Bevezetés a modern fizika fejezeteibe

1.

Rugalmas hullámok

Utolsó módosítás: 2015. szeptember 28.

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A deformálható testek mozgása (1)

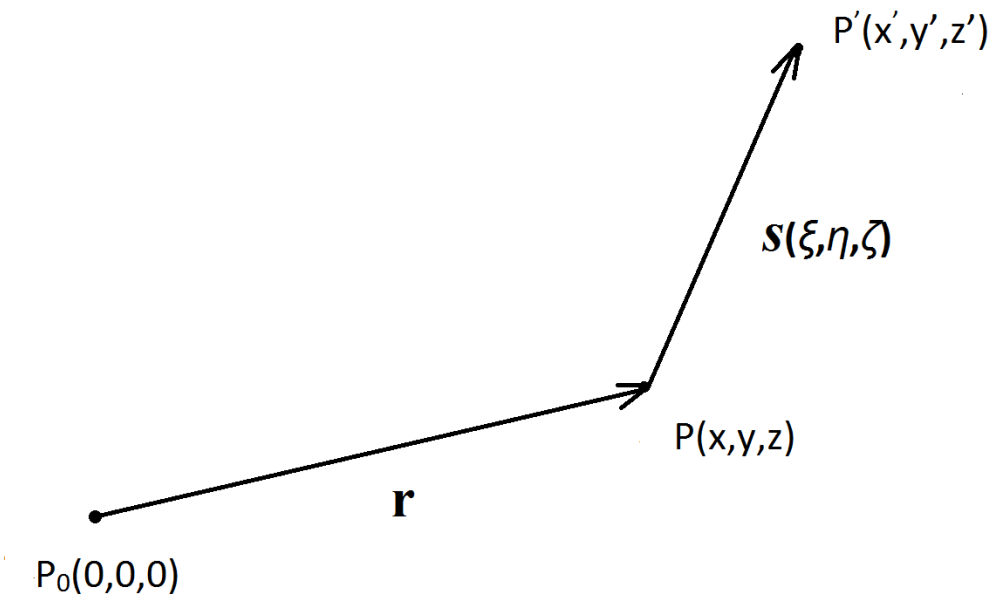
A Helmholtz-féle kinematikai alaptétel:

A deformálható test elegendően kicsiny térfogatának általános helyzetváltozása összetehető egy haladó mozgásból (transzlációból), egy forgásból (rotációból) és három egymásra merőleges irányban való megnyúlásból ill. összehúzódásból (dilatációból ill. kontrakcióból).

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A deformálható testek mozgása (2)

A rugalmas közeg kiszemelt $P_0(0,0,0)$ pontja kis környezetének **r** helyvektorú P(x,y,z) pontja végezze az $\boldsymbol{s}=(\xi,\eta,\zeta)$ elmozdulást.



Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A deformálható testek mozgása (3)

A P_0 pont környezetében az elmozdulás vektor komponenseit Taylor-sorba fejthetjük:

$$\xi = \xi_0 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)_0 z$$

$$\eta = \eta_0 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)_0 z$$

$$\zeta = \zeta_0 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)_0 z$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A deformálható testek mozgása (4)

Az első sorban a – $\pm\frac{1}{2}\frac{\partial\eta}{\partial x}y$ és $\pm\frac{1}{2}\frac{\partial\zeta}{\partial x}z$ –,

a másodikban a – $\pm\frac{1}{2}\frac{\partial\xi}{\partial y}x$ és $\pm\frac{1}{2}\frac{\partial\zeta}{\partial y}z$ –,

a harmadikban – $\pm\frac{1}{2}\frac{\partial\xi}{\partial z}x$ és $\pm\frac{1}{2}\frac{\partial\eta}{\partial z}y$ –

zérusösszegű kifejezéspárok bővítésével, valamint a zárójelek lábánál lévő $_0$ index elhagyásával:

A deformálható testek mozgása (5)

$$\xi = \xi_0 + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) z\right] + \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) z\right]$$

$$\eta = \eta_0 + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) z\right] + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) x + \frac{\partial \eta}{\partial y} y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) z\right]$$

$$\zeta = \zeta_0 + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right) y\right] + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\right) y + \frac{\partial \zeta}{\partial z} z\right]$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A deformálható testek mozgása (6)

Az elmozdulás három összetevőre bontható. Az

$$s_{transz} = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$$

értékek a transzlációs (haladó) mozgás x, y és z komponensei. A fenti egyenletekben álló első szögletes zárójelbeli kifejezéseken megjelenő

$$\delta\varphi_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\right), \quad \delta\varphi_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right), \quad \delta\varphi_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\right)$$

a szögelfordulásokat adják meg.

A deformálható testek mozgása (7)

Zárt alakban

$$\delta\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2} rot\, \boldsymbol{s}$$

A vektorszorzás használatával ellenőrizhető, hogy a formulák első zárójeles kifejezései az rotációval kapcsolatosak:

$$\boldsymbol{s}_{rot} = [\delta\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{r}] = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}$$

Ha ezt az elmozdulást elosztjuk a hozzá tartozó rövid δt időtartammal, akkor a kinematikából ismert

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

sebesség kifejezésre jutunk.

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A deformálható testek mozgása (8)

A második szögletes zárójelben álló kifejezések a teljes elmozdulás deformációból származtatható részei:

$$\xi_{def} = \varepsilon_{xx}x + \varepsilon_{xy}y + \varepsilon_{xz}z$$

$$\eta_{def} = \varepsilon_{yx}x + \varepsilon_{yy}y + \varepsilon_{yz}z$$

$$\zeta_{def} = \varepsilon_{zx}x + \varepsilon_{zy}y + \varepsilon_{zz}z$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A deformálható testek mozgása (9)

Az itt bevezetett mennyiségek:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}; \qquad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial \eta}{\partial y}; \qquad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial \zeta}{\partial z}; \qquad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)$$

A deformálható testek mozgása (10)

A mennyiségekből képezhető a deformációs tenzor (nyúlási vagy dilatációs tenzor), amely mindig szimmetrikus:

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Ezzel a deformációhoz tartozó elmozdulás

$$\boldsymbol{s}_{deform} = \hat{E}\boldsymbol{r}$$

Ezzel a Helmholtz-tételt bebizonyítottuk.

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A kontinuumok mozgásegyenlete (1)

A kontinuumok mozgásegyenletének leszármaztatásához Newton II. axiómáját terjesztjük ki. Az így kapott egyenletet a kontinuumok Cauchy-féle mozgásegyenletének nevezik. Integrális alakja:

$$\int_V \varrho \boldsymbol{a} dV = \int_A \hat{T}\, d\boldsymbol{A} + \int_V \varrho \boldsymbol{f} dV$$

Itt $\boldsymbol{a}$ a gyorsulás, $\hat{T}$ a felületi erőkhöz tartozó (szimmetrikus) feszültségtenzor

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{f}$ a tömegegységre ható (fajlagos) erő a térfogati erő

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A kontinuumok mozgásegyenlete (2)

A felületi integrált a Gauss-tétel értelmében térfogati integrállá alakítva, majd az integrálást „elhagyva” a mozgásegyenlet differenciális alakjához jutunk

$$\varrho \boldsymbol{a} = div\hat{T} + \varrho \boldsymbol{f}$$

Ez az egyenlet formálisan leírja minden kontinuum általános mozgását, de a konkrét feladatok megoldásához meg kell mondani, hogy mi a kapcsolat az $\hat{E}$ deformációtenzor és a $\hat{T}$ feszültégtenzor között, azaz mi a kapcsolat az elmozdulás és az erőhatás között? Ez lényegében a konstitutív (anyag-)egyenlet megkeresését jelenti.

A deformáció és feszültség kapcsolata (1)

Ha homogén izotróp testek vizsgálatára szorítkozunk (és most itt főleg az izotrópia a lényeges), akkor főtengelyrendszerben a feszültségek és elmozdulások kapcsolatai az alábbi módon fogalmazhatók meg:

$$\sigma_x = a\varepsilon_x + b\varepsilon_y + c\varepsilon_z$$

$$\sigma_y = a\varepsilon_y + b\varepsilon_z + c\varepsilon_x$$

$$\sigma_z = a\varepsilon_z + b\varepsilon_x + c\varepsilon_y$$

Itt az a, b és c paraméterek kapcsolják össze a különböző fizikai mennyiségeket.

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A deformáció és feszültség kapcsolata (2)

Az izotrópia miatt b=c (az első index-szel szemben a másik kettő egyenrangú), így pl.

$$\sigma_x = (a-b)\varepsilon_x + b(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

Az a és b együtthatók helyett szokás a

$$2\mu = a - b \qquad\qquad \lambda_L = b$$

jelöléseket használni. Az így bevezetett állandók közös összefoglaló neve: Lamè-állandók. A három egyenletre összefoglalva:

$$\sigma_i = 2\mu\varepsilon_i + \lambda_L(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (i = x, y, z)$$

A deformáció és feszültség kapcsolata (3)

A főtengelyrendszerről áttérve – kihasználva, hogy a feszültség-tenzor és a deformációtenzor szimmetrikus – kapjuk:

$$\sigma_{xx} = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda_L\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right) = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda_L\theta$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu\varepsilon_{yy} + \lambda_L\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right) = 2\mu\varepsilon_{yy} + \lambda_L\theta$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda_L\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right) = 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda_L\theta$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A deformáció és feszültség kapcsolata (4)

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 2\mu\varepsilon_{xy}\,,\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 2\mu\varepsilon_{yz}\,,\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 2\mu\varepsilon_{xz}$$

Zárt formulában összefoglalva:

$$\hat{T} = 2\mu\hat{E} + \lambda_L\theta$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A rugalmas test mozgásegyenletei (1)

Szilárd testek esetén kis elmozdulásokat feltételezve:

$$\varrho \boldsymbol{a} = \varrho \frac{\partial^2 \boldsymbol{s}}{\partial t^2}$$

A feszültségtenzor komponenseit kifejezzük az elmozdulás vektor komponenseivel:

$$\sigma_{xx} = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda_L\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right)$$
$$= 2\mu\frac{\partial\xi}{\partial x} + \lambda_L\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 2\mu\varepsilon_{xy} = \mu\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 2\mu\varepsilon_{xz} = \mu\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)$$

A rugalmas test mozgásegyenletei (2)

Az x irányú elmozduláshoz tartozó mozgásegyenlet ezt követően úgy írható, hogy

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \varrho f_x$$

Behelyettesítés után:

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mu \Delta \xi + (\mu + \lambda_L) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + \varrho f_x$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A rugalmas test mozgásegyenletei (3)

Hasonlóan számolhatók ki az y és z irányú elmozdulásokhoz tartozó mozgásegyenlet:

$$\varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \mu \Delta \eta + (\mu + \lambda_L) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + \varrho f_y$$

$$\varrho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \mu \Delta \zeta + (\mu + \lambda_L) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + \varrho f_z$$

Itt a rövidítés végett célszerű bevezetni a

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Laplace-operátort.

