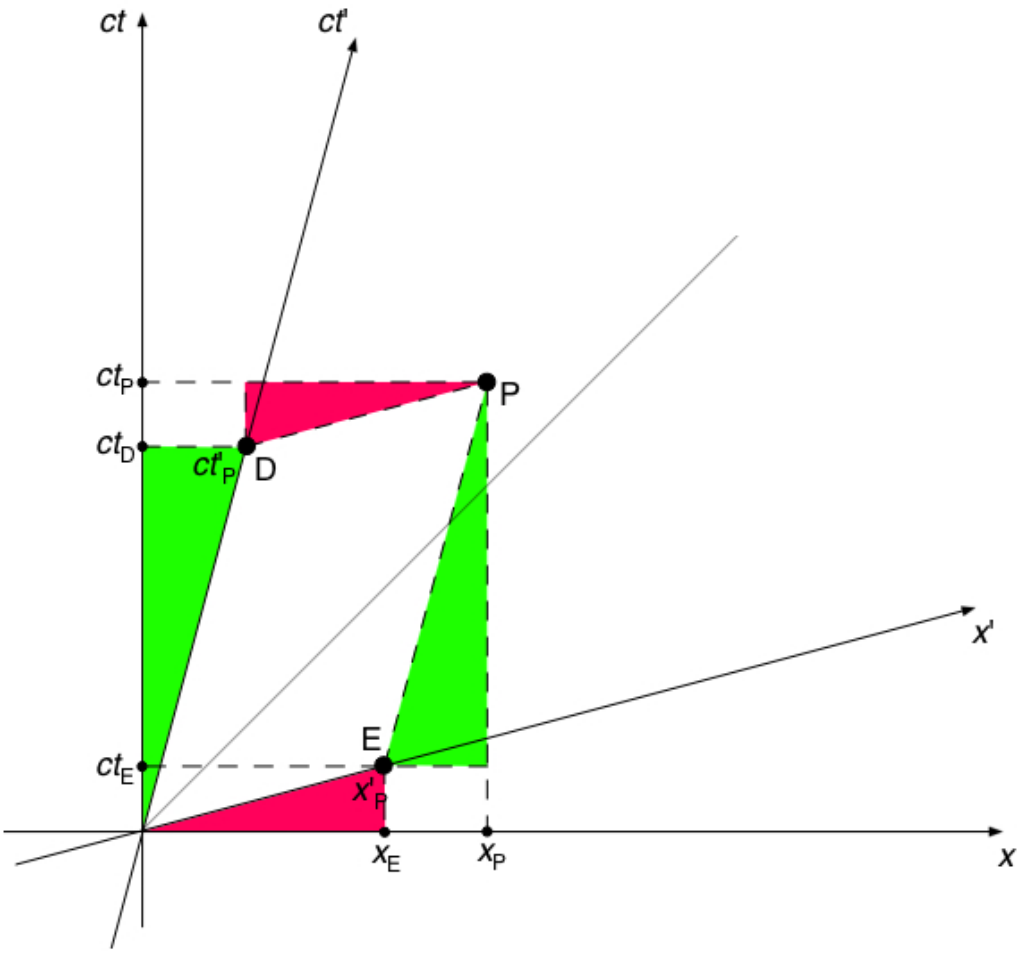
$$x_P = \frac{x'_P + vt'_P}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{(IL1)}$$

Hasonlóan:

$$ct_P = ct_D + ct_E = \left\langle \frac{ct_E}{x_E} = \frac{v}{c} \right\rangle = ct_D + \frac{v}{c}x_E = c\frac{t'_P}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{v}{c}\frac{x'_P}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Azaz a t-re vonatkozó (inverz) Lorentz-transzformációs formula:

$$t_P = \frac{t'_P + \frac{v}{c^2}x'_P}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{(IL2)}$$



17. ábra

18. ábra: Két esemény közötti téridő-intervallum.

Az események közötti „téridőbeli elmozdulás“ vektora

- a K vonatkoztatási rendszerben: (dx, dy, dz, cdt)

- a K′ vonatkoztatási rendszerben: (dx', dy', dz', cdt')

Az egyes koordinátadifferenciálok értékében K és K′ nem ért egyet (pl. $dx \neq dx'$), erről is szól a Lorentz-transzformáció.

Viszont:

$$c^2 dt'^2 - dx'^2 = c^2 \frac{dt^2 - \frac{2v}{c^2} dxdt + \frac{v^2}{c^4} dx^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{dx^2 - 2vdxdt + v^2 dt^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c^2 dt^2 - dx^2$$

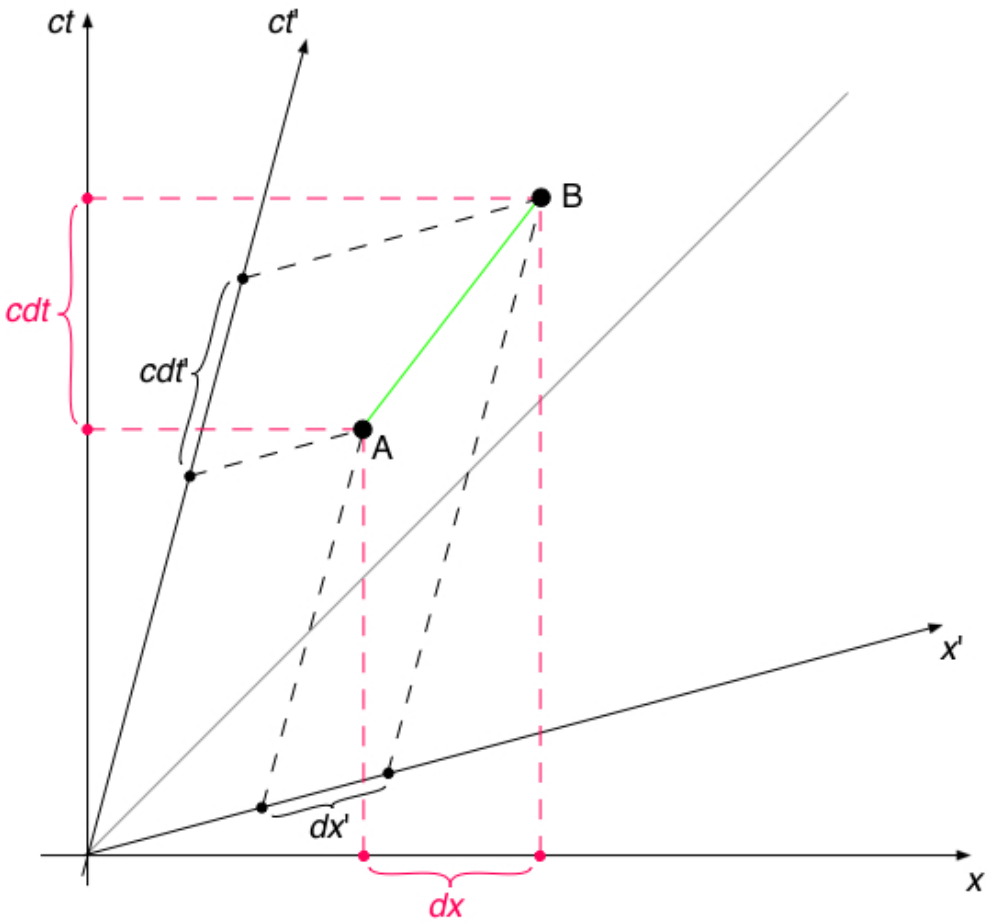
Azaz a

$$c^2 d\tau^2 \equiv c^2 dt^2 - dx^2$$

mennyiség *invariáns*.

