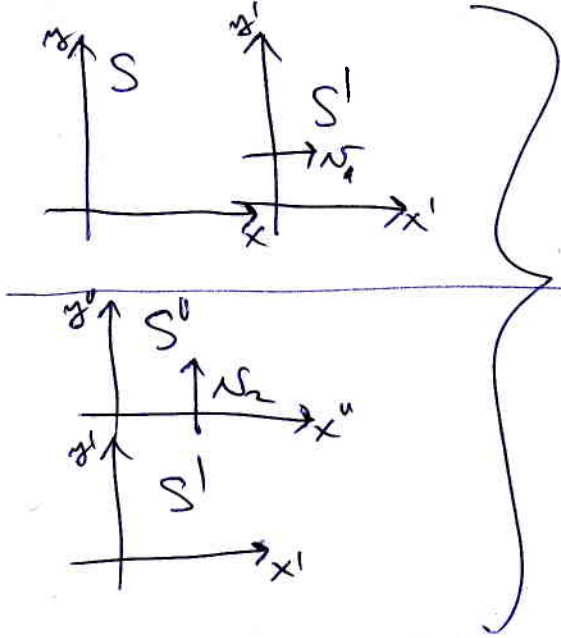
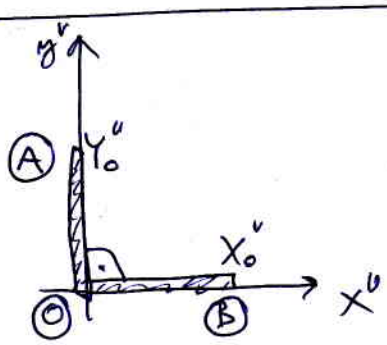


S''-be S-ből 2 egymás utáni (x ill. y irányú) Lorentz-boost-tal jutunk el.

S''-ben 2 rúd nyugszik.



Milyen irányúak a rudak S-ből nézve?

O, A, B: mérési események, a rudak végpontjánál, S-ből nézve ~~egyidejűen~~ ($t=0$-kor).

O: $x_0''=0,\ y_0''=0 \longrightarrow x_0'=0,\ y_0'=v_2 t' \longrightarrow$

$$\longrightarrow \boxed{x_0=v_1 t,\quad y_0=\frac{v_2(t-v_1 x_0)}{\sqrt{1-v_1^2}}}$$

A: $x_A''=0,\ y_A''=Y_0'' \longrightarrow x_A'=0,\ y_A'-v_2 t'=\sqrt{1-v_2^2}\,Y_0'' \longrightarrow$

$$\longrightarrow \boxed{x_A=v_1 t,\quad y_A=Y_0''\sqrt{1-v_2^2}+v_2\left(\frac{t-v_1 x_A}{\sqrt{1-v_1^2}}\right)}$$

B: $x''_B = X''_0,\ y''_B = 0 \longrightarrow x'_B = X''_0,\ y'_B = v_2 t' \longrightarrow$

$$\longrightarrow X''_0 = \frac{x_B - v_1 t}{\sqrt{1-v_1^2}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{x_B = X''_0\sqrt{1-v_1^2} + v_1 t,\quad y_B = v_2\left(\frac{t - v_1 x_B}{\sqrt{1-v_1^2}}\right)}$$

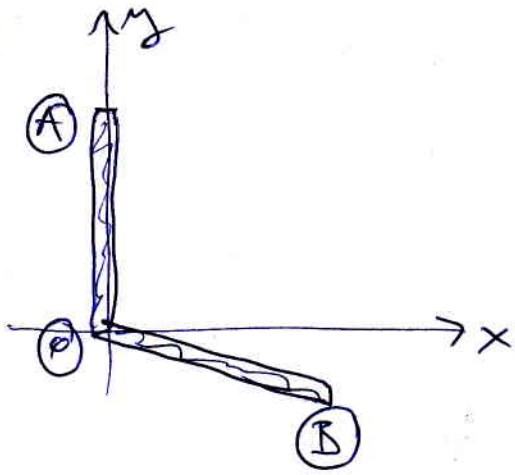
$t = 0 \Rightarrow$

O: $x_0 = 0,\ y_0 = \dfrac{v_2(0-0)}{\sqrt{\dots}} = 0 \Rightarrow \boxed{(0,0)}$

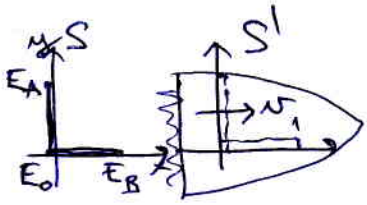
A: $x_A = 0,\ y_A = Y''_0\sqrt{1-v_2^2} + \emptyset \Rightarrow \boxed{\left(0, Y''_0\sqrt{1-v_2^2}\right)}$

B: $x_B = X''_0\sqrt{1-v_1^2},\ y_B = v_2\cdot\left(\dfrac{-v_1 X''_0 \cancel{\sqrt{\dots}}}{\cancel{\sqrt{\dots}}}\right) \Rightarrow \boxed{\left(X''_0\sqrt{1-v_1^2},\ -v_1 v_2 X''_0\right)}$

S-lód nerve tehát:



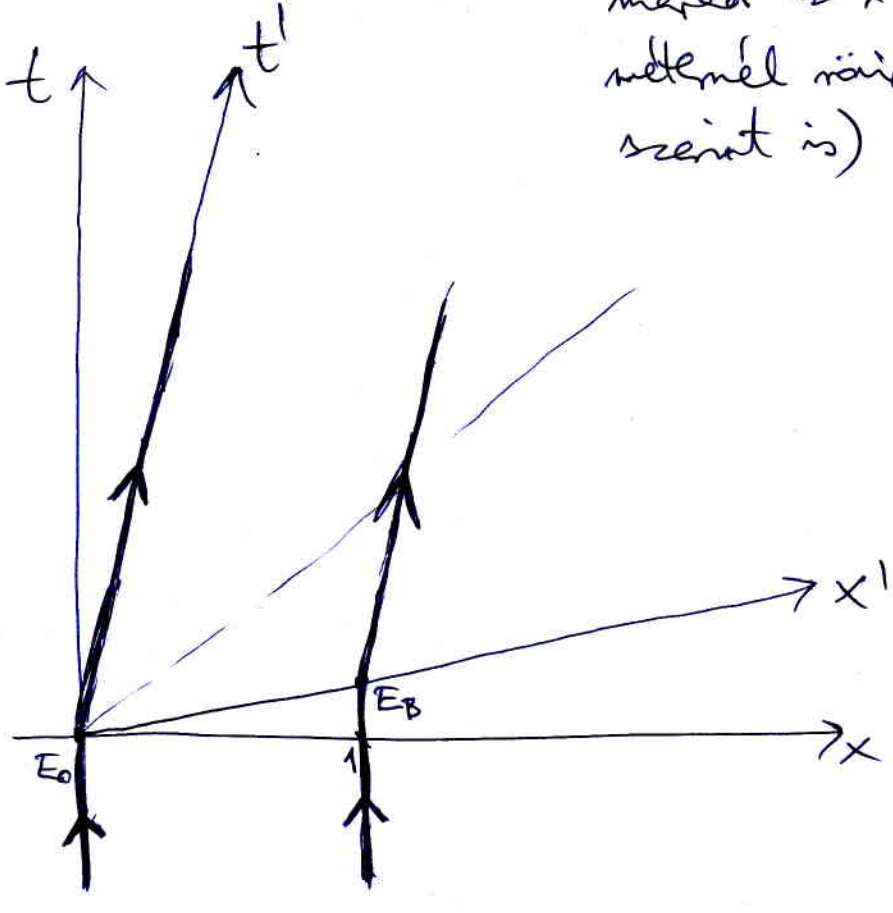
Fizikai megfontolás: Tfh. kezdetben a rúd S-ben nyugszik (és ⊥-es) [és pl. mellette rúd]

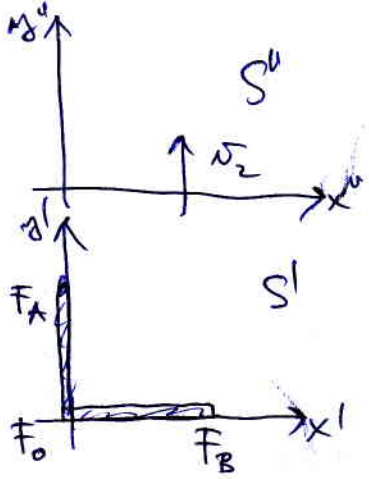


(1) S' a két rúdat „megjavul sodorja" (hirtelen jobbra megtöri őket): S'-ben egyidejűek az E_0, E_A, E_B lökési események.

S szerint: E_0 és E_A egyidejűek ⇒ a függ. rúd ∥ marad az y-tengellyel (és mégis hosszú)

E_0 és E_B nem egyidejűek ($t_{E_0} < t_{E_B}$) ⇒ de ez nem baj, a vízsz. rúd is ∥ marad az x-tengellyel (csak mégnél rövidebb lesz, S és S' szerint is)





F_0, F_A, F_B: ugyanott létezni események,

pl. S' szerint <u>egyszerre</u>, y'-irányban

(S'' innen tovább a mondatot)

S szerint: F_0 és F_A <u>egyidejűek</u> ⇒ **a** függ. nád || marad továbbra is az y-tengellyel

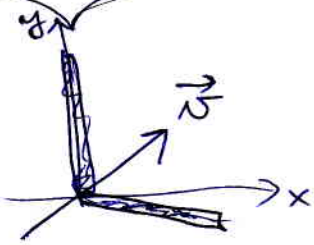
(csak most kontrahálódik)

F_0 és F_B <u>nem</u> egyidejűek ($t_{F_0} < t_{F_B}$) ⇒

⇒ a vízsz. nád <u>nem</u> || az x-tengellyel

mert a B pont később lett felfelé meglökve, S szerint)

S szerint:



(mint a ② oldalon látható)

<u>S szerint</u> tehát S'' y''-tengelye || az y-tengellyel

S'' x''-tengelye <u>nem</u> || az x-tengellyel.

Hogyan látja ezt a helyzetet S''?

S'' szerkezete (ill. mérése): most a fenti „filmet" visszafelé játszuk le! (az időt $\hat{t}$-pel jelölöm)

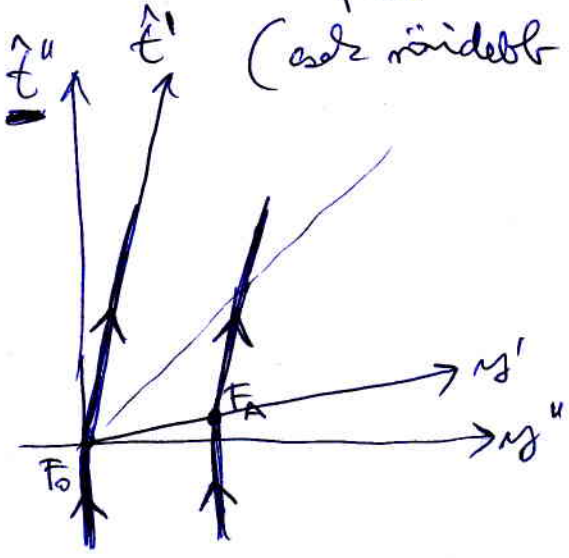
Kiindulás: a két nád az S'' x''-, y''-tengelyei irányában áll (ezt tudjuk a ⊕ tetején levő ábrából).

F_0, F_A, F_B: (∞ gyors) „találkozási" események, amelyek az S''-ben nyugvó mintázat az S'-ben nyugvó mintával fedik.

S' szerint ezek az események (a visszafelé lejátszott filmen is) egyidejűek.

⟹ S'' szerint: F_0 és F_B egyidejűek ⇒ a viszs. nád ∥ marad az x''-tengellyel a fedés után

F_0 és F_A nem egyidejűek ⇒ de ez nem baj, a függ. nád ∥ marad az y''-tengellyel (csak rövidebb lesz, mint volt, S'' szerint)

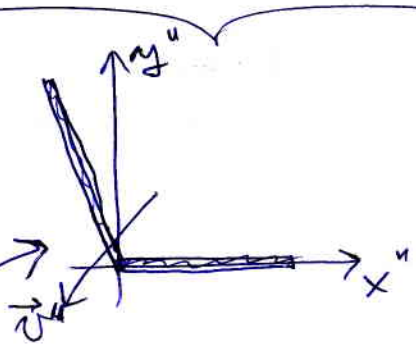


Az S'-ben nyugvó mdszt most újabb „eltérő" időzés érik (E_0, E_A, E_B), amelyek S'-ben egyidejűek, és amelyek miatt a nád S-ben nyugvó lesz.

