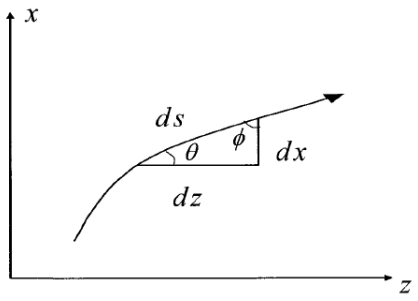
# Optika gyakorlat 3.

*Sugáregyenlet, fényterjedés parabolikus szálban, polarizáció, Jones-vektor*

## Hamilton-elv

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q_k}, t)\,\mathrm{d}t = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T-V)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \textit{(Euler-Lagrange egyenlet)}$$




De mi az optikai Lagrange függvény?

$$\delta\,(OPL) = \delta \int_A^B n(\mathbf{r})\,\mathrm{d}s = \delta \int_A^B n\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \delta \int_A^B \underbrace{n(x,y,z)\sqrt{1+x'^2+y'^2}}_{Lagrange fv.} \overbrace{dz}^{dt} = 0$$

$q_k(q_1, q_2) = (x, y)$ :

$$\frac{d}{dz}\frac{\partial L}{\partial x'} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad ; \qquad x' = \frac{dx}{dz}$$
$$\frac{d}{dz}\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \qquad ; \qquad y' = \frac{dy}{dz}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{n \cdot x'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}} \qquad ; \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial x}\sqrt{1+x'^2+y'^2}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{d}{dz}\left(\frac{n}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}\frac{dx}{dz}\right) = \sqrt{1+x'^2+y'^2}\cdot\frac{\partial n}{\partial x} \qquad (*)$$

## Sugáregyenlet

Inhomogén közegben a sugár terjedését a sugáregyenlet írja le (paricális (vektor) differenciálegyenlet), amelyet legtöbbször numerikusan oldunk meg.

Az Euler-Lagrange egyenletekből kapjuk:

$$\frac{d}{ds}\left(n\cdot\frac{dx}{ds}\right) = \frac{\partial n(x,\,y,\,z)}{\partial x} \quad ; \quad \frac{d}{ds}\left(n\cdot\frac{dy}{ds}\right) = \frac{\partial n(x,\,y,\,z)}{\partial y} \quad ; \quad \frac{d}{ds}\left(n\cdot\frac{dz}{ds}\right) = \frac{\partial n(x,\,y,\,z)}{\partial z}$$

$$\longrightarrow \qquad \frac{d}{ds}\left(n\cdot\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \nabla\, n(x,\,y,\,z) \qquad \textit{(Ray equation)}$$

speciális eset $n = n(x; y)$

$$\frac{d}{ds}\left(n \cdot \frac{dz}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial z} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad n \cdot \frac{dz}{ds} = \widetilde{\beta} = \text{konstans}$$

$$n(x,y) \cdot \cos\theta(x,y) = \widetilde{\beta} = n(x,y) \cdot \sin\phi(x,y)$$

$$\widetilde{\beta} = n \cdot \frac{dz}{ds} = \frac{n(x;y)}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}}$$

$$(*) \Longrightarrow \frac{d}{dz}\left(\widetilde{\beta}\frac{dx}{dz}\right) = \frac{n(x;y)}{\widetilde{\beta}} \cdot \frac{\partial n}{\partial x}$$

Euler-Lagrange egyenletek $\longrightarrow$ $\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{n}{\widetilde{\beta}}\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{1}{2\widetilde{\beta}^2}\frac{\partial n^2}{\partial x}$ ; $\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{n}{\widetilde{\beta}}\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{2\widetilde{\beta}^2}\frac{\partial n^2}{\partial y}$

## 1. példa: Fény pályája homogén közegben - sugáregyenlet

Határozzuk meg a fény pályáját homogén közegben a sugáregyenlet felhasználásával.
*Megoldás:* Homogén közegben a törésmutató állandó:

$$n(x,y,z) = konstans$$

A sugáregyenlet szerint

$$\frac{d}{ds}(n \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}) = \nabla n(x,y,z)$$

Mivel az $n$ törésmutató állandó, ezért minden deriváltja nulla, így:

$$\frac{d}{ds}(n \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}) = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = 0$$

A másodrendű differenciálegyenlet megoldását két integrálást követően kapjuk, melynek általános alakja:

$$\vec{r} = \vec{a} \cdot s + \vec{b}$$

Az ilyen típusú egyenletek egyeneseket parametrizálnak a térben. Tehát homogén közegben a fény egyenes vonalon terjed.