Ez a „téridőbeli távolság“ két esemény között.

$d\tau$ jelentése: **SAJÁTIDŐ** (olyan (x'', ct'') rendszerben mért időtartam, amelyben A és B *azonos helyen* zajlik).



18. ábra

19. ábra: Két esemény közötti téridő-intervallum 2.

Láttuk: $c^2dt^2 - dx^2 = c^2dt'^2 - dx'^2 = c^2dt''^2 - dx''^2 = ... =$ invariáns

A 18. ábra A és B eseménye között a fenti négyzetkülönbség *pozitív* $\Rightarrow$ definiálható egy $d\tau$ *sajátidő* A és B között.

Az A és B közötti téridő-intervallum: *"időszerű intervallum"*.

.....

A és D között:

$$c^2dt^2 - dx^2\left(= c^2dt'^2 - dx'^2\right) = 0$$

Az A és D közötti téridő-intervallum: *"fényszerű intervallum"*.

.....

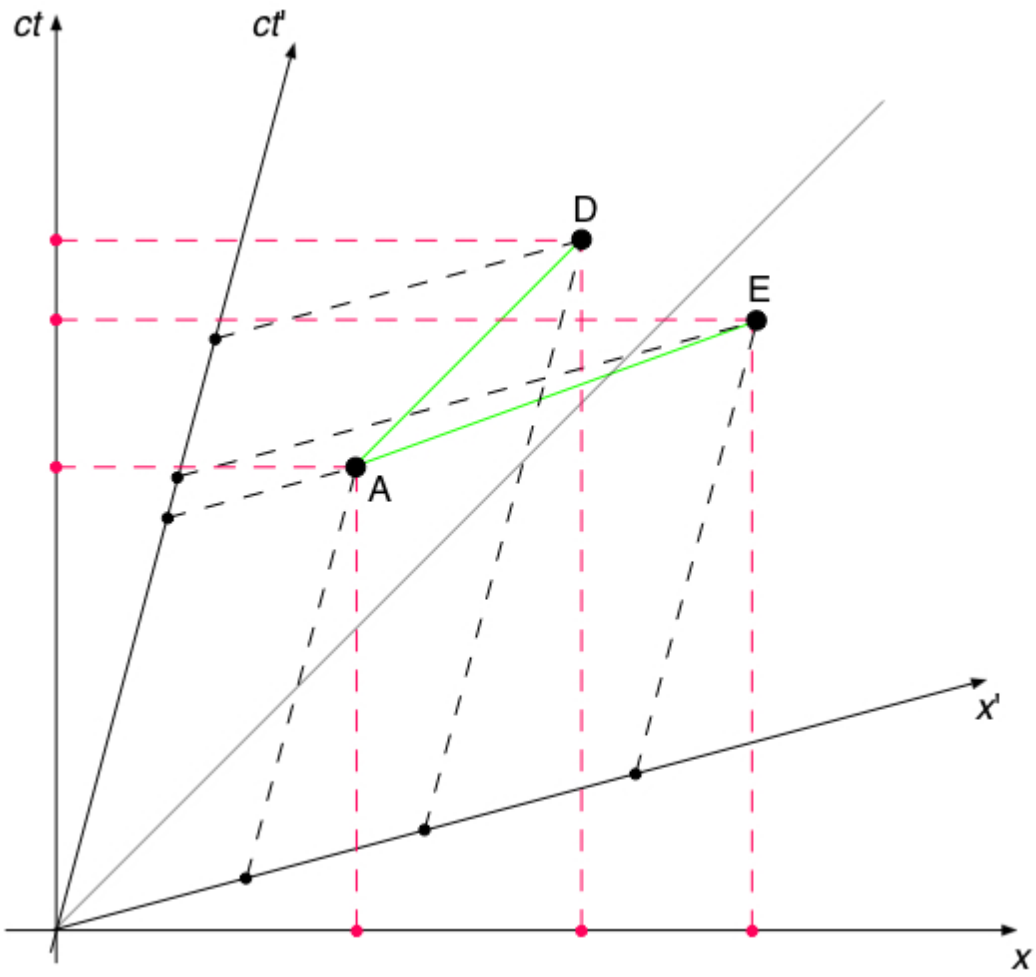
A és E között:

$$c^2dt^2 - dx^2\left(= c^2dt'^2 - dx'^2\right) < 0$$

Az A és E közötti téridő-intervallum: *"térszerű intervallum"*.

Ilyenkor: $ds^2 \equiv dx^2 - c^2dt^2$

ds jelentése: **SAJÁTHOSSZ** (olyan (x'',ct'') rendszerben mért távolság az A és E események helye között, amelyben A és E *egy időpontban* zajlik).



19. ábra

20. ábra: Vissza Newtonhoz; dinamika.

Két tömegpont rugalmatlanul összeütközik. Pont olyan az impulzusuk, hogy ütközés után az összetapadt test nyugalomban van a K vonatkoztatási rendszerben.

A: az ütközési esemény.

K′, K″, K: az ütközés pillanatában (ill. közvetlenül előtte és utána) az első, a második és az összetapadt test pillanatnyi nyugalmi rendszere. (pl. $\Delta x'_1 = 0$, $\Delta x''_2 = 0$)