S'' szerint: E_0 és E_B egyidejűek $\Rightarrow$ a vízsz. nád $\parallel$ marad az x''-tengellyel!

E_0 és E_A nem egyidejűek ($\hat{t}''_{E_0} < \hat{t}''_{E_A}$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ a függ. nád nem marad $\parallel$ az y''-tengellyel!
(mert az A pont később lett leforgatva, S'' szerint)

S'' szerint: a mdsz helyzete kezdetben ilyen volt



!

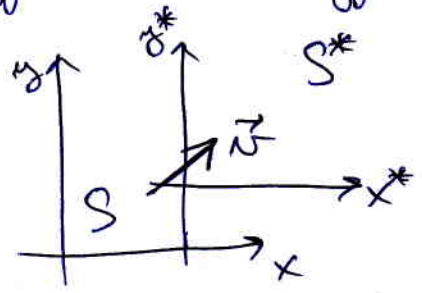
S'' szerint tehát S y-tengelye nem $\parallel$ az y''-tengellyel!
S x-tengelye $\parallel$ az x''-tengellyel!

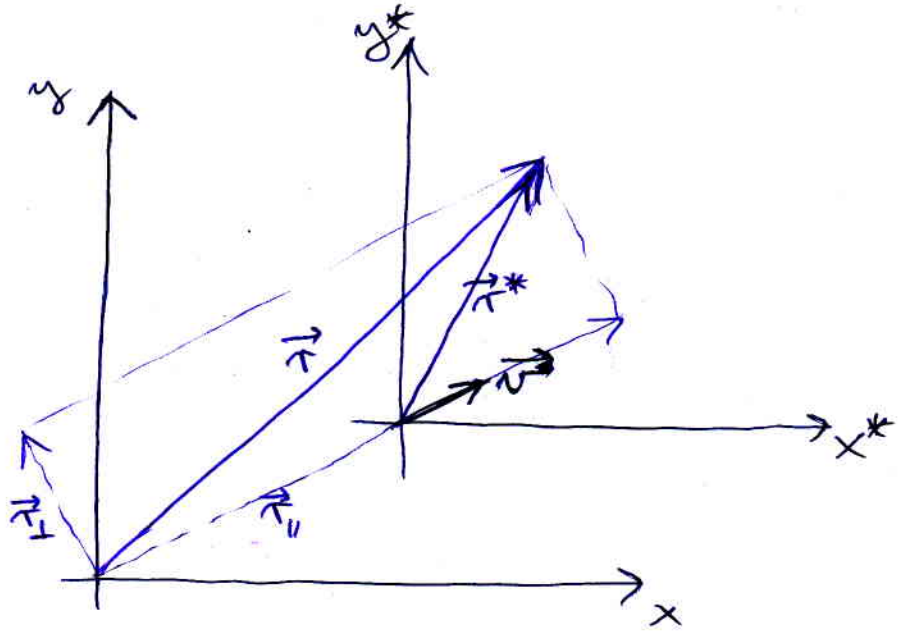
Összevetve a 4-gyel látható, hogy a tengelyek $\parallel$-sága „nem kommutatív"! (ez később a 3D Minkowski-diagramokból is egyértelműen látszani fog)

Ez a fonsa insztrukció sejteti, hogy az S és S* közötti kapcsolat nem egy egyszerű Lorentz-boost.

Nézzük ezt precízebben.

Hogyan néz ki egy általános irányú Lorentz-boost?





$$\vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel$$

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad t^* = \gamma\left(t - r_\parallel v\right) \\ &(2)\quad \vec{r}^* = \vec{r}_\perp + \gamma\left(\vec{r}_\parallel - \vec{v}t\right) \end{aligned}\right\} \qquad \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)$$

(logikus, az x-irányú Lorentz-boost alapján)

(1)-ben: $r_\parallel v$ helyett $\vec{r}\cdot\vec{v}$ írható

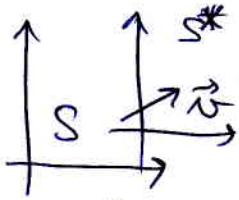
$$\left.\begin{aligned} &(2)\text{-ben: } \vec{r}_\parallel = r_\parallel \cdot \frac{\vec{v}}{v} = \frac{(\vec{r}\cdot\vec{v})}{v}\frac{\vec{v}}{v} = \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v} \\ &\vec{r}_\perp = \vec{r} - \vec{r}_\parallel \end{aligned}\right\}$$

---

(1): $\boxed{t^* = \gamma\left(t - \vec{r}\cdot\vec{v}\right)}$

(2): $\boxed{\vec{r}^* = \vec{r} + (\gamma-1)\vec{r}_{\parallel} - \gamma\vec{v}t = \vec{r} + \left(\frac{\gamma-1}{v^2}(\vec{r}\cdot\vec{v}) - \gamma t\right)\vec{v}}$

Tehát a $\vec{v}$ irányú Lorentz-boost:



$\vec{v} = (v_x, v_y)$

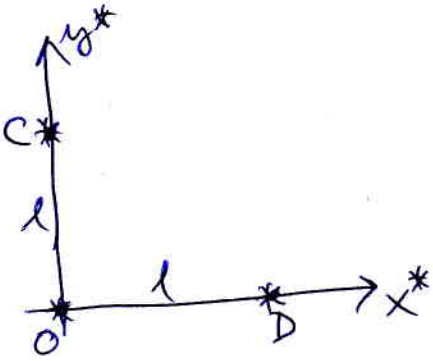
$$\boxed{\begin{pmatrix} t^* \\ x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v_x & -\gamma v_y \\ -\gamma v_x & 1+(\gamma-1)\frac{v_x^2}{v^2} & (\gamma-1)\frac{v_x v_y}{v^2} \\ -\gamma v_y & (\gamma-1)\frac{v_x v_y}{v^2} & 1+(\gamma-1)\frac{v_y^2}{v^2} \end{pmatrix}}_{\Lambda} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix}} \quad [1]$$

megfigyelés: Λ szimmetrikus

Kérdés: milyen irányúak mérik az x^*-, y^*-tengelyeket az S?

