Bevezetés a modern fizika fejezeteibe

3. (a)

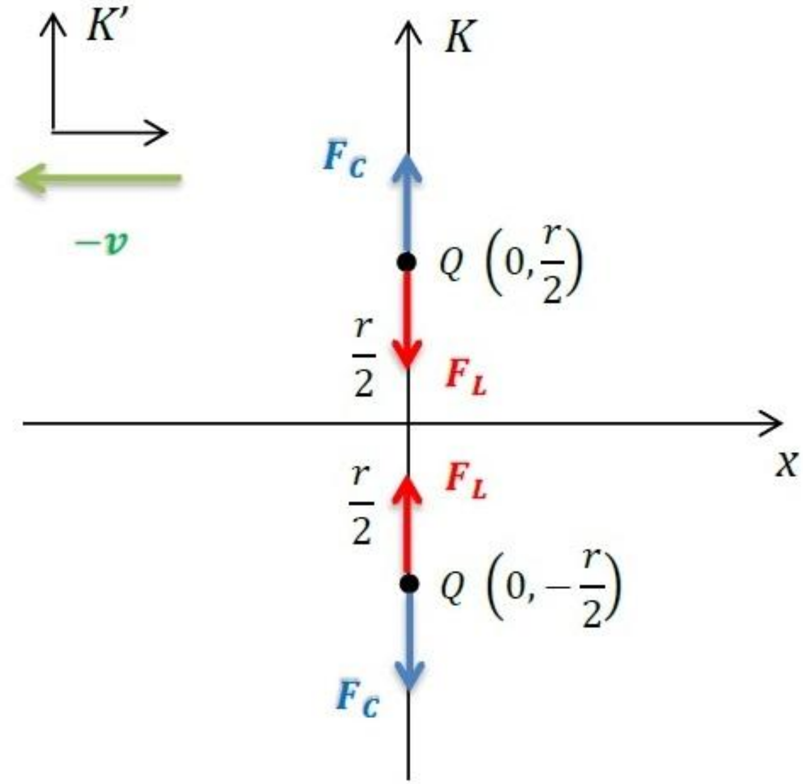
Speciális relativitás
Relativisztikus kinematika

Utolsó módosítás: 2015. január 11..

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Egy egyszerű probléma (1)

A K nyugvó vonatkoztatási rendszerben tekintsünk két, egymástól r távolságban lévő álló azonos nagyságú Q töltést a (0,r/2) és (0,-r/2) koordinátájú pontokban.



A két töltés között fellépő Coulomb-erő a K rendszerben:

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Egy egyszerű probléma (2)

Mekkora erőt tapasztal a két töltés között az x tengelyen –v sebességgel mozgó megfigyelő? A K-beli vonatkoztatási rendszerhez képest –v sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszert nevezzük K'-nek. A K'-ben nyugvó megfigyelő a két töltést +v sebességgel mozgónak látja. A megfigyelő azt állapítja meg, hogy a két töltés között egyrészt hat a sztatikus Coulomb-erő

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}$$

továbbá a Lorentz-erő

$$F_L = qvB$$

A B teret az egyik mozgó töltés hozza létre a másik helyén és fordítva.

Egy egyszerű probléma (3)

A mágneses tér a Biot-Savart-törvénnyel számolható ki:

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{I\, d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

Ez a jelen feladatban $$H = \frac{1}{4\pi}\frac{Qv}{r^2}$$

Ezt felhasználva a K'-beli megfigyelő által számolt erő:

$$F_C - F_L = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Ez nem egyezik meg a K-beli megfigyelő által számolt erővel! →
Ez alapján különbséget lehet tenni a két inerciarendszer között! →

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Egy egyszerű probléma (4)

Vagy mégsem?! Mi lehet az ellentmondás feloldásának kulcsa?

A Galilei-féle relativitási elv kimondja az inerciarendszerek egyenértékűségét. Az egyenes vonalú egyenletesen mozgó rendszerekben a mechanika törvényeit megfogalmazó egyenletek azonos alakúak.