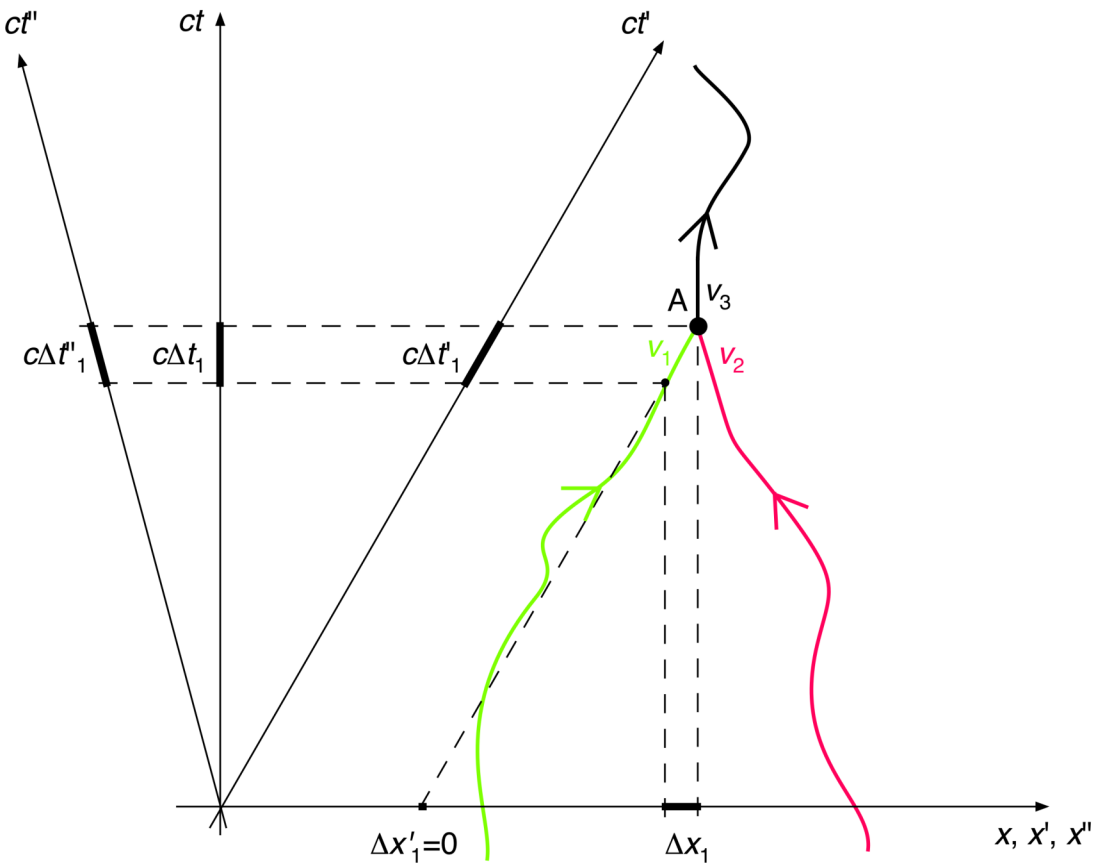
Newton $\Rightarrow$ nincs időtágulás $\Rightarrow$ a tengelyek kalibrálása olyan, hogy $\Delta t_1 = \Delta t'_1 = \Delta t''_1$ (ld. ábra).

Pl. az 1. tömegpont mozgása közvetlenül ütközés előtt:

$$v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \qquad \left(v'_1 = \frac{\Delta x'_1}{\Delta t'_1} = 0 \right)$$

Ugyanígy értelmezendő (de az ábrán nem szerepel)
$\Delta x_2, c\Delta t_2, c\Delta t'_2, c\Delta t''_2$,
$\Delta x_3, c\Delta t_3, c\Delta t'_3, c\Delta t''_3$.

Az A esemény környezetében a 3 világvonallal kapcsolatban ábrázoljunk 3 olyan vektort, amelyekre a vízszintes (azaz x-) vetület $\Delta x_i \dfrac{m_i}{\Delta t_i}$, a „függőleges“ (azaz t-) vetület pedig $c\Delta t_i \dfrac{m_i}{\Delta t_i}$! [Mindegy, hogy az $\dfrac{m_i}{\Delta t_i}$ szorzófaktorban a Δt_i vesszős-e vagy vesszőtlen, mert azok egyenlők.]



20. ábra

21. ábra: Vissza Newtonhoz; dinamika 2.

A kapott 3 új vektor párhuzamos lesz a 20. ábra 3 világvonalával (ez a konstrukcióból adódik).

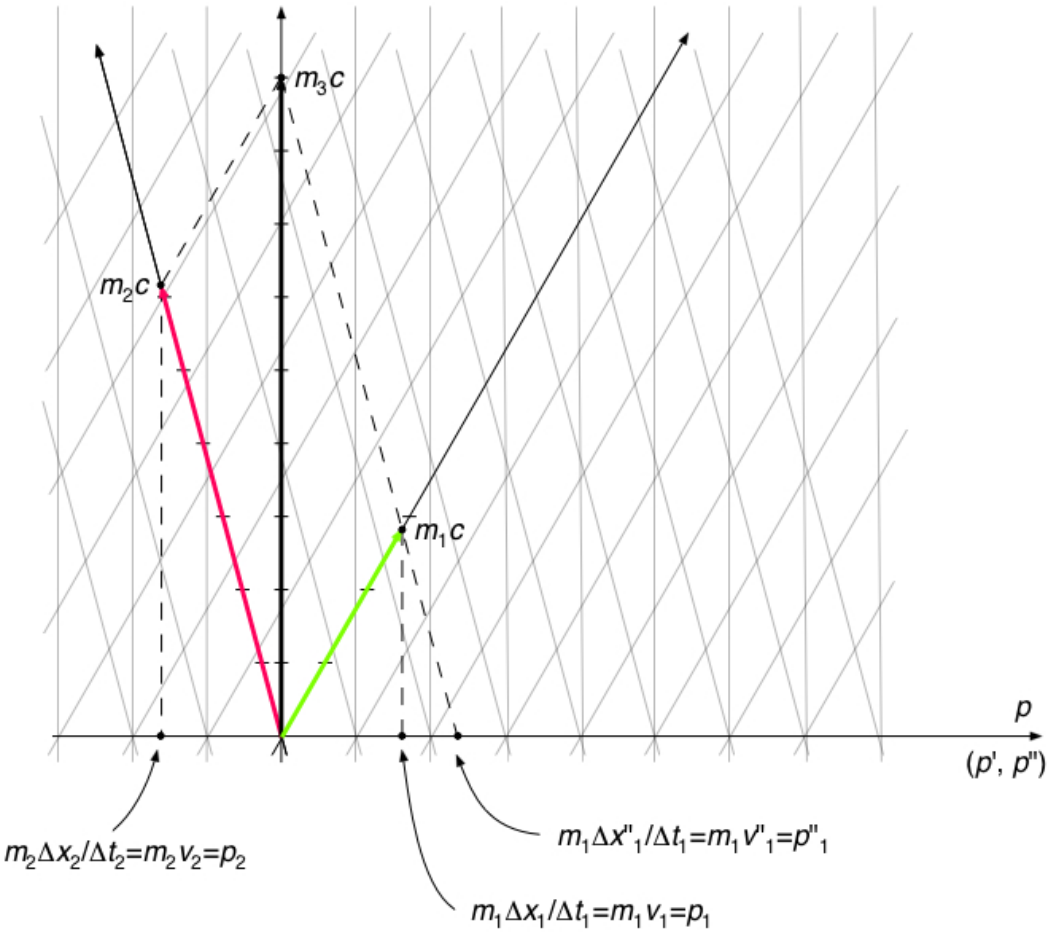
Ráadásul a 3 új vektor (amelyek tehát a *ct*-, *ct*′-, ill. *ct*″-tengelyek irányába mutatnak) hosszai m_1c, m_2c és m_3c [pontosabban: az 1. vektor a *ct*′-irányú tengely m_1c osztású pontjában végződik, a 2. vektor a *ct*″-irányú tengely m_2c osztású pontjában, a 3. vektor pedig a *ct*-irányú tengely m_3c osztású pontjában].

A vízszintes tengelyre – mint látható – *p*-t kell írnunk, mert a vektorok vízszintes vetülete a K-ban mért impulzus. [Illetve a vízszintes tengelyre eső „ferde“ vetületek adják meg a K′-ben, K″-ben mért impulzusokat. Ezek közül p''_1-et mutatja is az ábra.]

Newtoni mechanika, rugalmatlan ütközés $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (1) impulzusmegmaradás $\left(p_1 + p_2 = p_3\right)$

(2) tömegmegmaradás $\left(m_1 + m_2 = m_3\right)$


m_3c
m_2c
m_1c
p
(p', p'')
$m_2\Delta x_2/\Delta t_2=m_2v_2=p_2$
$m_1\Delta x''_1/\Delta t_1=m_1v''_1=p''_1$
$m_1\Delta x_1/\Delta t_1=m_1v_1=p_1$

21. ábra

22. ábra: Vissza Newtonhoz; dinamika 3.

A 21. ábrán ez azt jelenti, hogy

(1) imp. megm. $\Rightarrow$ (a **zöld vektor** vízszintes komponense) +
(a **piros vektor** vískszintes komponense) =
(a **fekete vektor** vízszintes komponense)

(2) tömegmegm. $\Rightarrow$ (a **zöld vektor** t'-irányú „hossza“ [azaz a függőleges komponense is]) +
(a **piros vektor** t''-irányú „hossza“ [azaz a függőleges komponense is]) =
(a **fekete vektor** t-irányú „hossza“ [azaz a függőleges komponense is])

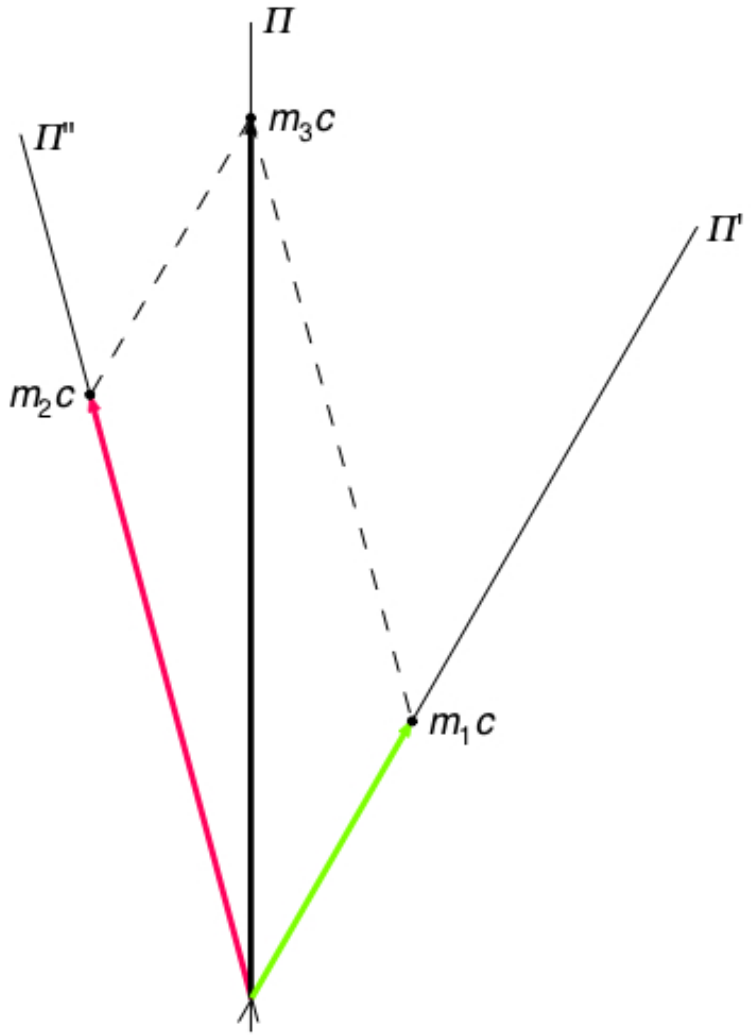
Ebből az következik, hogy a 21. ábrán magukra a vektorokra is igaz, hogy

a zöld vektor + **a piros vektor** = **a fekete vektor**

Kérdések:

1. Mit írjunk Π, Π', Π'' helyébe? Milyen *fizikai mennyiség* szerepel azokon a tengelyeken? (Első gondolat: *a tömeg*. De valóban az lesz-e a helyes?)

2. Az egész kiindulásunk (ld. 20. ábra) newtoni, tehát *hibás*! Milyenek lesznek a helyes ábrák és a helyes összefüggések (amelyek $v_1, v_2, v_3 << c$-re visszaadják a newtoni ábrákat, képleteket)?



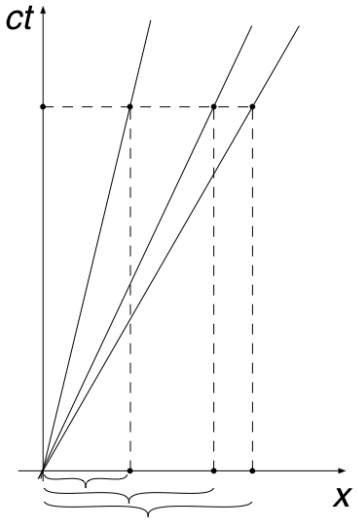
22. ábra

23. ábra: A rugalmatlan ütközés relativisztikus (helyes) tárgyalása.