[ezt majd összevetjük a ④ dollal (S^* tengelyei S szerint)]

S^*:



3 fényvillanás:

$O: (x_O^*, y_O^*) = (0,0)$

$C: (x_C^*, y_C^*) = (0, l)$

$D: (x_D^*, y_D^*) = (l, 0)$

S-ben mérve legyen a fényvillanások egyidejűek ($t \overset{!}{=} 0$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ úgy kijelölik az x^*-, y^*-tengelyek állását (S-ben mérve)

Az [1] inverzét felírva ($v_x \to -v_x$, $v_y \to -v_y$ helyettesítéssel):

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v_x & \gamma v_y \\ \gamma v_x & 1+(\gamma-1)\frac{v_x^2}{v^2} & (\gamma-1)\frac{v_x v_y}{v^2} \\ \gamma v_y & (\gamma-1)\frac{v_x v_y}{v^2} & 1+(\gamma-1)\frac{v_y^2}{v^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t^* \\ x^* \\ y^* \end{pmatrix}$$

---

tehát:

$$\left.\begin{aligned} t_O &= \gamma t_O^* \overset{!}{=} 0 \\ x_O &= \gamma v_x t_O^* \\ y_O &= \gamma v_y t_O^* \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{x_O = 0,\ y_O = 0}$$

$$\left.\begin{aligned} t_D &= \gamma t_D^* + \gamma v_x l \overset{!}{=} 0 \\ &\hookrightarrow t_D^* = -v_x l \\ x_D &= \gamma v_x t_D^* + \left[1+(\gamma-1)\frac{v_x^2}{v^2}\right] l \\ y_D &= \gamma v_y t_D^* + (\gamma-1)\frac{v_x v_y}{v^2} l \end{aligned}\right\} \to \dots \to \boxed{\begin{aligned} x_D &= l\left[-\gamma v_x^2 + 1 + \gamma\frac{v_x^2}{v^2} - \frac{v_x^2}{v^2}\right] \\ y_D &= l\left[\frac{v_x v_y}{v^2}\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\right] \end{aligned}}$$

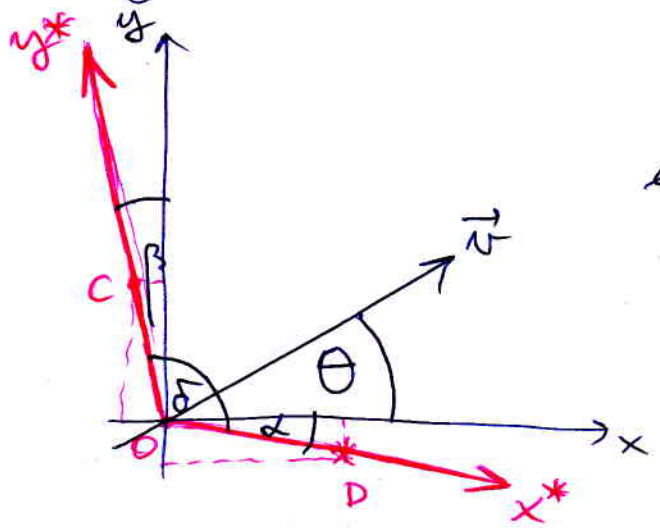
(neg.!)

Hasonlóan:

(meg.)

$$\hookrightarrow \dots \rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_c &= \ell\left[\frac{v_x v_y}{v^2}\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\right] \\ y_c &= \ell\left[-\gamma v_y^2 + 1 + \gamma\frac{v_x^2}{v^2} - \frac{v_y^2}{v^2}\right] \end{aligned}}$$

S-ből tehát ilyenek működnek az x^*-, y^*-tengelyek:



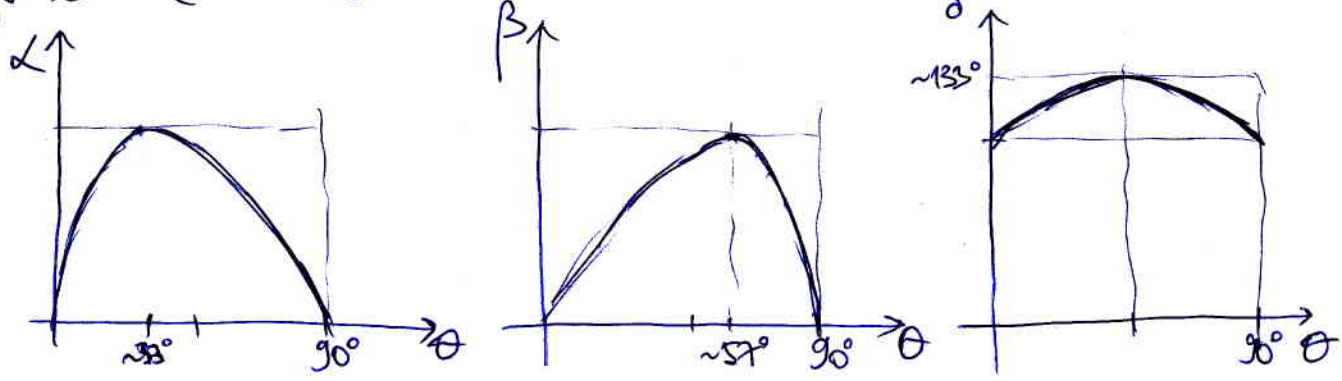
„kilapulnak" a tengelyek

Közbevetett megjegyzés: ez más ábra mint a (4) oldalon! ⇒
⇒ S'' és S* egymáshoz képest el vannak fordulva.

Mennyire „lapulnak ki" az x^*-, y^*-tengelyek?

pl. $|\vec{v}| \overset{!}{=} 0{,}9$

θ fgv-ében (MATLAB):



(megj.: $\theta = 0°$-nál és $\theta = 90°$-nál $\delta = 90°$, ahogy várjuk)

Most térjünk a formai lizamítást arra, hogy egy ~~[illegible]~~ térszerű Lorentz-boost és egy függ. Lorentz-boost egymásutánja (ez vezetett el S-ből S''-ig) nem azonos [és nem is írható fel] egyetlen $\vec{v}$ irányú Lorentz-boostként (ez vezetett el S-ből ferde S^*-ba).