Lehetőségek:

1. A relativitási elv a mechanikai jelenségekre érvényes, az elektrodinamikára azonban nem. Az elektrodinamika törvényei csak egy kitüntetett vonatkoztatási rendszerben érvényesek. A fény sebessége ebben az abszolút nyugvó rendszerben (éterben) c, más rendszerekben azonban nem. Ekkor lehetne egy abszolút sebességről beszélni.

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Egy egyszerű probléma (5)

2. A relativitási elv érvényes a mechanikára és az elektrodinamikára egyaránt. Az inerciarendszerek egyenértékűek, nem különböztethetők meg sem mechanikai, sem elektrodinamikai (optikai) méréssel. Ekkor viszont a Maxwell-egyenleteket kellene módosítani! (A fény sebességét azonban nem lehet végtelennek venni azért, hogy a bevezetőbeli két erő megegyezzen! Mihez képest legyen *c* a fénysebesség? Pl. a fényforráshoz képest?)

3. A relativitási elv érvényes a mechanikára és az elektrodinamikára egyaránt, de a mechanikai fogalmakat, a dinamika törvényeit módosítani szükséges. Újra kell gondolni a távolság és idő mérését!

(Ez a jó megoldás.)

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Egy érdekesség: Fizeau-kísérlet

A v sebességgel áramló n törésmutatójú folyadékban a fény sebessége az áramlás irányában

$$V = \frac{c}{n} + v$$

lenne a Galilei-transzformáció értelmében. Ezzel szemben Fizeau (1851)

$$V = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

értéket kapott! Honnan jött a korrekciós tag?

Az éterhipotézis

A felvetett kérdés: Mihez képest terjed a fény (valamilyen véges) sebességgel?

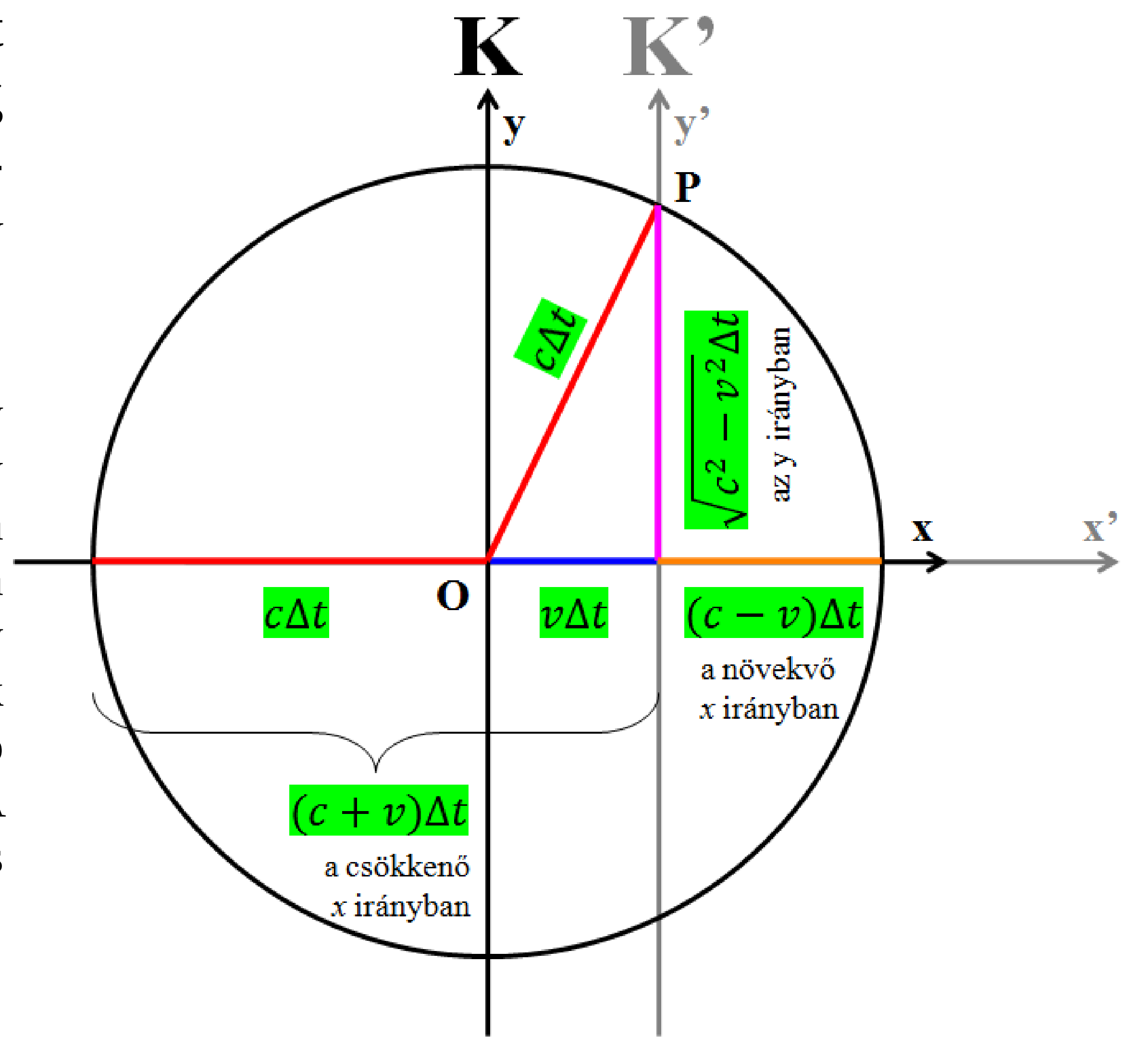
Anyagi közegben a közeghez képest.