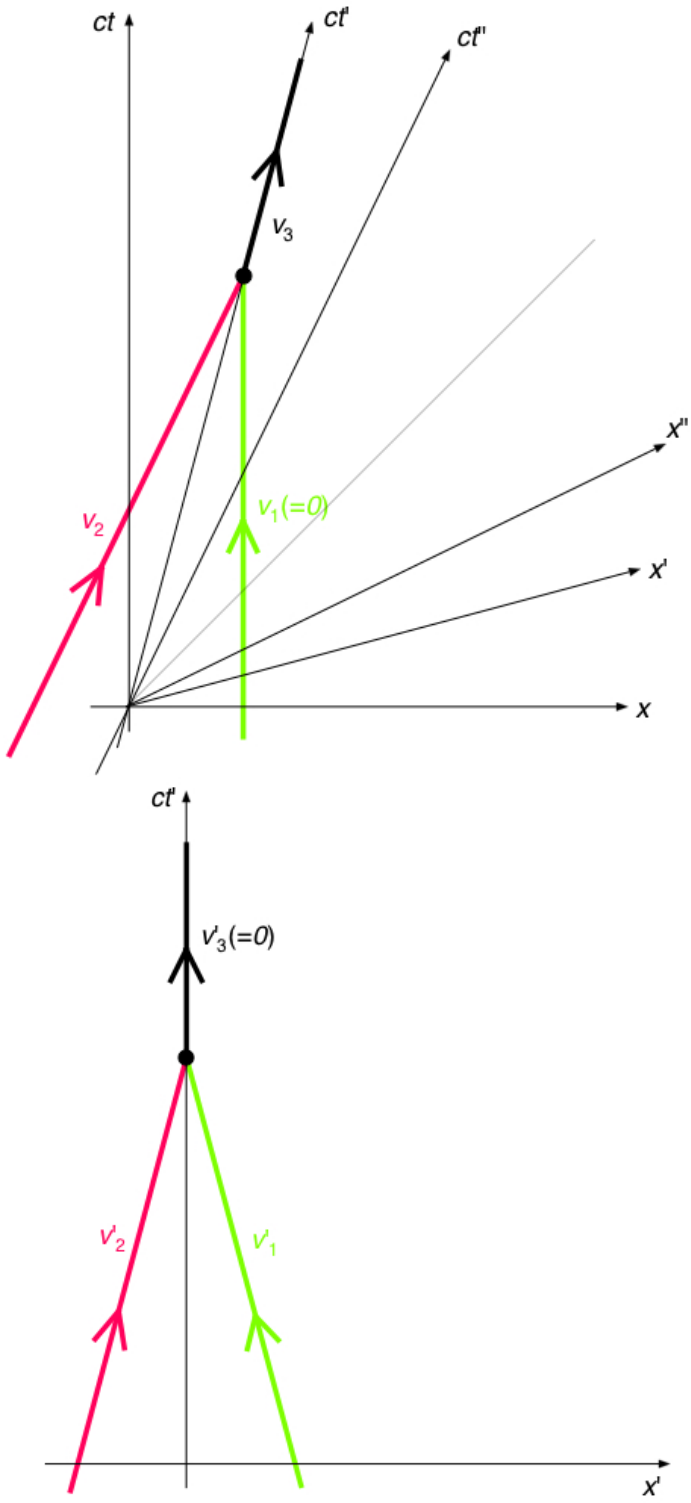
Az egyszerűség kedvéért két *azonos*, *m* tömegű test ütközését vizsgáljuk.

K: az a vonatkoztatási rendszer, amelyben az 1. test áll az ütközés előtt (ld. felső ábra).
K′: az a vonatkoztatási rendszer, amelyben az ütközés szimmetrikus, $v'_1 = -v'_2$. Ez tehát az összetapadt test nyugalmi rendszere (ld. alsó ábra).
K″: az a vonatkoztatási rendszer, amelyben a 2. test áll az ütközés előtt (ld. felső ábra).

Egy adott vonatkoztatási rendszerben:



Különböző világvonalakat nézve, ha Δt ugyanaz, akkor a Δx-ek (az *x*-vetületek) az adott világvonalú test *sebességével* arányosak.



23. ábra

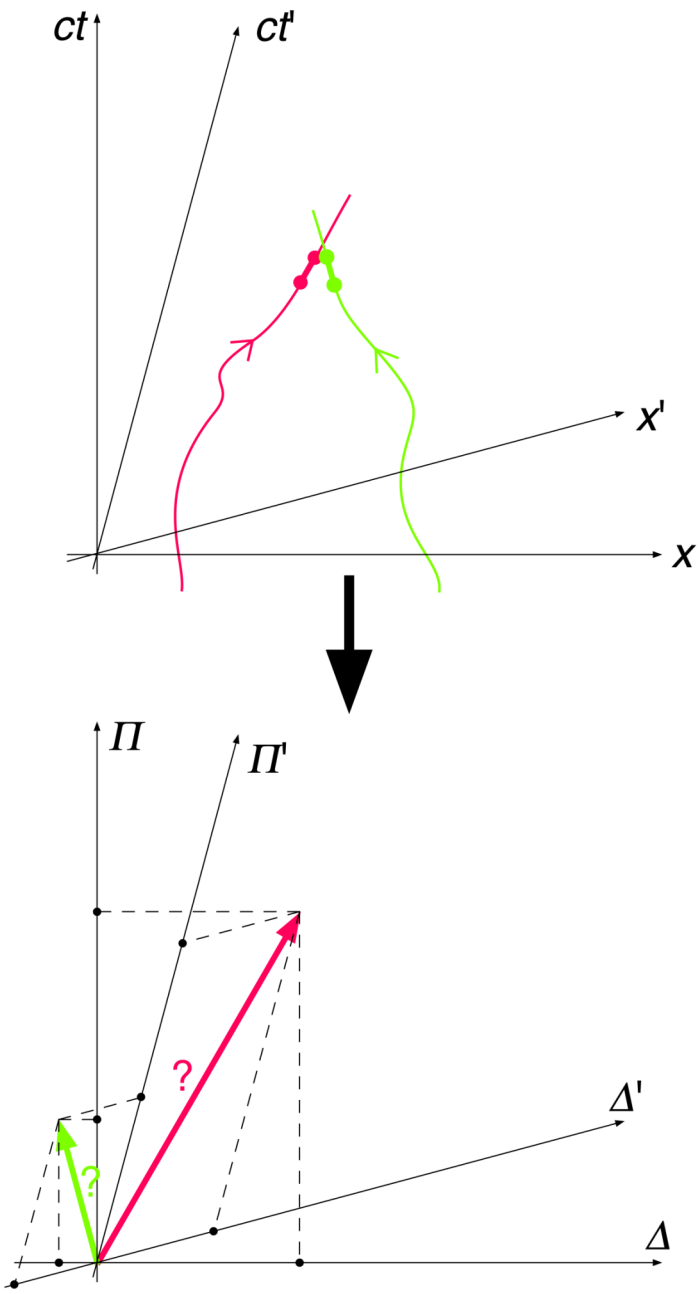
24. ábra: Impulzus.

Motiváció: definiálni akarjuk az „impulzus“ nevű mennyiséget úgy, hogy az *megmaradó* mennyiség legyen *minden inerciarendszerben*.

Kérdés: ha az impulzust (a newtoni tárgyalás mintája alapján) az x-, x'-, x''-tengelyekre eső vetülettel akarjuk ábrázolni, akkor *milyen mértékben kell megnyújtani* egy adott négyeselmozdulás-vektort, hogy olyan vektorokat kapjunk, amelyekre az x-, x'-, x''-tengelyekre eső vetületek kielégítik a megmaradási törvényt?

Másik kérdés: az így kapott ábrán mik lesznek a tengelyeken szereplő mennyiségek? ($\Delta = p$, $\Delta' = p'$, stb., ezt tudjuk, hiszen az impulzust így definiáltuk, de $\Pi = ?$, $\Pi' = ?$, stb.)

Megjegyzés: Mivel egy-egy adott $(c\Delta t, \Delta x)$ elmozdulásvektort csak valami konstanssal megnyújtunk, az biztos, hogy az új Π-, Π'-tengelyek is úgy lesznek *kalibrálva*, mint a ct-, ct'-tengelyek. Ugyanez igaz Δ és Δ', valamint x és x' viszonyára is.
$\Rightarrow$ (Π, Δ) és (Π', Δ') között is a *Lorentz-transzformáció* teremt kapcsolatot!



24. ábra

25. ábra: A szorzófaktor 1.

Elemi geometriából következik, hogy ha azt akarjuk, hogy a Δ-vetületekre *minden vonatkoztatási rendszerben* teljesüljön az „összeadódási“ (megmaradási) törvény:

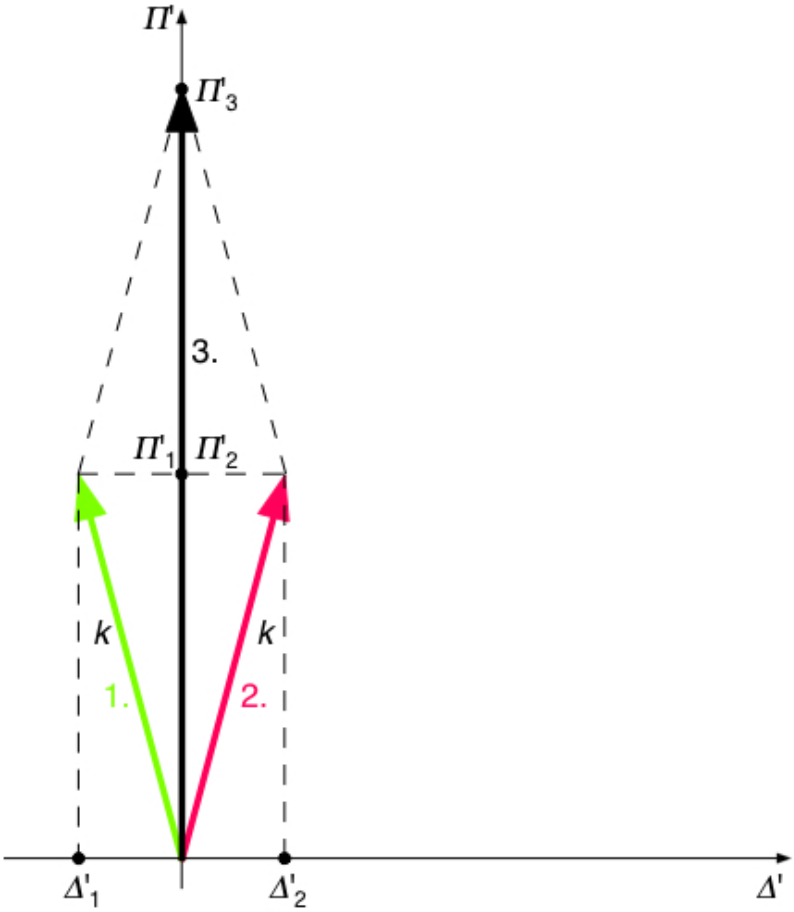
$$\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta_3,$$
$$\Delta'_1 + \Delta'_2 = \Delta'_3,$$
$$\Delta''_1 + \Delta''_2 = \Delta''_3,$$
...,

akkor *magukra a vektorokra* is kell hogy teljesüljön!

Tehát a kérdés: az adott négyeselmozdulás irányába eső vektorokra milyen szorzófaktort kell alkalmazni, hogy a *vektorösszeadás* teljesüljön?

A K′-beli nézőpontból az ütközés szimmetrikus, és az 1. és 2. test teljesen azonosak $\Rightarrow$ az 1. és 2. vektor „hossza“ meg kell hogy egyezzen (ahogy a 25. ábra mutatja).

A vektorok „hosszát“ k-val jelölöm. Ez a „hossz“ arról a Π'' vagy Π tengelyről olvasható le, amelynek az irányában az adott vektor áll.



25. ábra

26. ábra: A szorzófaktor 2.

Más érvelés: K″-ben a 2. test áll $\Rightarrow$ amekkora az 1. vektor „hossza“ K-ban, mindenképpen akkor a 2. vektor „hossza“ K″-ben. Ezért *ugyanahhoz a k osztású ponthoz* van rajzolva a két vektor a Π- ill. Π''-tengelyen.

$$\Pi_1 = k$$
$$\Pi''_2 = k$$

Lorentz-transzformáció:

$$\Delta_2 = \frac{\Delta''_2 + \frac{v_2}{c}\Pi''_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{\frac{v_2}{c}k}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}$$

Azt akarjuk, hogy a Δ mennyiség az impulzus legyen $\Rightarrow$ k fizikai jelentése ebből kapható meg.

Ugyanis:
A newtoni határesetben a newtoni impulzus-képletet kell visszakapnunk:

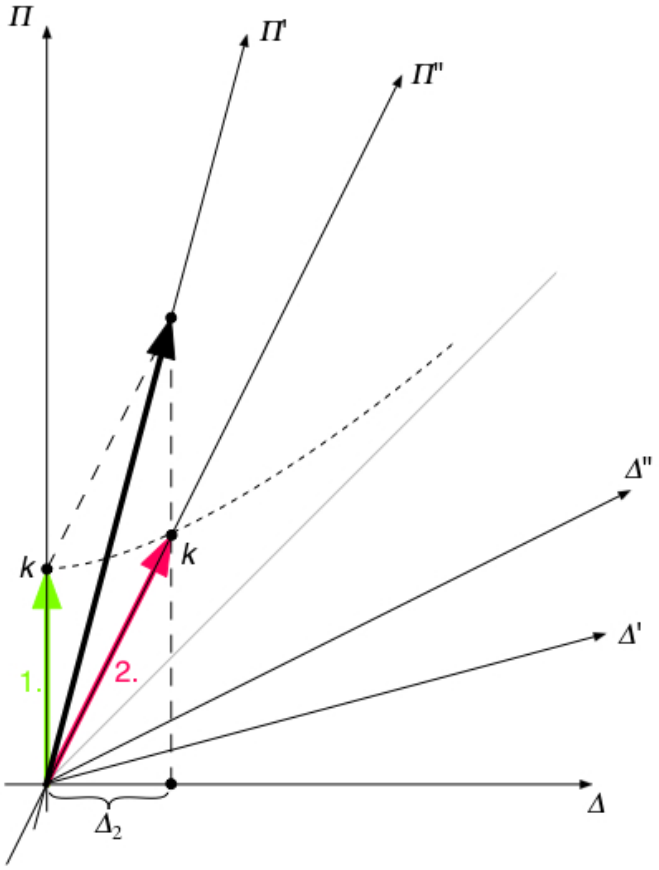
Ha $v_2 << c$, akkor $\Delta_2 = m_2 v_2$

Azaz: $\dfrac{k\frac{v_2}{c}}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} \approx k\frac{v_2}{c} = m_2 v_2$

Ebből kiadódik k értéke:

$$k = m_2 c$$

Azaz a keresett szorzófaktor: az adott test *tömege* szorozva a fénysebességgel.



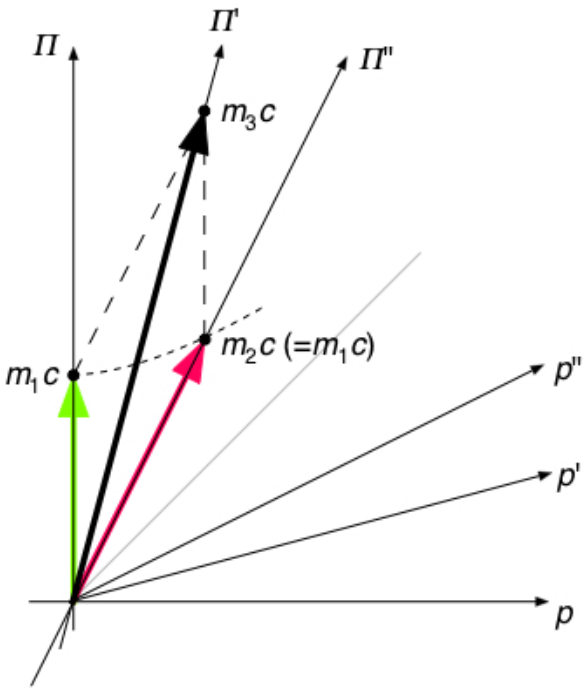
26. ábra

27. ábra: Az impulzus relativisztikus képlete.

Tehát: minden testnél a pillanatnyi nyugalmi vonatkoztatási rendszer (1. test: K, 2. test: K″, 3. test: K′) *Π*-tengelyének azon osztásánál van a vektor csúcsa, amely a test *tömegét* adja meg.

Az impulzus új, relativisztikus definíciója ezek után – abból a követelményből, hogy a *Δ* (*Δ*′, *Δ*″, stb.) az adott rendszerben mért impulzus legyen – a Lorentz-transzformációból számítható (K′-ben nyugvó test impulzusa K-ban):

$$p = \frac{p' + \frac{v}{c}\Pi'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{0 + \frac{v}{c}mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}v$$



27. ábra

28. ábra: Energia.

Kérdés: És mi a Π (Π', Π'', stb.) mennyiség fizikai tartalma?

A tengelyek kalibrálásáról tudottakat (vagy a Lorentz-transzformációt) alkalmazva:

$$\Pi = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ez milyen mennyiség lehet? Valami olyan, amelyet K (amelyben a test mozog) *nagyobbnak mér*, mint K_{nyug} (amelyben a test nem mozog). Amennyivel nagyobbnak méri:

$$\Pi - \Pi_{nyug} = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc.$$

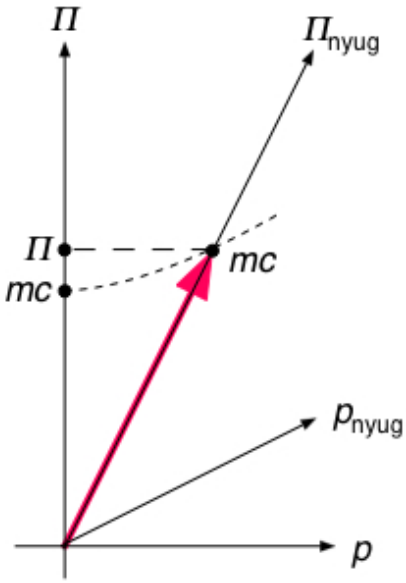
A newtoni határeset segít rájönni ezek után Π jelentésére:

Ha $v << c$: $\Pi - \Pi_{nyug} \approx mc\left[\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right)-1\right] = \frac{1}{2}m\frac{v^2}{c}$.

Ez a *mozgási energia*! (osztva c-vel)

$\Rightarrow$ Muszáj arra következtetnünk, hogy Π: a test energiája (osztva c-vel)

$$\Rightarrow \quad \Pi = \frac{E}{c} = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$



28. ábra

29. ábra: Energia-impulzus négyesvektor.

Összefoglalva:

Tömegpont impulzusa: $$p = \frac{mu}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad (1)$$

Tömegpont energiája: $$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad (2)$$

(1)-ből és (2)-ből a test sebességét kiküszöbölve E és p között az alábbi összefüggés adódik:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = (mc)^2 \qquad (3)$$

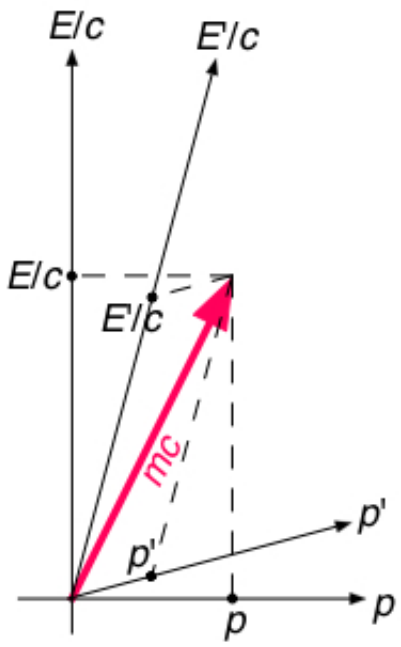
Anyagi pontra tehát $\frac{E}{c} > p$ (ld. ábra), összefüggésben azzal, hogy az eredeti világvonal – amelyből az (E,p) négyesvektor megszerkesztéséhez kiindultunk – *időszerű* volt.

Logikus általánosítás, hogy *fényre* is megszerkeszthetünk – a fény 45°-os világvonalából kiindulva – ilyen energia-impulzus négyesvektort, amely 45°-ban dől az ábrán.

$\Rightarrow$ fényre: $\frac{E}{c} = p$

Fényre az (1) és (2) képletek pedig nem alkalmazhatók (mert $u = c$), a (3) képlet viszont igen (mert az (1) és (2) szingularitásait kiküszöböltük belőle). Ebből a foton tömegére zérus adódik:

fényre: $m = 0$.



29. ábra

30. ábra: Megmarad-e a tömeg?

Megmarad-e a *tömeg* rugalmatlan ütközéskor?

Visszatérünk a 23. ábrán látható rugalmatlan ütközéshez. A 30. ábrából azonnal látszik: *a tömeg nem marad meg*!

$M > 2m$ (mert, mint az ábrán látszik, $\frac{M}{2} > m$)

Részletek:

A kalibrációról tudottak alapján (vagy a Lorentz-transzformációból) adódik:

$$\frac{E'_1}{c} = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ (v: az 1. test sebessége K′-ben)

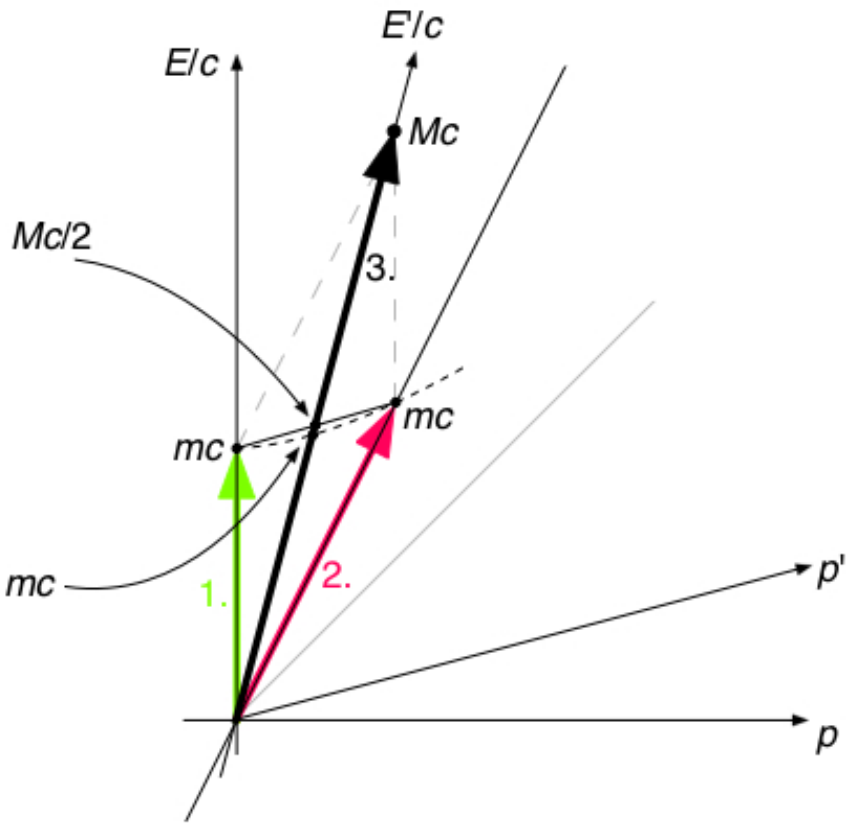
$$\frac{E'_2}{c} = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ (a 2. test sebessége is v a K′-ben)

A 3. testre tehát egyrészt: $$\frac{E'_3}{c} = \frac{2mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (1)$$

Másrészt: $$\frac{E'_3}{c} = Mc \qquad (2)$$

(1), (2) $\Rightarrow$ $M = \frac{2m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ Ütközéskor tehát a tömeg nem marad meg.

Viszont (és ez közvetlenül a vektorösszeadás tényéből következik): az *energiára* (a vektorok Π-vetületére) *minden inerciarendszerben teljesül a megmaradás*!



30. ábra

31. ábra: A tömeg invarianciája.

Tekintsünk egy tömegpontot, amely (cdt, dx) négyeselmozdulást végez két közeli esemény között.

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m\frac{dx}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m\frac{dx}{d\tau},$$

ahol $d\tau$ a sajátidő, és az időtágulási képletet alkalmaztuk.

Másfelől:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2\frac{dt}{d\tau}$$ (ismét az időtágulási képletet alkalmazva)

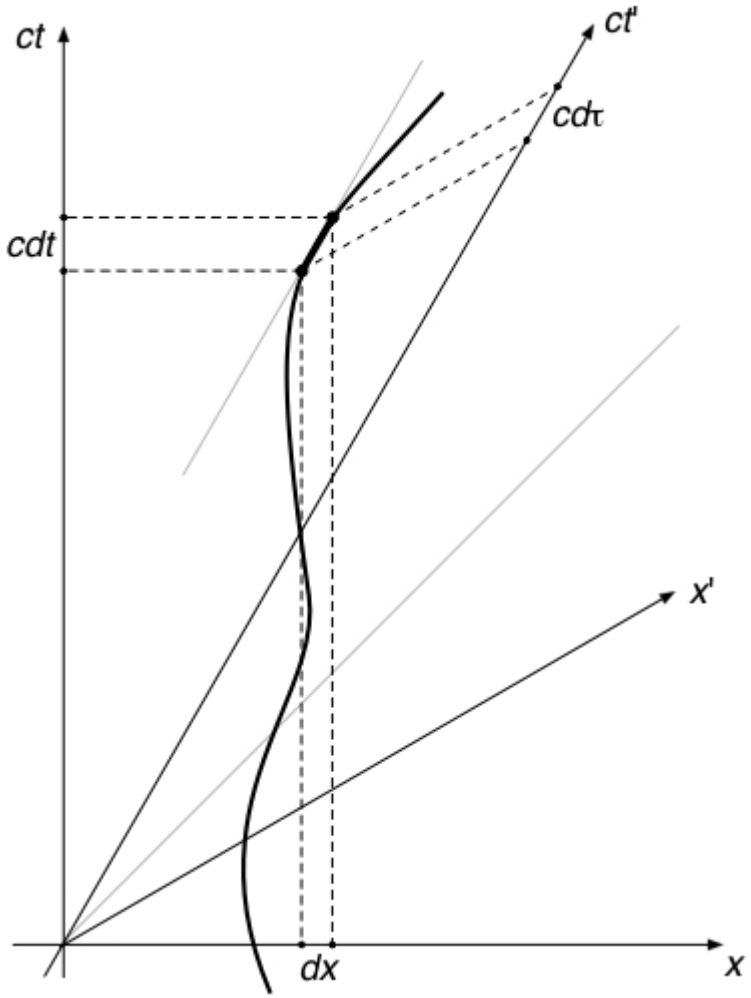
A téridőintervallum invarianciája (ld. 18. ábra):

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 = \text{invariáns}$$

Szorozzuk meg az egyenletet az $\frac{m^2}{d\tau^2}$ (szintén invariáns!) számmal. A következő adódik:

$$(mc)^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = \left(\frac{E'}{c}\right)^2 - p'^2 = \text{invariáns.}$$

Különböző megfigyelők másnak mérik a test impulzusát és energiáját, de a *tömeget* ugyanakkorának állapítják meg.



31. ábra