$S \to S'$: $\quad \vec{v}_1 = (v_1, 0)$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1 v_1 & 0 \\ -\gamma_1 v_1 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda_1} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

$S' \to S''$: $\quad \vec{v}_2{}' = (0, v_2)$ $\quad v_2$: S'-hez képesti seb.!

$$\begin{pmatrix} t'' \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & -\gamma_2 v_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_2 v_2 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}}_{\Lambda_2} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Kérdés: mivel

$$\begin{pmatrix} t'' \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \Lambda_2 \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \Lambda_2 \Lambda_1 \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix},$$

S'' megkapható-e egyetlen Lorentz-boosttal S-ből? Azaz $\underline{\Lambda_2 \Lambda_1}$ felírható-e olyan alakban, mint Λ (a ⑧ ddalon), általános (v_x, v_y) választással?

$$\Lambda_2 \Lambda_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & -\gamma_2 v_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_2 v_2 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}}_{\text{szimm.}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1 v_1 & 0 \\ -\gamma_1 v_1 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{szimm.}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_1 \gamma_2 & -\gamma_1 \gamma_2 v_1 & -\gamma_2 v_2 \\ -\gamma_1 v_1 & \gamma_1 & \boxed{0} \\ -\gamma_1 \gamma_2 v_2 & \boxed{\gamma_1 \gamma_2 v_1 v_2} & \gamma_2 \end{pmatrix} \qquad [2]$$

$\neq$ $\neq$

<u>nem szimmetrikus</u>! (pedig Λ az!) $\Longrightarrow$

$\Rightarrow$ $\Lambda_2 \Lambda_1$ <u>nem lehet</u> egyszerű Lorentz-boost, csak egy forgás Lorentz-boost és egy <u>forgatás</u> egymásutánja!

$\Downarrow$

$$\Lambda_2 \Lambda_1 = \Lambda^{*} R^{*}, \text{ ahol}$$

$$\Lambda^{*} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v_x & -\gamma v_y \\ -\gamma v_x & A_x & C \\ -\gamma v_y & C & A_y \end{pmatrix}$$

, mint a (8) oldalon,
[A_x, A_y, C: rövidítő jelölések]

és

$$R^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha^{*} & \sin\alpha^{*} \\ 0 & -\sin\alpha^{*} & \cos\alpha^{*} \end{pmatrix} \quad \text{(fogatás)}$$

Kérdés: [2]-t a fenti alakban felírva, $v_x = ?$, $v_y = ?$, $\alpha^{*} = ?$

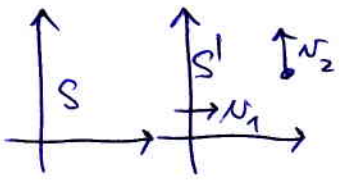
$$\boxed{R^{*}\Lambda^{*} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v_x & -\gamma v_y \\ -\gamma\cos\alpha^{*} v_x - \gamma\sin\alpha^{*} v_y & A_x\cos\alpha^{*} + C\sin\alpha^{*} & C\cos\alpha^{*} + A_y\sin\alpha^{*} \\ \gamma\sin\alpha^{*} v_x - \gamma\cos\alpha^{*} v_y & -A_x\sin\alpha^{*} + C\cos\alpha^{*} & -C\sin\alpha^{*} + A_y\cos\alpha^{*} \end{pmatrix}} \quad [3]$$

[2] és [3] összevetéséből:

1. sor:

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \gamma_1\gamma_2 \\ -\gamma v_x &= -\gamma_1\gamma_2 v_1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{v_x = v_1} \quad \text{(szemléletes)}$$

$$-\gamma v_y = -\gamma_2 v_2 \longrightarrow \boxed{v_y = \frac{\gamma_2}{\gamma} v_2 = \frac{v_2}{\gamma_1}} \quad \text{(szemléletes)}$$



$$\boxed{v_y = \frac{v_2\sqrt{1-v_1^2}}{1-0\cdot v_1} = v_2\sqrt{1-v_1^2}}$$

2. sor, 3. sor első-első eleme:

$$\left.\begin{aligned} -\gamma_1\gamma_2 v_1 \cos\alpha^* - \gamma_2 v_2 \sin\alpha^* &= -\gamma_1 v_1 \\ \gamma_1\gamma_2 v_1 \sin\alpha^* - \gamma_2 v_2 \cos\alpha^* &= -\gamma_1\gamma_2 v_2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \ldots \longrightarrow \boxed{\cos\alpha^* = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\cdot\frac{\gamma_1 v_1^2 + \gamma_2 v_2^2}{\gamma_1^2 v_1^2 + v_2^2}}$$

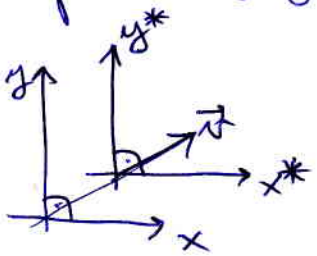
$$\boxed{\sin\alpha^* = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\cdot\frac{v_1 v_2(1-\gamma_1\gamma_2)}{\gamma_1^2 v_1^2 + v_2^2}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha^* = \frac{v_1 v_2(1-\gamma_1\gamma_2)}{\gamma_1 v_1^2 + \gamma_2 v_2^2}}$$

[4]

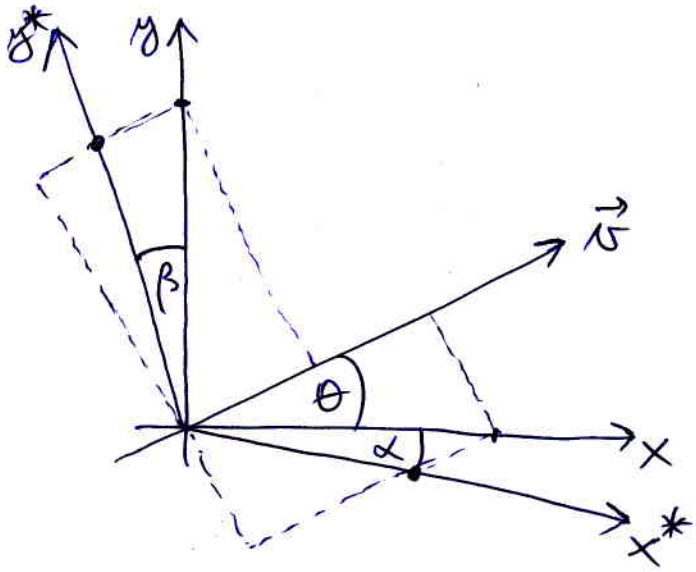
Tehát megkaptuk, hogy a két Lorentz-boost egymásutánja (Λ_1, Λ_2) milyen (v_x, v_y) sebességű egyetlen Lorentz-boost és milyen α^* szögű elfordulás egymásutánjával ekvivalens.

Van-e szemléletes fizikai kép a (10) oldal felső ábrájára (kilapult tengelyek)?



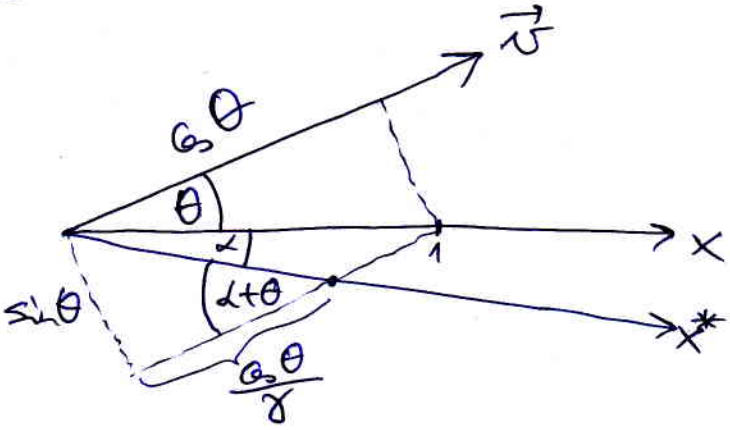
← rossz (ösvény) rajz, senki sem mér ilyet, de jelzi, hogy az x^*-, y^*-tengelyeket kijelölő mérőrudak merre szegődnek.

S ezt méri (ld. 10 ddel):



S szerint az x^*-, y^*-tengelyeket kijelölő mértékrendszerben: $\vec{v}$-re ⊥ komponensük megmarad, $\vec{v}$-vel ∥ komponensük $\frac{1}{\gamma}$-szorosára rövidül.

α számítása:

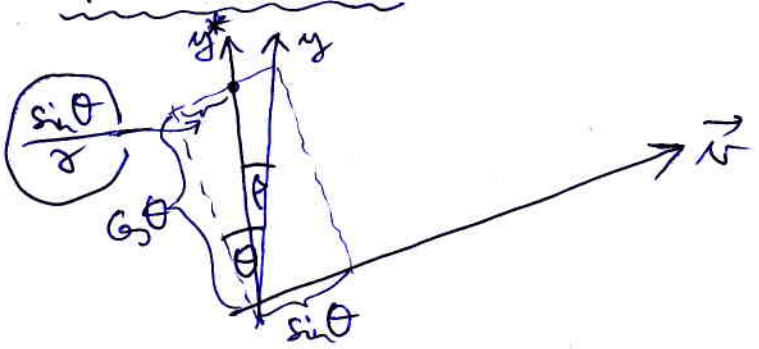


$$\operatorname{tg}(\alpha+\theta) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\gamma$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta} = \operatorname{tg}\theta\cdot\gamma \longrightarrow \boxed{\operatorname{tg}\alpha = (\gamma-1)\frac{\operatorname{tg}\theta}{1+\gamma\operatorname{tg}^2\theta}}$$

(ez van ábrázolva a 10 o. alján)

β számítása:



$$\operatorname{tg}(\theta-\beta)=\frac{\sin\theta}{\gamma\cos\theta}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\theta-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\beta}=\frac{1}{\gamma}\operatorname{tg}\theta \longrightarrow \boxed{\operatorname{tg}\beta=(\gamma-1)\frac{\operatorname{tg}\theta}{\gamma+\operatorname{tg}^2\theta}}$$

(ez von ábrázolva a 10. o. alján)

Hogy lehet, hogy

(1) S és S' között igaz, hogy

az x-tengely || x'-tengely
y-tengely || y'-tengely } S és S' szerint is

(2) S' és S'' között igaz, hogy

x'-tengely || x''-tengely
y'-tengely || y''-tengely } S' és S'' szerint is

DE:

(3) S és S'' között:

x-tengely || x''-tengely
y-tengely ∦ y''-tengely } S'' szerint

x-tengely ∦ x''-tengely
y-tengely || y''-tengely } S szerint

?

Válasz (amellett, hogy algebrailag is, szemléletesen fizikailag is megindokoltuk):
a 3D Minkowski-diagramból is leolvasható!

3D Minkowski-diagram: egyetlen 3D ábrán ábrázolja a kétidő (x,y,t), (x',y',t'), (x'',y'',t'') és (x^*,y^*,t^*) irányait, kalibrált tengelyekkel.

(Lorentz_generaldirection_Wigner_rotation2.m)
A matlab-ban futtatható, így sok minden leolvasható róla.

(megj.: S^* az S-ből közvetlenül ferde Lorentz-boosttal kapott rdsz. A sebessége olyan, hogy S^* és S'' origója együtt mozog.)

A 3D Minkowski-diagramról a következők olvashatók le:
(S: kék, S': piros, S'': zöld, S^*: fekete)

---

[1] Amikor azt szeretnénk tudni, hogy az S' tengelyeit milyen irányúak, mekkorudait milyen hosszúnak mérik a többiek, akkor a t'-tengellyel (piros) nézzük szembe

Ekkor látszik (közvetlenül, azonnal):

(a) S szerint:

- S' x'-metszőjén kontrahálódik, y'-metszőjén nem
- x-teng. $\parallel$ x'-teng., y-teng. $\parallel$ y'-teng.

(b) S'' szerint:

- S' y'-metszőjén kontrahálódik, x'-metszőjén nem
- x''-teng. $\parallel$ x'-teng., y''-teng. $\parallel$ y'-teng.

(c) S^* szerint:

- x^*-teng. $\nparallel$ x'-teng., y^*-teng. $\nparallel$ y'-teng.

---

[2] Amikor azt szeretnénk tudni, hogy az S tengelyeit, metszőjét miképpen mutatja a táblák, akkor a t-tengellyel (rés) nézünk szembe.

Ekkor látszik:

(a) S' szerint:

- S x-metszőjén kontrahálódik, y-metszőjén nem
- x'-teng. $\parallel$ x-teng., y'-teng. $\parallel$ y-teng.

(b) S'' szerint: - S x-metszőjén kontrahálódik

$$\boxed{- x''\text{-teng.} \parallel x\text{-teng.},\ y''\text{-teng.} \nparallel y\text{-teng.}} \Leftarrow !$$

(c) S^* szerint:

- x^*-teng. $\nparallel$ x-teng., y^*-teng. $\nparallel$ y-teng.

---

[3] Amikor azt szeretnénk tudni, hogy az S'' és S^* tengelyeit, mértékegységeit milyenek mérik a díszlek, vagy a t''- v. t^*-tengellyel (zöld, ill. fekete) nézünk szembe

[ezek a tengelyek egybeesnek]

Eddig láttuk:

(a) S szerint:

– S'' y''-mértékegysége kontrahálódik

$\boxed{\text{– } x\text{-teng.} \nparallel x''\text{-teng.},\ y\text{-teng.} \parallel y''\text{-teng.}}$ ⟵ !

(b) S' szerint:

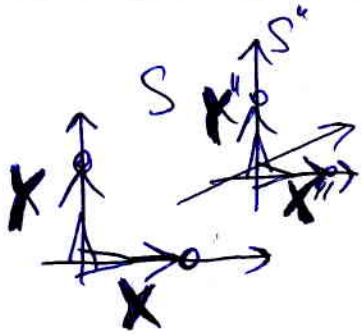
– S'' y''-mértékegysége kontrahálódik, x''-mértékegysége nem

– x'-teng. $\parallel x''$-teng., y'-teng. $\parallel y''$-teng.

– x'-teng. $\nparallel x^*$-teng., y'-teng. $\nparallel y^*$-teng.

(c) S'' szerint és S^* szerint is:

S'' és S^* tengelyei el vannak egymáshoz képest forgatva



X, Y: emberek, mértékegyenek S-ben
X'', Y'': —"— —"— S''-ben

X, X'', Y, Y'': egy díszben vannak.

Párbeszédek:

1) X, Y-nek: „Merőleges vagyunk." „Szerintem is."

2) X'', Y''-nek: „— || — " „— || — "

5) X, X''-nek: „Nem vagyunk ||-ak." „De!" !

4) Y, Y''-nek: „||-ak vagyunk." „Nem!" !

3) X, Y''-nek: „⊥-ek vagyunk." „Szerintem is."

6) Y, X''-nek: „Nem vagyunk ⊥-ek." „Szerintem sem." !

ld. ④, ⑥ o. dbrát!

Még egy kicsit elemezzük S és S'' egymáshoz viszonyított mozgását. S'' sebessége S-ből mérve:

$$\boxed{\vec{v} = (v_x, v_y)}$$

S sebessége S''-ből mérve:

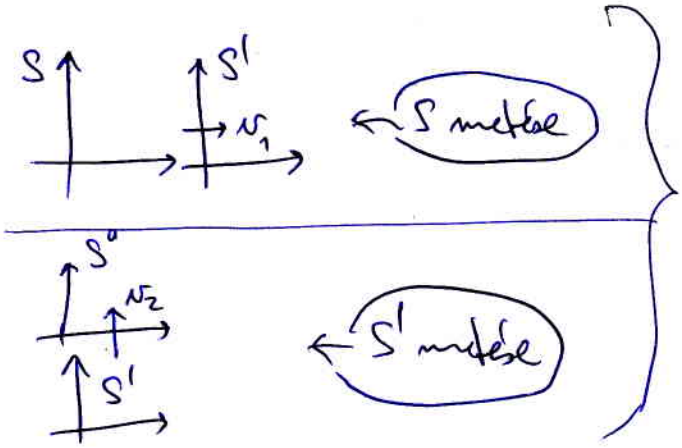
$$\boxed{\vec{v}'' = (v_x'', v_y'')}$$

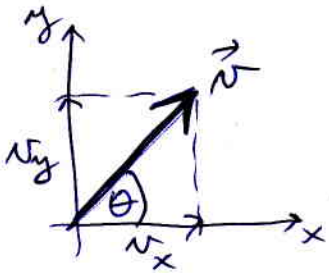
Mivel S''-t Lorentz-boost + rotáció adja S-hez képest, azt várjuk, hogy

$$|\vec{v}| = |\vec{v}''|, \text{ de } v_x \neq v_x'' \text{ és } v_y \neq v_y'' \quad (\text{ill. } \theta \neq \theta'')$$

Ellenőrizzük:

(1) S'' sebessége S szerint:





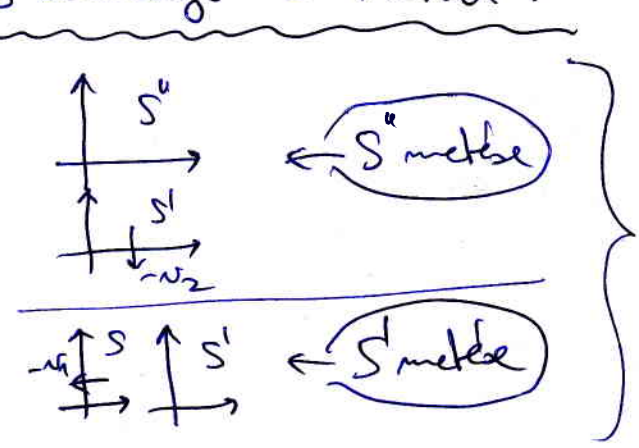
$$\boxed{v_x = v_1}$$

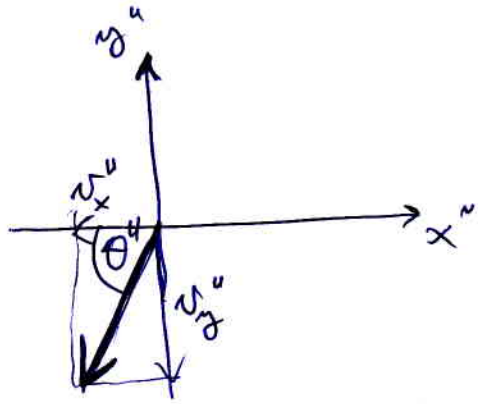
$$\boxed{v_y = v_2\sqrt{1-v_1^2}} \leftarrow \text{(seb. transf.)}$$

$$\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = \sqrt{v_1^2+v_2^2(1-v_1^2)} = \sqrt{v_1^2+v_2^2-v_1^2v_2^2}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \frac{v_2\sqrt{1-v_1^2}}{v_1} = \frac{v_2}{\gamma_1 v_1}}$$

(2) S sebessége S'' szerint:





$$\boxed{v_x'' = -v_1\sqrt{1-v_2^2}} \leftarrow \text{(seb. transf.)}$$

$$\boxed{v_y'' = -v_2}$$

$$\boxed{|\vec{v}''| = \sqrt{v_x''^2+v_y''^2} = \sqrt{v_1^2(1-v_2^2)+v_2^2} = \sqrt{v_1^2+v_2^2-v_1^2v_2^2}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta'' = \frac{v_2}{v_1\sqrt{1-v_2^2}} = \frac{v_2\gamma_2}{v_1}}$$

Tehát $|\vec{v}| = |\vec{v}''|$, de $\theta' \neq \theta''$

Érdekesség: Mennyi $\Theta - \Theta''$? (ennek nem igazán van fiz. tartalma, de mégis szemléletes ki)

$$\boxed{\operatorname{tg}(\Theta - \Theta'')} = \frac{\operatorname{tg}\Theta - \operatorname{tg}\Theta''}{1 + \operatorname{tg}\Theta \operatorname{tg}\Theta''} = \frac{\frac{v_2}{\gamma_1 v_1} - \frac{v_2 \gamma_2}{v_1}}{1 + \frac{v_2}{\gamma_1 v_1} \cdot \frac{v_2 \gamma_2}{v_1}} =$$

$$= \boxed{\frac{v_1 v_2 (1 - \gamma_1 \gamma_2)}{\gamma_1 v_1^2 + \gamma_2 v_2^2}} \; !$$

vö. 14 oldal, [4]

$$\boxed{\alpha^{*} = \Theta - \Theta''}$$

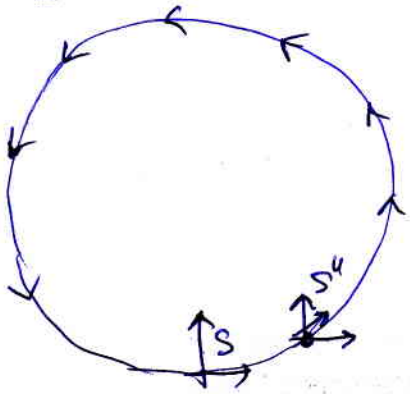
ez egyáltalán nem triviális eredmény!

S'' elfordulása S-hől mérve

az S-hől mért sebesség és az S''-hől mért sebesség szögeinek (különböző vonatkoztatási rdsz-ben mérjük őket) a különbsége, „összvér" mennyiség

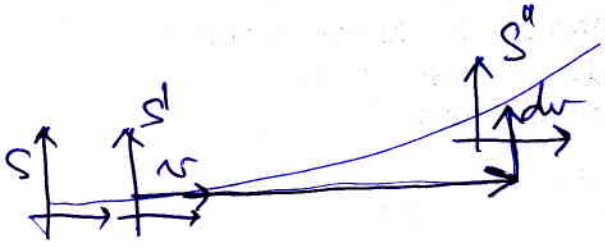
Emiatt a (nem triviális) eredmény miatt jogos, hogy a Thomas-precesszió szemléletes képzete töltődése $(\Theta - \Theta'')$-hől indul ki, és ez vezi a Wigner-rotáció szögeinek (csak indítás nélkül).

THOMAS-PRECESSZIÓ:



egy giroszkóp (amit lokálisan mindig elfordulás nélküli Lorentz-transzformációval lírunk oldalt) egy teljes kör megtétele után merőleges szöggel fog mégis elfordulni S-hez képest?

A mozgás kis kerdeti szakaszára alkalmazhatjuk az eddigi $S \to S' \to S''$ modellt:



S' v-vel mozog jobbra (S-ben mérve), aztán S'' dv-vel mozog felfelé (S'-ben mérve) (de ez most S-ben mérve is ugyanekkora sebesség, mert $dv \ll v < c$).

Mennyivel van elfordulva S'' S szerint? ($d\alpha^{\circledast} = ?$)

A (14) o. [4] képletei alkalmazhatók, azaz

$$\left.\begin{array}{l} v_1 \to v \\ v_2 \to dv \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \gamma_1 \to \gamma \\ \gamma_2 \to 1 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{d\alpha^{\circledast} \approx \sin d\alpha^{\circledast} \approx \operatorname{tg} d\alpha^{\circledast} \approx \frac{v\,dv\,(1-\gamma)}{\gamma v^2}} =$$

$$= \boxed{\frac{1-\gamma}{\gamma}\,\frac{dv}{v}}$$

(dv-ben csak az 1. rendű tagokat hagytuk meg)

Fontos gondolat: A giroszkóp $d\mathcal{L}^{\circledast}$ elfordulását a pálya alsó szakaszán ütközi fel, de azután tart a körpályán, mindenhol ugyanekkora $d\mathcal{L}^{\circledast}$ elfordulás tartozik (S-ben mérve) minden adott dv-hez, mert az adott helyen számított $d\mathcal{L}^{\circledast}$ elfordulás csakis azzal kell hogy legyen attól, hogy az S kard. tengelyei épp milyen orientációjúak ahhoz a helyhez képest (a kard. tengelyek orientációja ui. tetszőleges választású).

$$\Downarrow$$

A teljes kör alatti teljes szögelfordulás: $\boxed{\mathcal{L}^{\circledast} = \int d\mathcal{L}^{\circledast}}$

$$\boxed{d\mathcal{L}^{\circledast} = \frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{dv}{v} = \left(\sqrt{1-v^2}-1\right)\frac{dv}{v}}, \quad \text{ahol} \quad \boxed{dv = a_{cp}\,dt = \frac{v^2}{R}dt}$$

$$\boxed{d\mathcal{L}^{\circledast} = \frac{\left(\sqrt{1-v^2}-1\right)v}{R}dt}$$

Tfh. v kicsi ($\ll 1$). Ekkor

$$\sqrt{1-v^2} \approx 1 - \frac{v^2}{2}$$

$$\boxed{d\mathcal{L}^{\circledast} \approx -\frac{v^3}{2R}dt}$$

1 periódusra:

$$\boxed{\left|\mathcal{L}^{\circledast}\right| \approx \frac{v^3}{2R}\int_T dt = \frac{v^3}{2R}T = \frac{v^3}{2R}\cdot\frac{2R\pi}{v} \approx \pi v^2}$$

(hagyományos egységekben: $\left|\mathcal{L}^{\circledast}\right| \approx \pi\frac{v^2}{c^2}$, (összhangban a szakirodalommal))

<u>Megjegyzés</u>: a Thomas-precessió szögsebességének pontos képlete [részletes és érthető levezetés: ld. Robert Littlejohn]: $\underbrace{\omega_T = \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\frac{av}{c^2}}$

A fenti keretben ($v \ll c$):

$$\omega_T \approx \frac{1}{2}\frac{\frac{v^2}{R}\cdot v}{c^2} = \frac{v^3}{2Rc^2}$$

$$\left|\mathcal{L}^{\circledast}\right| = \omega_T T \approx \frac{v^3}{2Rc^2}\cdot\frac{2R\pi}{v} = \pi\frac{v^2}{c^2}$$ O.K.