És vákuumban?

Az éterhipotézis: végtelen kis sűrűségű, rugalmas közeg, amely közegellenállást nem okoz, és olyan, mint a szilárd test, mert benne transzverzális hullámok terjednek. A fény az éterhez képest terjed c sebességgel. Ily módon a mechanika törvényei szerint egyenértékű rendszerek között van egy kitüntetett, abszolút nyugvó rendszer, amely az éterhez van rögzítve.

A pontforrásból induló fény sebessége a nyugvó és mozgó rendszerből – a Galilei-transzformációnak megfelelően (1)

Feladat: A Földhöz rögzített rendszerbeli fénysebesség mérésével el lehetne dönteni, hogy a Föld áll-e vagy mozog az éterhez képest.



Az origóban villantsunk fel egy fényforrást, és nézzük meg, hogy milyen sebességűnek érzékeli a hullámfelület egyes pontjait a nyugvó (1.) K és az x tengely mentén a növekvő értékek irányában v sebességgel mozgó (2.) K' megfigyelő. (A megfigyelő a felvillanás pillanatában legyen az origóban.)

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A pontforrásból induló fény sebessége a nyugvó és mozgó rendszerből – a Galilei-transzformációnak megfelelően (2)

1. Ha az éterben felvillantunk egy fényforrást, akkor az éterhez képest nyugvó K rendszerben a terjedő fényhullám Δt idő alatt egy $c\Delta t$ gömbfelületet ér el.