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A rugalmas test mozgásegyenletei (4)

Az eredményeket egy zárt formulába összefoglalva írhatjuk. Ezt az egyenletet a rugalmas testek mozgásegyenletének nevezik:

$$\varrho \frac{\partial^2 \boldsymbol{s}}{\partial t^2} = \mu \Delta \boldsymbol{s} + (\mu + \lambda_L) grad\ div\ \boldsymbol{s} + \varrho \boldsymbol{f}$$

Gyakorlati okokból célszerűbb a Lamé-állandók helyett a Young-modulus és a Poisson-szám használata:

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda_L)}{\mu + \lambda_L} \qquad \nu_P = \frac{\lambda_L}{2(\lambda_L + \mu)}$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Egy speciális eset

Tételezzük fel, hogy nem hatnak tömegerők (f = 0) és a deformációból eredő jelterjedés x tengely irányú. Ekkor a

$$\frac{\partial}{\partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial z}$$

parciális deriváltak zérusok, így a fenti mozgásegyenletek az alábbi alakokra egyszerűsödnek:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (2\mu + \lambda_L) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \qquad \varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$\varrho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

Milyen mozgást írnak le ezek az egyenletek?

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Síkhullámok végtelen kiterjedésű, szilárd izotróp közegekben (1)

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (2\mu + \lambda_L) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

longitudinális hullám

$$\varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

transzverzális hullám

$$\varrho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

transzverzális hullám

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Síkhullámok végtelen kiterjedésű, szilárd izotróp közegekben (2)

Két új együttható bevezetésével

$$c_1^2 = \frac{2\mu + \lambda_L}{\varrho}$$

$$c_2^2 = \frac{\mu}{\varrho}$$

alakilag egyforma egyenleteket kapunk! →

A hullámegyenlet általános alakja

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

vagy

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

Térbeli problémák esetén:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) = c^2\Delta\psi$$

Laplace-operátor:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A hullámegyenlet általános megoldásai

$$\psi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

vagy

$$\psi(x,t) = f\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

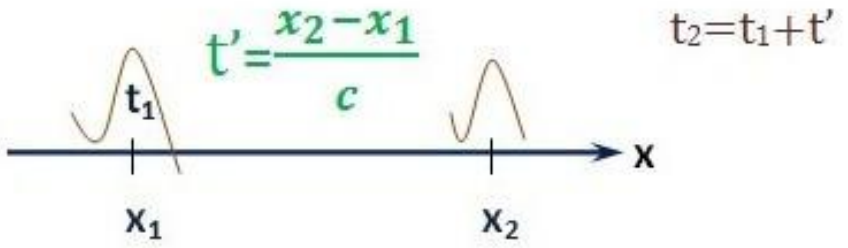
Az f tetszőleges függvény!

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A hullámegyenlet megoldásának fizikai jelentése – síkhullámok (1)

A t_1 időben az x_1 helyen keltett zavarra érvényes:

$$f\left(t_1 - \frac{x_1}{c}\right)$$



Ez a zavar az x_2 helyen

$$t' = \frac{x_2 - x_1}{c}$$

idővel később jelenik meg, azaz a $t_2 = t_1 + t'$ időben.

A hullámegyenlet megoldásának fizikai jelentése – síkhullámok (2)

Az

$$f\left(t_2 - \frac{x_2}{c}\right) = f\left(t_1 + \frac{x_2 - x_1}{c} - \frac{x_2}{c}\right) = f\left(t_1 - \frac{x_1}{c}\right)$$

összefüggés miatt egy „+” (növekvő x) irányban terjedő hullám. Az

$$f\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

megoldás pedig egy „–” (csökkenő x) irányba terjedő hullám.

Harmonikus hullám

A harmonikus vagy szinuszos síkhullám, amely térben és időben egyaránt periodikus:

$$\psi(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \delta\right]$$

A: amplitúdó

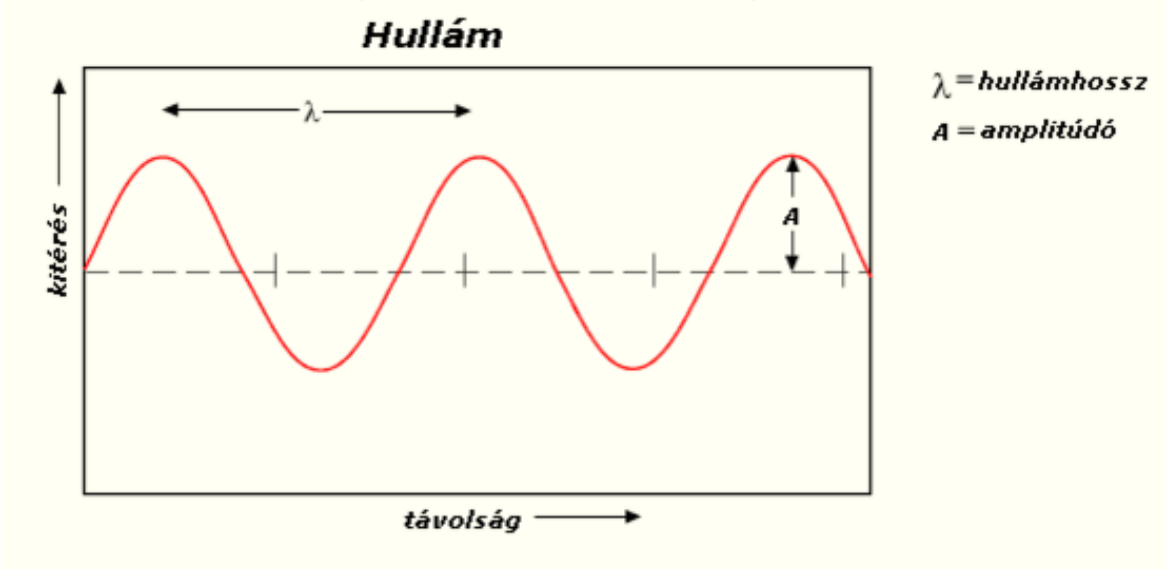
ω : körfrekvencia

c: terjedési sebesség

δ : kezdő fázis

Hullámtani alapfogalmak

Hullámforrás: ahol a rezgés kialakul. A hullámforrás rezgését a környező tér részecskéi átveszik, de késve követik azt → fáziskésés.
A mechanikai hullámokkal energia és impulzus terjed tovább.



fázis: a hullám adott pontjának mozgásállapota (Síkhullámoknál hullámfrontot, térbeli hullámoknál hullámfelületet alkotnak az azonos fázisú pontok.)
hullámhossz (λ): az egymás melletti azonos fázisú pontok távolsága
a hullám terjedési sebessége (c): a rezgés fázisának terjedési sebessége, nem egyezik meg a hullámban mozgó részecskék sebességével a hullámforrás rezgésének periódusideje alatt a hullám egy hullámhossznyi távolságot tesz meg

A hullámtani mennyiségek közötti fontos matematikai összefüggések

c: terjedési sebesség
λ : hullámhossz
T: periódus idő
f vagy ν : frekvencia
ω: körfrekvencia
k: hullámszám

$$\lambda = cT$$

$$f = \nu = \frac{1}{T}$$

$$c = \lambda\nu$$

$$k = \frac{1}{\lambda}$$

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A hullámok terjedési sebessége a mérhető fizikai mennyiségekkel kifejezve

A longitudinális hullám sebessége:

$$c_{long} = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda_L}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\nu_P)}{\rho(1+\nu_P)(1-2\nu_P)}}$$

A transzverzális hullám sebessége:

$$c_{transzv} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu_P)}}$$

Itt a μ és λ_L a két Lamé-állandó, E a Young-modulus, ν_P a Poisson szám!

http://www.vilaglex.hu/Lexikon/Html/Hullam.htm

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Rugalmas hullámok sebessége vasban (1)

sűrűség:

$\rho = 7850\ kg/m^3$

Young-modulus:

$E = 2 \times 10^{11}\ Pa$

Poisson-szám:

$\nu_P = 0{,}29$

longitudinális sebesség:

$c_{long} = 5800\ m/s$

transzverzális sebesség:

$c_{transzv} = 3150\ m/s$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Rugalmas hullámok sebessége vasban (2)

Ha a haránt irányú kontrakció elhanyagolható ($\nu_P = 0$), akkor

$$c_{long} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

A vas esetében:

$$c_{long} = 5050\ m/s$$

Kisebb mint a transzverzális hullámok jelenléte esetén!

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Hullámok térben → gömbhullámok (1)

A Laplace-operátor alakja 3D-ben gömbszimmetrikus esetre szorítkozva:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)$$

Ezzel a hullámegyenlet:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\psi) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)$$

http://www.walter-fendt.de/ph14hu/dopplereff_hu.htm

Hullámok térben → gömbhullámok (2)

Ennek megoldása:

$$\psi(r,t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

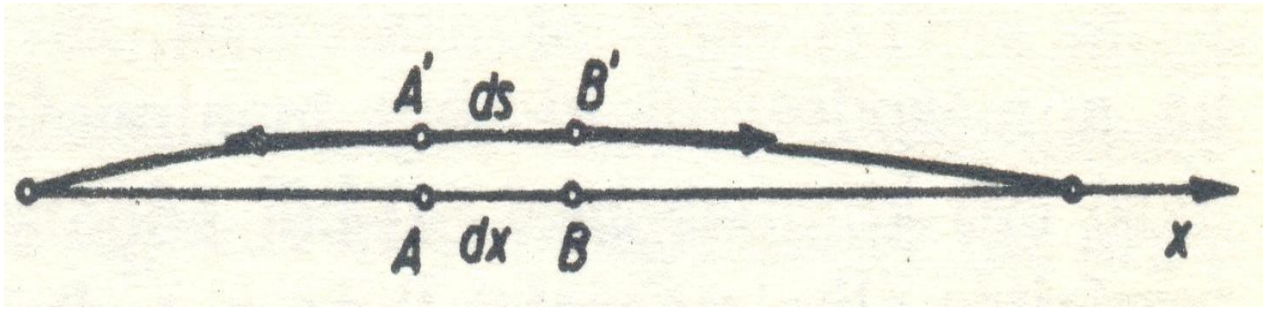
„kifutó” hullám

$$\psi(r,t) = \frac{1}{r} f\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

„befutó” hullám

A húr rezgése

Az F erővel feszített q keresztmetszetű húr kezdetben az x tengelyre rásimulva nyugalomban van. Tekintsünk két egymáshoz közeli pontot a húron:



$$A(x,0,0) \qquad B(x+dx,0,0)$$

A húrt megfeszítve a pontok elmozdulnak:

$$A'(x+\xi,\eta,\zeta)$$

$$B'\left(x+dx+\xi+\frac{\partial\xi}{\partial x}dx,\eta+\frac{\partial\eta}{\partial x}dx,\zeta+\frac{\partial\zeta}{\partial x}dx\right)$$

A húr longitudinális rezgése (1)

A megnyúlt húrdarab hossza: $ds \approx (1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}) dx$

A relatív megnyúlás: $\frac{ds - dx}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$

Ezért az A' helyen ébred egy F' erő a „-" irányban a megnyúlásnak megfelelően:

$$F' = Eq \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

A húr longitudinális rezgése (2)

A B’ pontban ébredő F’’ erő „+” irányban:

$$F'' = Eq\frac{\partial \xi}{\partial x} + Eq\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}dx$$

A két erő eredője dF = F’’-F’, amely a gyorsulással mozgatja a dm tömegű húrdarabot. (Newton II. axiómája!)

$$a = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$dm = \rho q dx$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A húr longitudinális rezgése (3)

Ekkor a húr x irányú (hosszanti) elmozdulásának mozgásegyenlete egy hullámegyenlet. A kialakuló hullám longitudinális.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Az egyenletből a hullám terjedése közvetlenül leolvasható:

$$c_{long} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Ezt összevethetjük egy korábbi eredménnyel!

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A húr transzverzális rezgése

Hasonló meggondolásokkal a haránt irányú rezgések is leszármaztathatók. A kapott hullámegyenletek és a terjedési sebesség:

y irányú kitérésre

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

z irányú kitérésre

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

Itt σ a húrbeli feszültség:

$$\sigma = \frac{F}{q}$$

$$c_{transzv} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Hullámok szuperpozíciója

A szuperpozíció elve: Lineáris rendszerekre megfogalmazható általános elv, amely a hullámok esetén azt mondja ki, hogy egy adott pontban a kölcsönható hullámok kitéréseinek algebrai összege eredményezi az eredő hullám kitérését.

Pl. az y_1 és y_2 harmonikus hullámok esetére:

$$y_1 = A_1 \sin(\omega_1 t - k_1 x_0 + \delta_1)$$

$$y_2 = A_2 \sin(\omega_2 t - k_2 x_0 + \delta_2)$$

Az eredő hullám az adott pontban:

$$y = y_1 + y_2$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Interferencia

Definíció:

Interferencia: Olyan hullámtani jelenség, amely akkor következik be, ha két különböző forrású koherens hullám találkozik. A találkozó rezgések fázisától függően a hullámok szuperpozíciójának eredménye lehet erősítés vagy gyengítés, esetleg teljes kioltás attól függően, hogy a hullámok azonos vagy ellentétes fázisban találkoznak.

Definíció:

Koherencia: hullámok közötti viszony. Két azonos frekvenciájú hullám akkor mondható koherensnek (összetartozónak), ha fáziskülönbségük egy adott helyen időben állandó.

Ha két koherens hullám találkozásáról beszélünk , akkor a hullámok olyanok, amelyek fáziskülönbsége állandó. Következésképp csak az azonos frekvenciájú hullámok képesek interferenciára.

http://www.walter-fendt.de/ph14hu/interference_hu.htm

ÁLLÓHULLÁM

Definíció:

Az állóhullámok egymással szemben haladó egyenlő amplitúdójú, frekvenciájú és polaritású hullámok interferenciája esetén fellépő jelenség.

A kialakult állóhullám két alapvető jellegzetessége kísérletileg is megfigyelhető. http://www.walter-fendt.de/ph14hu/stwaverefl_hu.htm

Az egyik az, hogy pl. a rezgő test különböző részei nem egymás után, hanem egyszerre végzik *rezgésüket.*

A másik jellegzetesség az amplitúdó-eloszlásnál figyelhető meg. Bizonyos pontok nyugalomban vannak (ezek a *csomópontok), ill. elektromágneses hullámok esetén a csomópontokban zérus az elektromágneses* tér, mások pedig maximális kitéréssel végzik rezgésüket (ezek a *duzzadási helyek).*

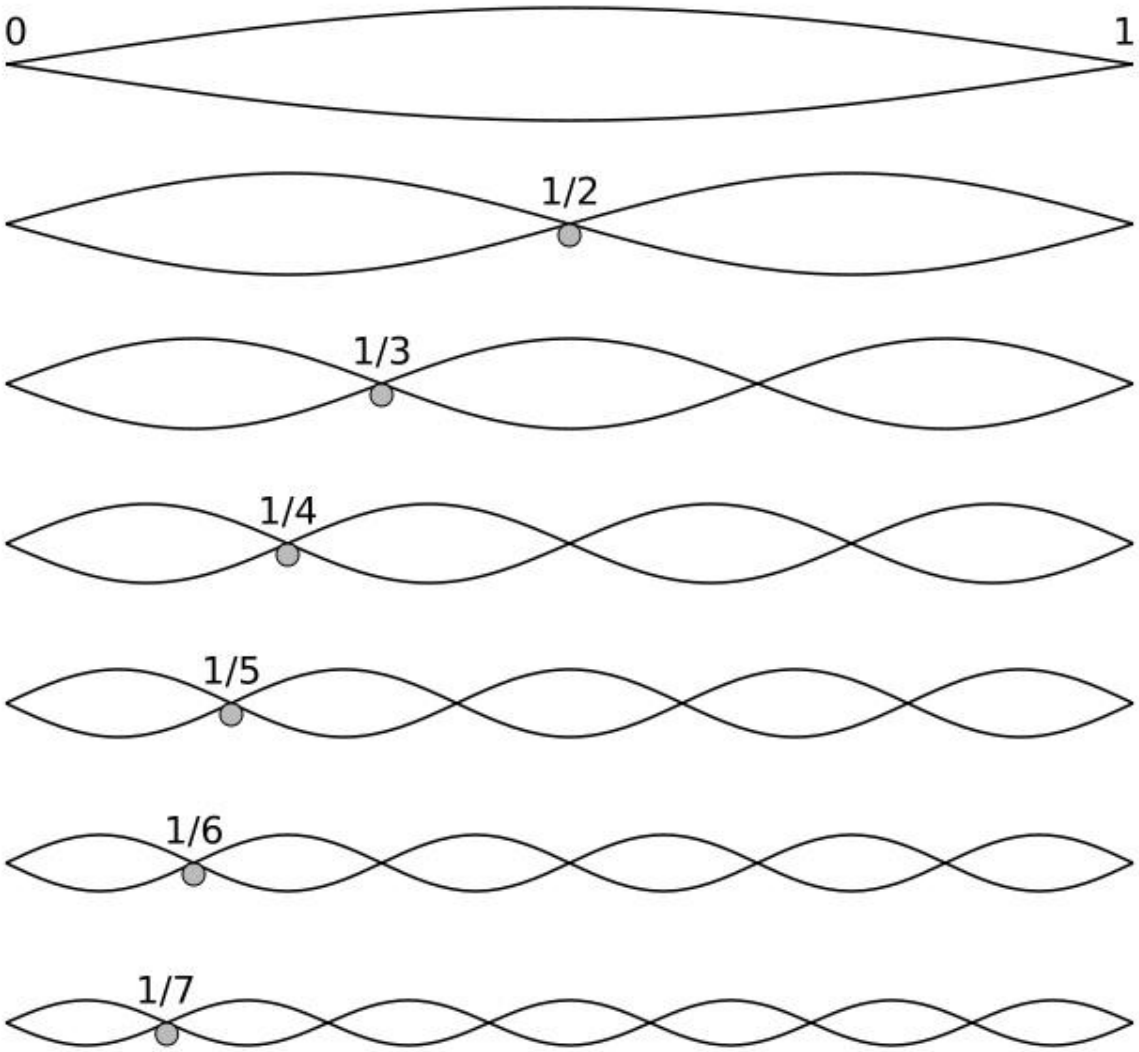
*(*Pl. egy nagyobb teljesítményű állóhullámú antenna csomópontjait akár meg is lehet fogni, de a duzzadási helyek érintése áramütéssel járhat, tehát életveszélyes.)

http://www.walter-fendt.de/ph14hu/stlwaves_hu.htm http://www.tests.hu/show/159/F-C-C

Állóhullámok rezgő húron (1)

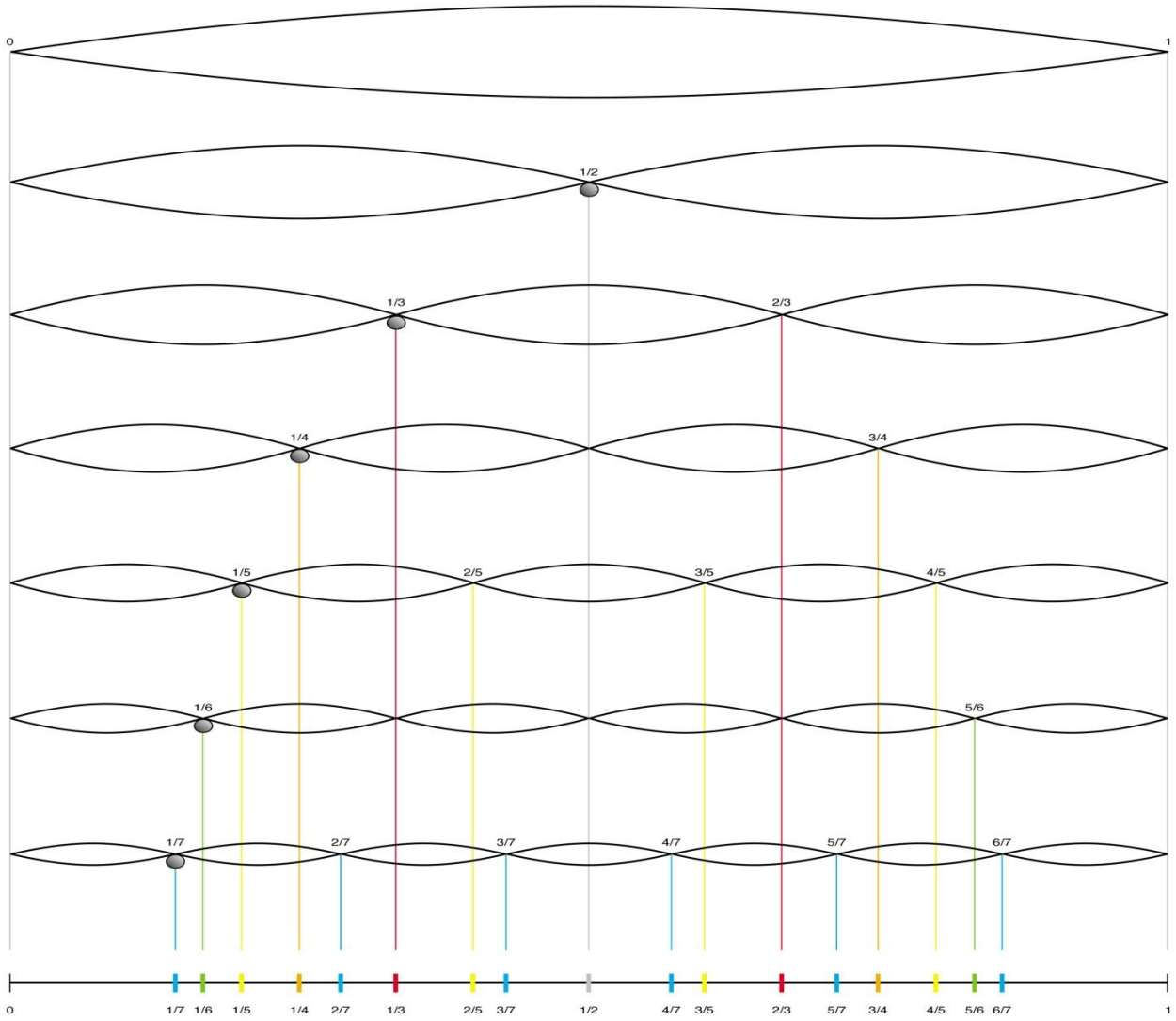
Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Állóhullámok rezgő húron (2)



Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Állóhullámok rezgő húron (3)



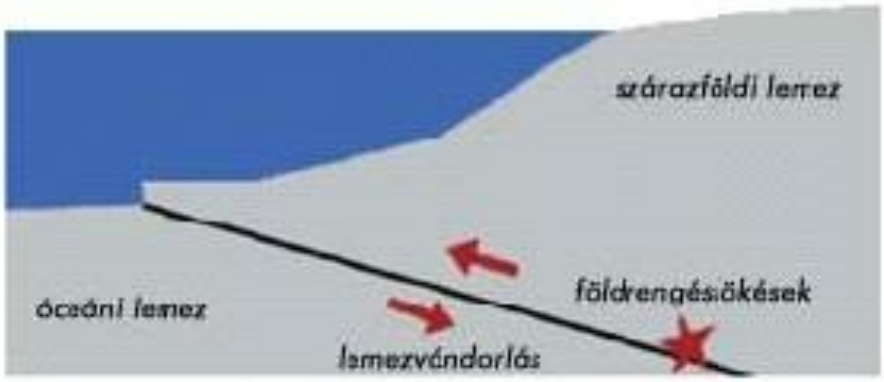
http://www.illyes-bors.sulinet.hu/uj/oktatas/tantargyak/Fizika/Fejezetek/Hullamtan/113-1/allohull.htm

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

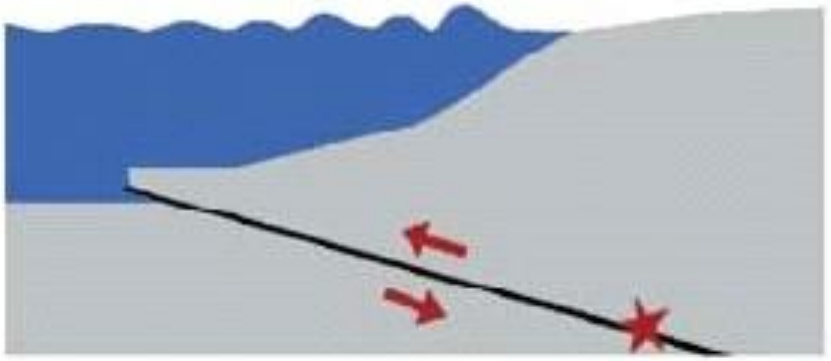
Szökőár

A szökőár (cunami) születése

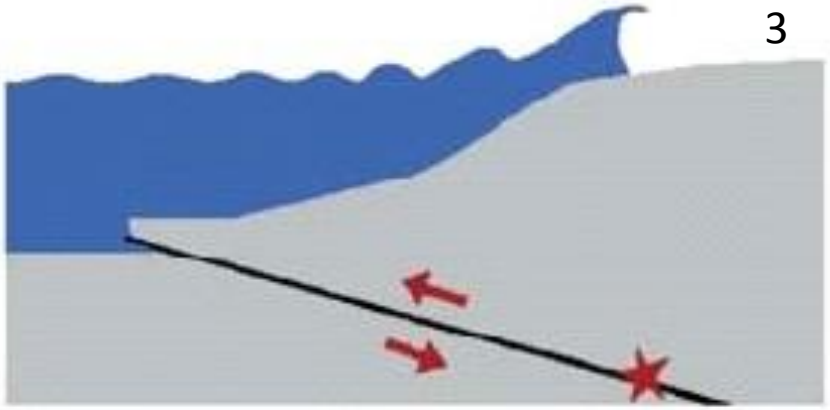
1



2



3



Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Óriáshullámok

Az óriáshullámok a nyílt (tengeri, óceáni) vizeken jelennek meg. Óriáshullámnak a 25 méternél magasabb hullámokat nevezik. Kialakulásukban a hullámok szuperpozíciója mindenképp fontos szerepet játszik. Elméleti számítások szerint maximális magasságuk 60 méter körül lehet. A megfigyelt óriáshullámok átlagosan 30 méter magasak voltak.

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Fourier-soros vagy Bernoulli-féle megoldás (1)

Feladat:

Egy húr fekszik az x=0 és x=l pontok között. A végpontok rögzítése mellett keressük a

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

hullámegyenlet megoldását, amikor már kialakultak az állóhullámok.

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Fourier-soros vagy Bernoulli-féle megoldás (2)

Keressük a megoldást $\psi(x,t) = U(x)V(t)$

alakban. A hullámegyenletbe történő behelyettesítés után az U és V függvények szeparálhatók:

$$\frac{U''}{U} = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{V}}{V}$$

Itt a *vessző* helyszerinti, a *pont* időszerinti deriváltat jelent.

A két oldal külön-külön ugyanazzal a konstanssal kell egyenlő legyen. A konstanst $-k^2$ –nek választva írható:

$$U'' = -k^2 U \qquad \ddot{V} = -k^2 c^2 V$$

Harmonikus rezgőmozgás mozgásegyenletei!

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Fourier-soros vagy Bernoulli-féle megoldás (3)

Megoldás az U-ra: $U(x) = A \sin kx + B \cos kx$

A határfeltételeket figyelembe vételével:

$$k = k_n = n\frac{\pi}{l}$$

Megoldás az V-ra:

$$V(t) = C \sin kct + D \cos kct$$

$k_n ct = 2\pi\nu_n t$ amivel $\nu_n = n\frac{c}{2l}$

A rezgő húron kialakuló állóhullámok lehetséges hullámhosszai

$$\lambda_n = \frac{c}{\nu_n} = \frac{2l}{n}$$

vagy

$$l = n\,\frac{\lambda_n}{2}$$

Azaz a húron csak a fél hullámhossz egész számú többszörösei jelenhetnek meg ! (lásd az „Állóhullámok rezgő húrokon” képeket)

Kérdések

Mit állít Helmholtz tétele?
Mi a kontinuumok általános mozgásegyenlete (Cauchy-féle mozgásegyenlet). A mechanika mely axiómája van kiterjesztve e mozgásegyenletben? Milyen két nagy csoportra osztjuk az erőket e leírásban?
A kontinuumok általános mozgásegyenlete a feszültségeket (feszültség tenzort) tartalmazza. Milyen lépéseket kell tenni, hogy a mozgásegyenlet megoldható legyen? (→ a feszültségek helyett az elmozdulásokkal kapcsolatos deformáció tenzort kell bevezetni a leírásba)
Milyen a feszültségtenzor és a defomációtenzor kapcsolata?
Homogén izotróp test esetén hány rugalmassági állandóra van szükségünk a mozgás leírásához?
Hogy néz ki a rugalmas kontinuumok mozgásegyenlete?
Mi a hullámegyenlet általános alakja?

Kérdések (2)

Mi a hullámegyenlet általános megoldása síkhullámok és gömbhullámok esetén?
Milyen hullámok terjedhetnek rugalmas kontinuumokban?
Mi a harmonikus hullám?
Mit mond ki a szuperpozíció elve?
Hogyan alakulnak ki az állóhullámok?
Milyen a visszavert hullám fázisa a beeső hullámhoz képest szabad illetve rögzített vég esetén?
Mi a Fourier-soros (Bernoulli) megoldás alapgondolata és főbb lépései?

(folyt. köv.) *(A ilyen színnel írt kérdések a mélyebben érdeklődők részére vannak.)*