## 2. példa: Fénytörés két közeg határfelületén - sugáregyenlet

Igazoljuk a törési törvényt a sugáregyenlet felhasználásával.
*Megoldás:* A közegeken belül a törésmutató állandó, a közeghatáron pedig ugrásszerűen változik: $x > x_0$ esetén $n(x,y,z) = n_1$ és $x < x_0$ esetén $n(x,y,z) = n_2$.
Az $n = n(x,y)$ speciális esetre vonatkozó sugáregyenletet felírva:

$$\frac{d}{ds}\left(n \cdot \frac{dz}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial z} = 0$$

A differenciálegyenlet megoldását integrálással meghatározva kapjuk:

$$n \cdot \frac{dz}{ds} = kostans$$

A derivált értékét szögekkel kifejezve:

$$\frac{dz}{ds} = sin\phi$$

Ezt visszaírva a sugáregyenlet megoldásába éppen a törési törvényt kapjuk:

$$n \cdot sin\Phi = konstans$$

### 3. példa: Fény pályája lineáris törésmutatójú közegben

Legyen a törésmutató eloszlás $x > 0$ esetén $n^2(x) = n_0^2 - \alpha \cdot x$ és $x < 0$ esetén $n^2(x) = n_0^2$. A fénysugár az $x(z = 0) = 0$ helyen $\frac{dx}{dz}(z = 0) = tg\Theta_0$ szög alatt lép be a közegbe. A sugáregyenlet segítségével határozzuk meg a fénysugár útját!

*Megoldás:* Az Euler-Lagrange egyenletek alapján

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{n}{\widetilde{\beta}}\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{1}{2\widetilde{\beta}^2}\frac{\partial n^2}{\partial x}$$

Ide behelyettesítve az $x > 0$ térrész törésmutató-eloszlását kapjuk:

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{\alpha}{2\widetilde{\beta}^2}$$

A homogén lineáris másodrendű differenciálegyenlet általános megoldását két integrálást követően kapjuk:

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{\alpha}{2\widetilde{\beta}^2} \cdot z + A$$

$$x(z) = -\frac{\alpha}{4\widetilde{\beta}^2} \cdot z^2 + A \cdot z + B$$

Az általános megoldásban szereplő konstans értékek a kezdeti feltételekre való illesztéssel határozhatók meg:

$$x(z = 0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$\frac{dx}{dz}(z = 0) = tg\Theta_0 \rightarrow A = tg\Theta_0$$

Ezzel a fénysugár útja:

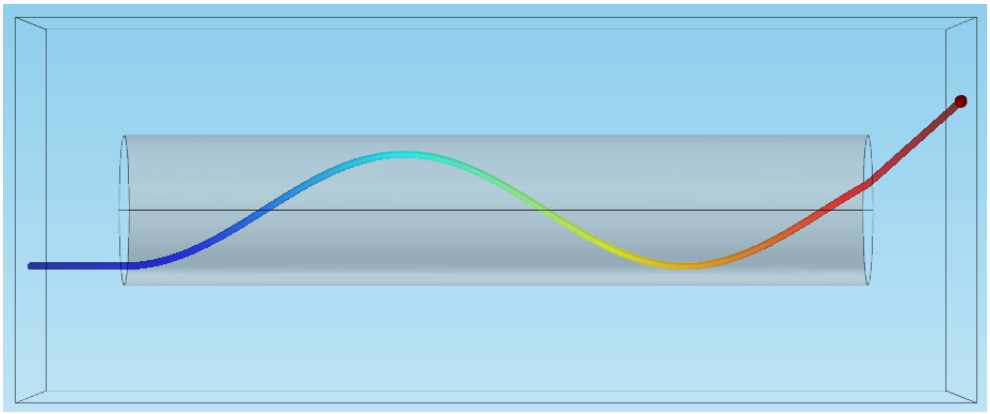
$$x(z) = -\frac{\alpha}{4\widetilde{\beta}^2} \cdot z^2 + tg\Theta_0 \cdot z$$

ahol $\widetilde{\beta} = n_0 \cdot cos\Theta_0$. Ilyen a rádióhullámok terejdése az ionoszférában.

### 4. példa: Parabolikus szál (hullámvezető)

Legyen a törésmutató eloszlás: $n^2(x, y) = n_0^2 - \alpha^2(x^2 + y^2)$ ; $\alpha << 1$

A sugáregyenlet segítségével határozzuk meg a fénysugár útját!



1. ábra. Parabolikus szálban haladó fénysugár *(számolás - Comsol Ray Optics module)*

*Megoldás:* Az Euler-Lagrange egyenletek szerint:

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{n}{\widetilde{\beta}} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{1}{2\widetilde{\beta}^2} \cdot \frac{\partial n^2}{\partial x}$$

Ahol a törésmutató helyfüggésének megfelelően:

$$\frac{\partial n^2}{\partial x} = -2\alpha^2 \cdot x$$

Ezt visszahelyettesítve az Euler-Lagrange egyenletbe:

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{1}{2\widetilde{\beta}^2} \cdot (-2\alpha^2) \cdot x$$

Átrendezve a következő másodrendű, homogén, lineáris differeciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{d^2x}{dz^2} + (\frac{\alpha}{\widetilde{\beta}})^2 \cdot x = 0$$

Ez a típusú differenciálegyenlet az egydimenziós harmonikus oszcillátor mozgásegyenlete. Megoldásának általános alakja:

$$x(z) = A \cdot cos(\frac{\alpha}{\widetilde{\beta}} \cdot z) + B \cdot sin(\frac{\alpha}{\widetilde{\beta}} \cdot z)$$

Az $y$ koordinátára teljesen analóg módon a sugáregyenletből hasonló differenciálegyenlet vezethető le, melynek általános megoldása:

$$y(z) = C \cdot cos(\frac{\alpha}{\widetilde{\beta}} \cdot z) + D \cdot sin(\frac{\alpha}{\widetilde{\beta}} \cdot z)$$

A fénysugár útját meghatározó két egyenletben szereplő négy konstans értékét a kezdeti feltételek határozzák meg.

1. speciális eset: A fénysugár az $x - z$ síkban terjed, s az origóban $\Theta_0$ szögben lép be a hullámvezetőbe.

Ekkor az értékekre és a deriváltakra felírt kezdeti feltételekből a következő értékek adódnak a konstansokra:

$$x(z = 0) = 0 \rightarrow A = 0$$

$$y(z = 0) = 0 \rightarrow C = 0$$

$$\frac{dx}{dz}(z = 0) = tg\Theta_0 = \frac{\alpha}{\widetilde{\beta}} \cdot B \rightarrow B = \frac{\widetilde{\beta}}{\alpha} \cdot tg\Theta_0$$

$$\frac{dy}{dz}(z = 0) = 0 \rightarrow D = 0$$

Továbbá a $\widetilde{\beta} = n \cdot \frac{dz}{ds}$ egyenletből:

$$\widetilde{\beta} = n(x, y) \cdot cos\Theta(x, y) = n_0 \cdot cos\Theta_0$$

ahol $n_0$ az origó törésmutatóját jelöli.
Ezt visszahelyettesítve $B$ egyenletébe kapjuk:

$$B = \frac{n_0 \cdot cos\Theta_0}{\alpha} \cdot tg\Theta_0 = \frac{n_0 \cdot sin\Theta_0}{\alpha}$$

Ezzel a fénysugár útja:

$$x(z) = \frac{n_0 \cdot sin\Theta_0}{\alpha} \cdot sin(\frac{\alpha}{n_0 \cdot cos\Theta_0} \cdot z)$$

2. speciális eset: A fénysugár $x = x_0$ helyen lép be a hullámvezetőbe $\frac{dy}{dz}(z = 0) = tg\Theta_0$ szög alatt.

Ekkor az értékekre és a deriváltakra felírt kezdeti feltételekből a következő értékek adódnak a konstansokra:

$$x(z = 0) = x_0 \rightarrow A = x_0$$

$$y(z = 0) = 0 \rightarrow C = 0$$

$$\frac{dx}{dz}(z = 0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$\frac{dy}{dz}(z = 0) = tg\Theta_0 = \frac{\alpha}{\widetilde{\beta}} \cdot D \rightarrow D = \frac{\widetilde{\beta}}{\alpha} \cdot tg\Theta_0$$

A kezdeti feltételekből adódó konstansokat behelyettesítve az általános megoldásba:

$$x(z) = x_0 \cdot cos(\frac{\alpha}{\widetilde{\beta}} \cdot z)$$

$$y(z) = \frac{\widetilde{\beta} \cdot tg\Theta_0}{\alpha} \cdot sin(\frac{\alpha}{\widetilde{\beta}} \cdot z)$$

Továbbá a $\widetilde{\beta} = n \cdot \frac{dz}{ds}$ egyenletből:

$$\widetilde{\beta} = n(x, y) \cdot cos\Theta(x, y) = n(x_0, 0) \cdot cos\Theta_0$$

. Ezen belül is vizsgáljunk egy speciális esetet, amikor $x_0 = \frac{\widetilde{\beta} \cdot tg\Theta_0}{\alpha}$. Ekkor:

$$x(z) = x_0 \cdot cos(\frac{\alpha}{\widetilde{\beta}} \cdot z)$$

$$y(z) = x_0 \cdot sin(\frac{\alpha}{\widetilde{\beta}} \cdot z)$$

ami azt jelenti, hogy $z$-től függetlenül

$$x(z)^2 + y(z)^2 = x_0^2$$

Az ilyen típusú egyenletek spirális pályán való terjedést írnak le.

# A fény polarizációja

Tekintsünk egy z irányba terjedő síkhullámot. A térerősség vektor a terjedési irányra merőkeges irányban helyezkedik el, általános esetben az alábbi függvénnyel írható le:

$$\vec{E}(z, t) = Re\left(\vec{A} \cdot exp^{i(\omega t - kz)}\right)$$

, ahol $\vec{A}$ komplex amplitudó felbontható külön x és z irányú komponensekre:

$$\vec{A} = A_x\vec{x} + A_y\vec{y} = a_x exp^{i\phi_x} \cdot \vec{x} + a_y exp^{i\phi_y} \cdot \vec{y}$$

A hullám z irányú terjedése során, adott z koordináta esetén térerősség vektor mindig felfogható két azonos frekvenciájú, de különböző amplitudójú és fázisú rezgés összegének, ahol az egymásra ortogonális komponensek:

$$E_x = a_x cos(\omega t - kz + \phi_x)$$
$$E_y = a_y sin(\omega t - kz + \phi_y)$$

A térerősség vektor végpontja általános esetben egy ellipszis kerületén mozog:

$$\frac{E_x^2}{a_x^2} + \frac{E_y^2}{a_y^2} = cos^2(\omega t - kz + \phi_x) + cos^2(\omega t - kz + \phi_y)$$
$$= sin^2(\phi) + 2cos\phi \cdot \frac{E_x E_y}{a_x a_y} \qquad , ahol \quad \phi = \phi_y - \phi_x$$

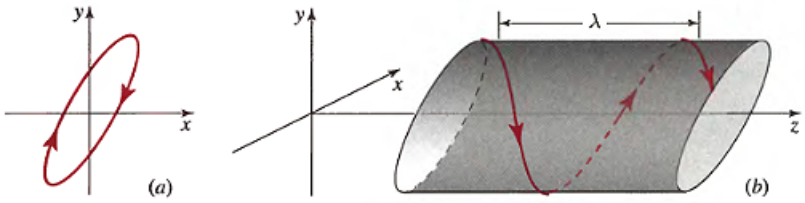



**Figure 6.1-1** (*a*) Rotation of the endpoint of the electric-field vector in the $x$–$y$ plane at a fixed position $z$. (*b*) Snapshot of the trajectory of the endpoint of the electric-field vector at a fixed time $t$.

2. ábra. *Forrás: Saleh-Teich: Fundamentals of Photonics*

**Lineárisan poláris fény:**

$$\phi_x = \phi_y + m\pi$$

$$E_x = \pm(\frac{a_y}{a_x})E_y \qquad |E| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\Theta = \tan^{-1}(\frac{a_y}{a_x})$$

**Cirkulárisan poláris fény:**

$$\phi = \pm\frac{\pi}{2} \qquad a_x = a_y = a_0$$

$$E_x = a_0 cos(\omega t - kz + \phi_0)$$
$$E_y = \pm a_0 sin(\omega t - kz + \phi_0)$$

$$\longrightarrow \frac{E_x^2}{a_x^2} + \frac{E_y^2}{a_y^2} = 1 \qquad a\ kör\ egyenlete$$

$$E_x = \pm(\frac{a_y}{a_x})E_y \qquad |E| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\Theta = \tan^{-1}(\frac{a_y}{a_x})$$

A polarizáció síkja az x tengellyel $\Theta$ szöget zár be.

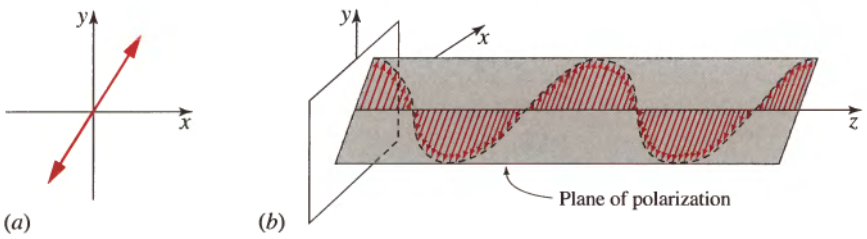



**Figure 6.1-3** Linearly polarized light (also called plane polarized light). ($a$) Time course at a fixed position $z$. ($b$) A snapshot (fixed time $t$).

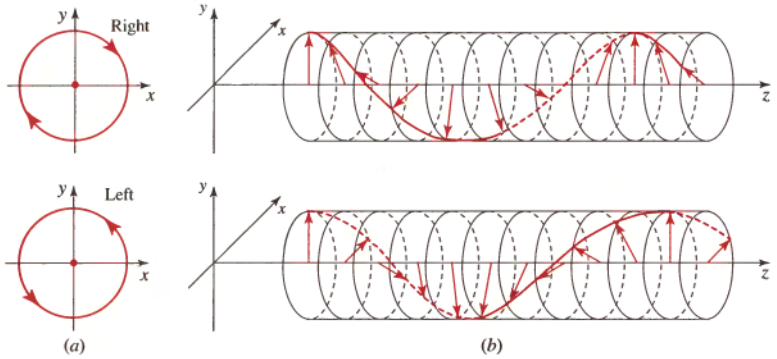



**Figure 6.1-4** Trajectories of the endpoint of the electric-field vector of a circularly polarized plane wave. ($a$) Time course at a fixed position $z$. ($b$) A snapshot at a fixed time $t$. The sense of rotation in ($a$) is opposite that in ($b$) because the traveling wave depends on $t - z/c$.

3. ábra. *Forrás: Saleh-Teich: Fundamentals of Photonics*

## Jones-vektor

Ha az $A_x$ és $A_y$ kompnenseket vektorba rendezzük, a Jones-vektort kapjuk:

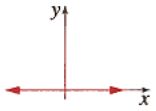
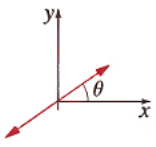
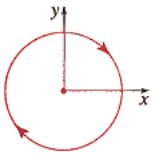
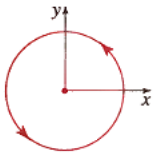
$$\bar{J} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x exp^{i\phi_x} \\ a_y exp^{i\phi_y} \end{bmatrix}$$

A hullám intenzitása felírható a Jones vektor segítségével:

$$I = \frac{c\epsilon}{2} \bar{J} \cdot \bar{J}^* = \frac{c\epsilon}{2}(a_x^2 + a_y^2)$$

A tovabbiaban a konvenció szerint a Jones vektorok hosszát 1-re normálva adjuk meg. Az alábbi táblázatban megtalálható a linárisan poláris, a jobbra cirkulárisan poláris (RCP) valamint balra cirkulárisan poláris (LCP) fény Jones-vektora:

**Table 6.1-1** Jones vectors of linearly polarized (LP) and right- and left-circularly polarized (RCP, LCP) light.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| LP in $x$ direction | $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ |  | LP at angle $\theta$ | $\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$ |  |
| RCP | $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$ |  | LCP | $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$ |  |

### Mátrix reprezentáció: polarizációs eszközök

A fény polarizációs állapota polarizációs eszközökkel megváltoztatható. A legegyszerűbb polarizációs eszközök lineárisak, ezáltal egyszerű mátrix transzformációval jellemezhetőek. A bemeneti $J_1$ Jones-vektor az eszközön való áthatládást követően átalakul $J_2$ Jones-vektorrá.

$$\bar{J}_2 = \begin{bmatrix} A_{2x} \\ A_{2y} \end{bmatrix} = \bar{\bar{T}} \cdot \bar{J}_1 = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{1x} \\ A_{1x} \end{bmatrix}$$

ahol a $T$ a polarizációs eszköz ún. Jones-mátrixa. A következőkben mevizsgáljuk néhány eszköz Jones mátrixát.

## 5. példa: lineáris polarizátor, fáziskésleltető lemez, polarizációs forgató

Írjuk fel a lineáris polarizátor, fáziskésleltető lemez és polarizáció forgató kocka Jones mátrixát!

### Lineáris polarizátor

Az x-irányú lineáris polarizátor csak az x irányú polarizációt tartja meg:

$$\begin{bmatrix} A_{2x} \\ A_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{1x} \\ A_{1y} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

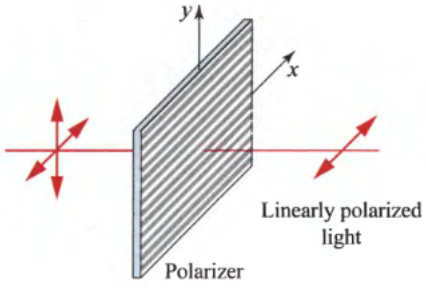



**Figure 6.1-7** The linear polarizer. The lines in the polarizer represent the field direction that is permitted to pass.

4. ábra. *Forrás: Saleh-Teich: Fundamentals of Photonics*

### Fáziskésleltető lemez

Az y-irányban $\Delta\phi$ fázikésleltetést eredményező fázistolólemez mátrixa:

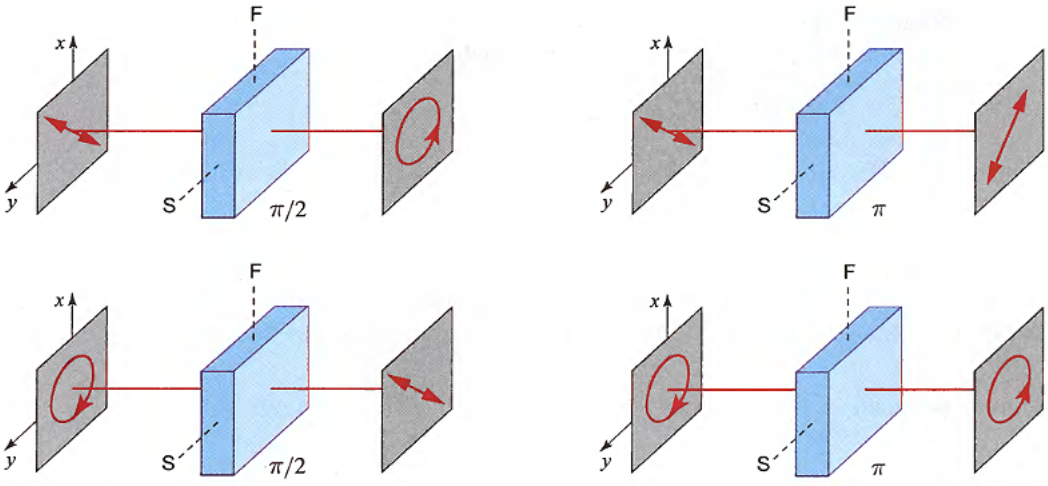
$$\begin{bmatrix} A_{1x} \\ e^{-i\Delta\phi} A_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\Delta\phi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{1x} \\ A_{1y} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\Delta\phi} \end{bmatrix}$$