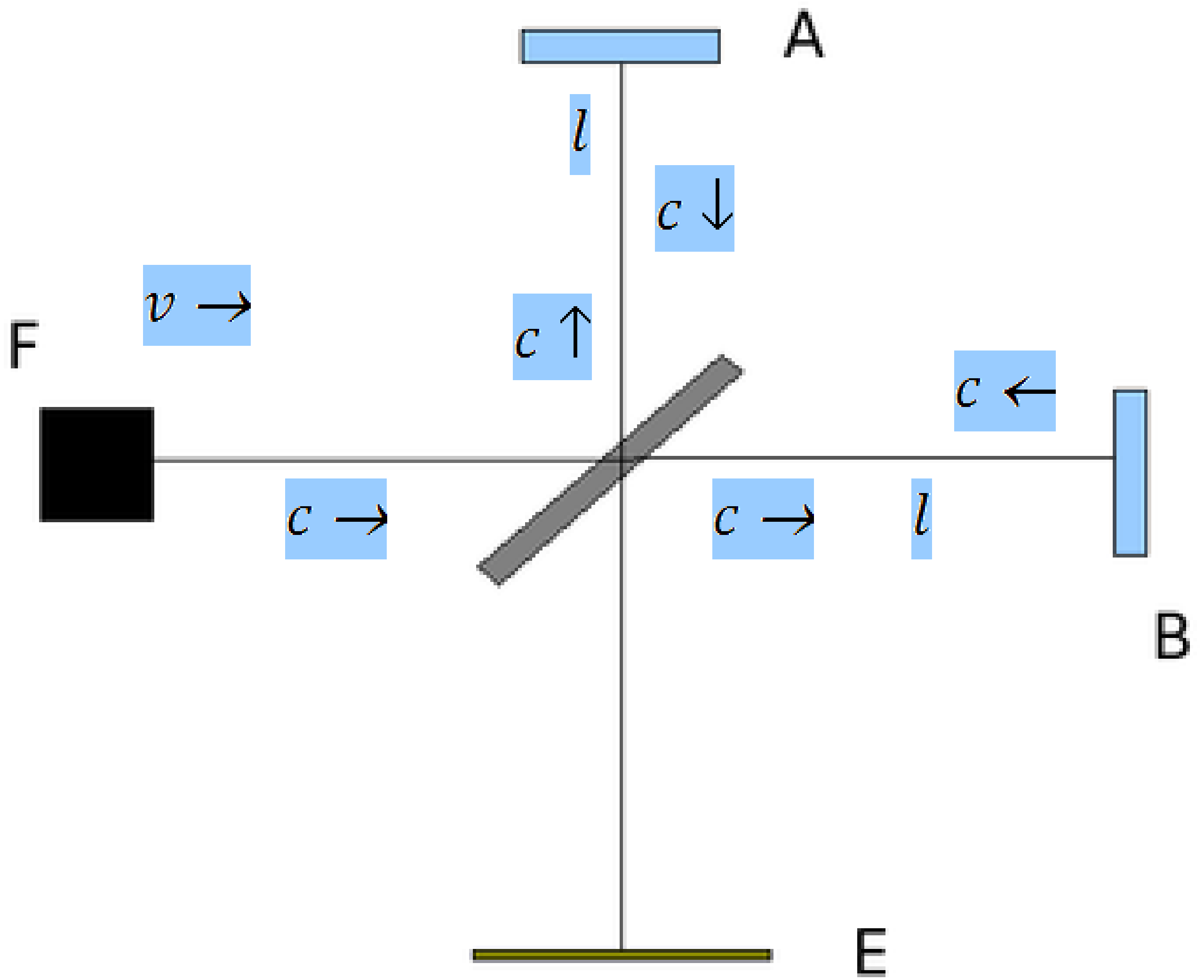
2. Az éterhez képest, az x tengely növekvő értékei felé v sebességgel mozgó K' rendszerből nézve a fény a különböző irányokban megtett útjai:

a növekvő x irányban: $(c - v)\Delta t$

a csökkenő x irányban: $(c + v)\Delta t$

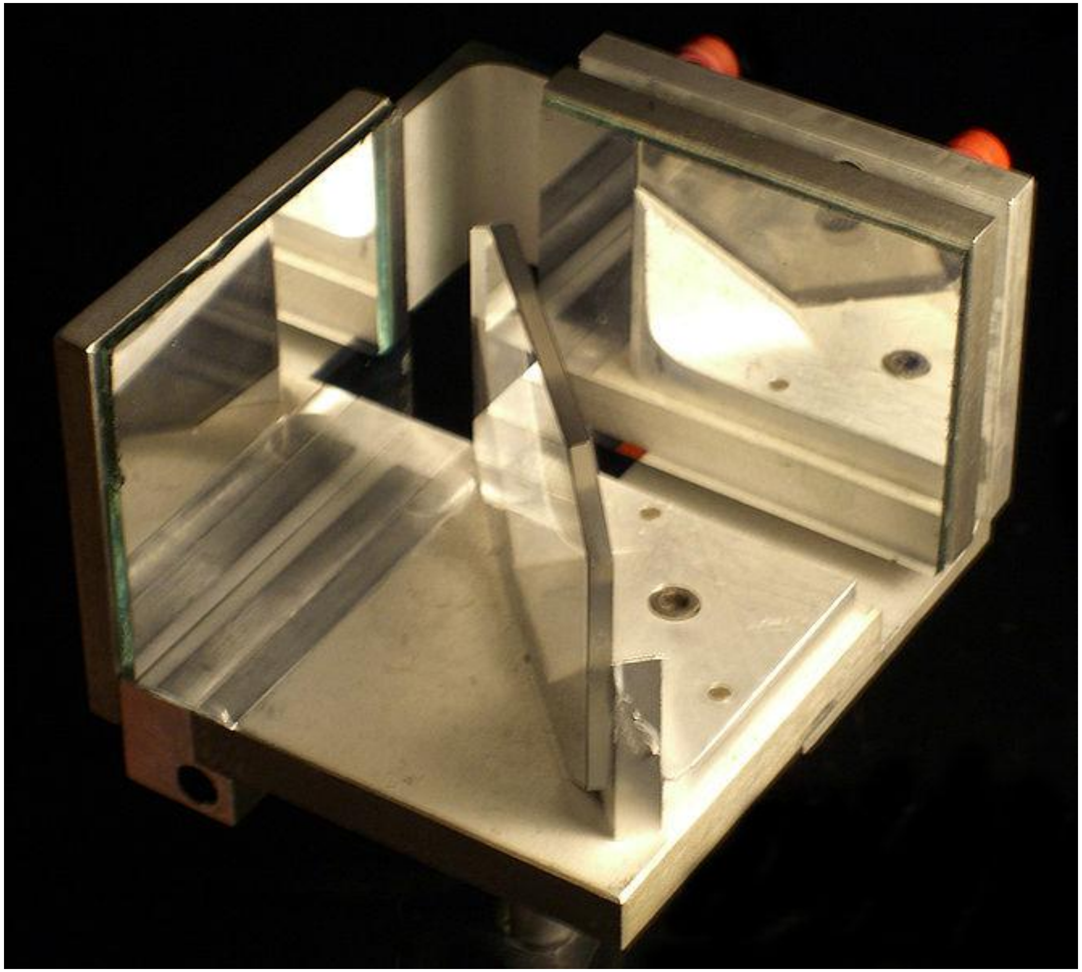
az y irányban: $\sqrt{c^2 - v^2}\,\Delta t$

Michelson-Morley kísérlet (1)



http://hu.wikipedia.org/wiki/Michelson-interferom%C3%A9ter

Michelson-Morley kísérlet (2)



http://hu.wikipedia.org/wiki/Michelson-interferom%C3%A9ter

Michelson-Morley kísérlet (3)

A nyalábosztó és a tükör közötti vízszintes oda-vissza úthoz szükséges idő:

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = 2l\frac{c}{c^2-v^2} \approx \frac{2l}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)$$

A nyalábosztó és a tükör közötti függőleges oda-vissza úthoz szükséges idő:

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2-v^2}} \approx \frac{2l}{c}\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right)$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Michelson-Morley kísérlet (4)

A két fénysugár ernyőre érkezése közötti időkülönbség:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{l}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

A fénynyalábok egymással interferálnak, amelynek következtében erősítés akkor van, ha Δt=0, $\pm T$, $\pm 2T$,…, illetve gyengítés, akkor van, ha Δt= $\pm T/2$, $\pm 3T/2$,…, ahol T a fény rezgésideje. Az interferométert körbeforgatva a csíkok eltolódását kellene tapasztalni. Ehelyett semmiféle csíkeltolódás nincs!

Lorentz-Fitzgerald: „étermentő” próbálkozás. Van éter, de az éterhez képest mozgó testek hossza

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

arányban megrövidülnek a mozgás irányában. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez esetben az időkülönbség tényleg zérusnak adódik.

A speciális relativitás elve

Mivel semmilyen módon nem lehet eldönteni két inerciarend-szerről, hogy melyik áll és melyik mozog – a fény terjedése alapján sem –, ezért Einstein javaslata alapján kimondhatjuk, az éter létezésének feltételezése indokolatlan. A fény sebessége bármely egyenes vonalú egyenletesen mozgó rendszerben c.

A speciális relativitási elv: az egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző rendszerek egyenértékűek a természeti törvények leírása szempontjából.

Galilei-transzformáció (1)

Kérdés: Összeegyeztethető-e a Galilei-transzformáció a fénysebesség inerciarendszertől való függetlenségével?

K rendszerben:

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

K' rendszerben:

$$c' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$$

A két inerciarendszert összekötő transzformációk:

$$\Delta x' = \Delta x - v\Delta t$$

$$\Delta x = \Delta x' + v\Delta t'$$

$$\Delta t = \Delta t'$$

Galilei-transzformáció (2)

A K'-beli c' fénysebesség kapcsolatba hozható a K-beli c fény-sebességgel

$$c' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t} = c - v$$

Következtetés: a Galilei-transzformáció a fénysebesség rendszer-függetlenségével nem egyeztethető össze.

Lorentz-transzformáció (1)

A fénysebesség rendszerfüggetlenségének biztosítása:

K rendszer: $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t$
K' rendszer: $\Delta x', \Delta y', \Delta z', \Delta t'$

A két rendszert összekötő transzformációtól elvárjuk, hogy
a, Az egyik rendszerben egyhelyű és egyidejű esemény a másik rendszerben is egyhelyű és egyidejű legyen.
b, A $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t$ koordinátákat az $\Delta x', \Delta y', \Delta z', \Delta t'$ koordináták függvényében ugyanolyan alakú függvény adja meg mint fordítva.
c, A $v \ll c$ határesetben a transzformáció menjen át a Galilei-transzformációba.
d, A fénysebesség minkét rendszerben egyezzen meg.

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Lorentz-transzformáció (2)

Az elvárásnak megfelelő transzformáció:

$$\Delta x = k(\Delta x' + v\Delta t')$$

$$\Delta x' = k(\Delta x - v\Delta t)$$

$$\Delta y = \Delta y' \qquad \Delta z = \Delta z'$$

A *k* egyelőre ismeretlen konstans.
Látható, hogy ha Δx'=0 és Δt'=0, akkor Δx=0 és Δt=0 teljesül, azaz, ha két esemény a K' rendszerben egyhelyű és egyidejű, akkor az a K rendszerben is az.

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Lorentz-transzformáció (3)

Alkalmazzuk a formulákat a fényre. Ekkor fenn kell álljanak az alábbi összefüggések:

$$\Delta x = c\Delta t$$

$$\Delta x' = c\Delta t'$$

Ekkor:

$$\Delta x = k\Delta x'(1 + \frac{v}{c})$$

$$\Delta x' = k\Delta x(1 - \frac{v}{c})$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Lorentz-transzformáció (4)

Egyszerűsítések után:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Látható, hogy ha $v \to 0$, akkor k $\to$ 1, azaz a Galilei-transzformáció-hoz jutunk.

Továbbá a rendszerbeli idők:

$$\Delta t = k\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right)$$

$$\Delta t' = k\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)$$

Lorentz-transzformáció (5)

Ellenőrzés: A fény sebessége a két rendszerben → Indítsunk egy *c* sebességű fénysugarat a K rendszerben és nézzük meg, milyen sebességűnek adódik a K' rendszerben.

$$c' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{k(\Delta x - v\Delta t)}{k\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

$$= \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c^2}c} = c$$

Következésképp megállapítható, hogy a Lorentz-transzformáció biztosítja a fénysebesség rendszerfüggetlenségét.

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Egyidejűség és okság (1)

Legyen a K' rendszerben két egyidejű $\Delta t'=0$, de nem-egyhelyű $\Delta x'\neq 0$ esemény. A transzformációs formulákból következik:

$$\Delta t = k\frac{v}{c^2}\Delta x'$$

A két esemény a K rendszerben nem egyidejű! Következésképp megállapítható, hogy az egyidejűség vonatkoztatási rendszertől függ.