Két speciális esetet szoktunk kiemelni, a $\lambda/4$ -es és $\lambda/2$-es lemezt:

$$\lambda/4\text{-es lemez:} \quad \Delta\phi = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \bar{\bar{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm i \end{bmatrix} \qquad \lambda/2\text{-es lemez:} \quad \Delta\phi = \pi \longrightarrow \bar{\bar{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A $\lambda/4$ -es lemez linárisan polarizált fényből cirkulárisan polarizált fényt csinál, a $\lambda/2$ -es lemez pedig balra cirkulárisan polarizált fényből jobbra cirkulárisan polarizáltat csinál és fordítva.




(*a*) Quarter-wave retarder (*b*) Half-wave retarder

**Figure 6.1-8** Operations of quarter-wave ($\pi/2$) and half-wave ($\pi$) retarders on several particular states of polarization are shown in (*a*) and (*b*), respectively. F and S represent the fast and slow axes of the retarder, respectively.

5. ábra. *Forrás: Saleh-Teich: Fundamentals of Photonics*

### Polarizáció forgató lemez

A polarizáció forgató lemez a lineáris polarizáció irányát forgatja el $\Theta$ szöggel, miközben a lineáris polarizációs állapot megmarad. A transzformáció mátrixa megegyezik a közismert, lineáris transzformáció forgatási mátrixával.

$$\begin{bmatrix} A_{2x} \\ A_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\Theta) & -sin(\Theta) \\ sin(\Theta) & cos(\Theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{1x} \\ A_{1y} \end{bmatrix}$$

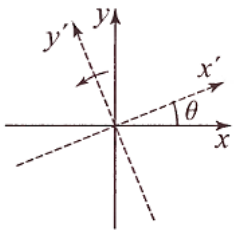
$$\bar{\bar{T}} = \begin{bmatrix} cos(\Theta) & -sin(\Theta) \\ sin(\Theta) & cos(\Theta) \end{bmatrix}$$

## 6. példa: Tetszőleges szögben álló lineáris polarizátor

Határozzuk meg az optikai tengellyel $\Theta$ szöget bezáró lináris polarizátor Jones-mátrixát!

A $\Theta$ szöggel elforgatott koordinátatengely rendszerben (az ábrán x' és y' tengelyekkel jelölve) a Jones mátrix:

$$\bar{\bar{T}}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$




Az óramutató járásával ellentétes irányban $\Theta$ szöggel való forgatás koordináta transzformáció mátrixa ($x \to x'$ koordináta transzformáció):

$$R(\Theta) = \begin{bmatrix} cos(\Theta) & -sin(\Theta) \\ sin(\Theta) & cos(\Theta) \end{bmatrix}$$

Az óramutató járásával megyező irányban $\Theta$ szöggel való forgatás koordináta transzformáció mátrixa ($x' \to x$ koordináta transzformáció):

$$R(-\Theta) = \begin{bmatrix} cos(\Theta) & sin(\Theta) \\ -sin(\Theta) & cos(\Theta) \end{bmatrix}$$

Ha az $x$ $y$ rendszerben kívánjuk felíni a T transzformációs mátrixot, akkor $R(-\Theta)$ koordináta transzformációt kell alkalmaznunk (-$\Theta$ szöggel el kell forgatunk a tengelyeket). Az új $x$ $y$ rendszerben felírva a transzformációt, a következőt kapjuk:

$$\bar{\bar{T}} = R(-\Theta)^{-1} \cdot \bar{\bar{T}}' \cdot R(-\Theta) = R(\Theta) \cdot \bar{\bar{T}}' \cdot R(-\Theta)$$

$$\bar{\bar{T}} = \begin{bmatrix} cos(\Theta) & -sin(\Theta) \\ sin(\Theta) & cos(\Theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos(\Theta) & sin(\Theta) \\ -sin(\Theta) & cos(\Theta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos(\Theta) & -sin(\Theta) \\ sin(\Theta) & cos(\Theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos(\Theta) & sin(\Theta) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos^2(\Theta) & sin(\Theta)cos(\Theta) \\ sin(\Theta)cos(\Theta) & sin^2(\Theta) \end{bmatrix}$$