Egyidejűség és okság (2)

Kérdés: nem fordulhat-e meg az ok-okozati összefüggés?

Ennek eldöntésére a K rendszerben indítsunk egy *w* sebességű jelet két, egymástól Δx távolságra lévő pont között. A szükséges idő:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{w}$$

A K'-beli megfigyelő ezt az időt

$$\Delta t' = k\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) = k\Delta t\left(1 - \frac{vw}{c^2}\right)$$

hosszúságúnak fogja mérni, amely csak úgy lehetne negatív, ha a hatás, vagy vonatkoztatási rendszer sebessége nagyobb lenne mint a fény sebessége!

Idődilatáció

A K' rendszerben tekintsünk két egyhelyű $\Delta x'=0$, de nem egyidejű $\Delta t' \neq 0$ eseményt. A K rendszerből a két esemény közötti időt mérve

$$\Delta t = k\Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

időtartam adódik.

A müon részecskék – kb. 30km magasan keletkeznek nagyenergián történő ütközésekben – esetén a felezési idő $(\Delta t'=)\tau=2\cdot10^{-6}$ s. Mégis eljutnak a Földfelszíni detektorokhoz. Sebességük a fény-sebességhez közeli: 0,9999c. A földi megfigyelő a részecskét észleli, élettartamát $\approx 10^{-4}$ s-nak méri! →

Távolság-kontrakció

A K' rendszerben nyugodjon egy $l_0 = \Delta x'$ hosszúságú rúd. A K rendszerben egyidejű leolvasást végezve ($\Delta t=0$) mérjük meg e hosszt. Azt tapasztaljuk, hogy

$$\Delta x' = l_0 = k\Delta x$$

azaz, a K-beli megfigyelő a rudat

$$\Delta x = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

hosszúságúnak fogja találni.

→ A müon a 30 km-es utat a saját rendszeréből csak 300 m-nek méri!

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Sebesség-transzformáció (1)

Mozogjon egy tömegpont u_x' sebességgel a K' rendszerben. A K rendszerbeli megfigyelő ezt mozgást

$$u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{k(\Delta x' + v\Delta t')}{k\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right)} = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{vu_x'}{c^2}}$$

sebességűnek észleli, ahol a K'-beli sebesség

$$u_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$$

Sebesség-transzformáció (2) – A Fizeau-kísérlet eredményének magyarázata

A Fizeau-kísérletben a folyadék *v* sebességgel áramlik. A folyadékhoz rögzített rendszer a K'. A fény sebessége a K' rendszerben $u_x' = c/n$. A K rendszerbeli megfigyelő ezt mozgást

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v\frac{c}{n}}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{nc}}$$

$$\approx \left(\frac{c}{n} + v\right)\left(1 - \frac{v}{nc}\right) \approx \frac{c}{n} + v - \frac{v}{n^2}$$

sebességűnek észleli.

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Sebesség-transzformáció (3)

Mozogjon egy tömegpont u_y' sebességgel a K' rendszerben. A K rendszerbeli megfigyelő ezt mozgást

$$u_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y'}{k\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right)} = \frac{u'_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

sebességűnek észleli, ahol a K'-beli sebesség

$$u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'}$$

Kérdések (1)

Mi a Coulomb- és a Lorentz-erő?
Mi a Biot-Savart-törvény?
Mit mond ki a Galielei-féle relativitási elv?
Mi a Galilei-féle transzformáció?
Mi a Fizeau-kísérlet eredménye?
Mi az éter fogalma és jelentősége?
Mi a Michelson-Morley-kísérlet alapgondolata? Mi a kísérlet eredménye?
Mit mond ki a speciális relativitási elv?
Mi a Lorentz-transzformáció, mik a kritériumok a transzformáció megalkotásához?
Miben áll az egyidejűség kérdése?
Miben áll az okság kérdése?
Mi az idődilatáció, mik a következményei?
Mi a távolságkontrakció, mik a következményei?

Kérdések (2)

Mi a sebesség-transzformáció, mik a következményei?

(folyt. köv.)

(A ilyen színnel írt kérdések a mélyebben érdeklődők részére vannak.)

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék