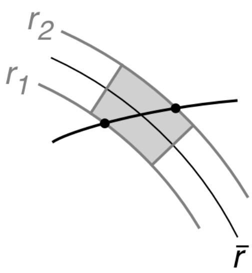
Az energia (E/m) és az impulzusmomentum (L/m), mint mozgásállandók.

Painlevé-Gullstrand-metrika az egyenlítői síkban:

$$d\tau^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)dT^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{r}}\,dTdr - dr^2 - r^2 d\varphi^2$$

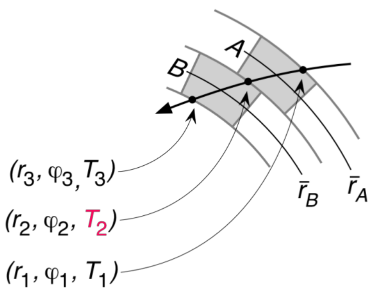
A P-G-metrika közelítő alakja egy adott kicsi téridőtartományban:

$$\Delta\tau^2 \approx \left(1-\frac{2M}{\bar{r}}\right)\Delta T^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{\bar{r}}}\,\Delta T\Delta r - \Delta r^2 - \bar{r}^2\Delta\varphi^2 \qquad \text{[PGK]}$$



1

A és B: két kicsi szomszédos téridőtartomány, amelyeken egy kő áthalad.



Rögzítsük a két szélső eseményt, és a középső esemény r- és φ-koordinátáját!

T_2 = ?, hogy a kő karóráján - a MÖE-vel összhangban - a <u>legtöbb idő teljen el</u> az 1. és 3. esemény között?

$$\tau_A \approx \left[\left(1-\frac{2M}{\bar{r}_A}\right)(T_2-T_1)^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{\bar{r}_A}}(T_2-T_1)(r_2-r_1) + \langle T_2 \cdot nélküli \cdot tagok\rangle\right]^{1/2}$$

$$\tau_B \approx \left[\left(1-\frac{2M}{\bar{r}_B}\right)(T_3-T_2)^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{\bar{r}_B}}(T_3-T_2)(r_3-r_2) + \langle T_2 \cdot nélküli \cdot tagok\rangle\right]^{1/2}$$

2

$$\tau_{össz} = \tau_A + \tau_B$$

MÖE $\rightarrow$ $$\frac{d\tau_{össz}}{dT_2} = 0$$

$$\frac{d\tau_A}{dT_2} + \frac{d\tau_B}{dT_2} = 0$$

$$\frac{d\tau_A}{dT_2} \approx \frac{2\left(1 - \frac{2M}{\bar{r}_A}\right)(T_2 - T_1) - 2\sqrt{\frac{2M}{\bar{r}_A}}(r_2 - r_1)}{2\sqrt{\ldots}} = \left(1 - \frac{2M}{\bar{r}_A}\right)\frac{(T_2 - T_1)}{\tau_A} - \sqrt{\frac{2M}{\bar{r}_A}}\frac{(r_2 - r_1)}{\tau_A}$$

$$\frac{d\tau_B}{dT_2} \approx \frac{-2\left(1 - \frac{2M}{\bar{r}_B}\right)(T_3 - T_2) + 2\sqrt{\frac{2M}{\bar{r}_B}}(r_3 - r_2)}{2\sqrt{\ldots}} = -\left(1 - \frac{2M}{\bar{r}_B}\right)\frac{(T_3 - T_2)}{\tau_B} + \sqrt{\frac{2M}{\bar{r}_B}}\frac{(r_3 - r_2)}{\tau_B}$$

3

$$\left(1 - \frac{2M}{\bar{r}_A}\right)\frac{(T_2 - T_1)}{\tau_A} - \sqrt{\frac{2M}{\bar{r}_A}}\frac{(r_2 - r_1)}{\tau_A} = \left(1 - \frac{2M}{\bar{r}_B}\right)\frac{(T_3 - T_2)}{\tau_B} - \sqrt{\frac{2M}{\bar{r}_B}}\frac{(r_3 - r_2)}{\tau_B}$$

Visszatérve a differenciális limitre (A és B mérete $\rightarrow$ 0) és jelölésmódra:

$$\left(1 - \frac{2M}{r_A}\right)\frac{dT_A}{d\tau_A} - \sqrt{\frac{2M}{r_A}}\frac{dr_A}{d\tau_A} = \left(1 - \frac{2M}{r_B}\right)\frac{dT_B}{d\tau_B} - \sqrt{\frac{2M}{r_B}}\frac{dr_B}{d\tau_B}$$

A $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dT}{d\tau} - \sqrt{\frac{2M}{r}}\frac{dr}{d\tau}$ **mennyiség a kő mozgása során <u>állandó</u>!**

Mi legyen a neve ennek a mozgásállandónak?

Tekintsük az $r \rightarrow \infty$ tartományt (ahol sík a téridő).

4

P-G-metrika az $r \to \infty$ határesetben:

$$d\tau^2 = dT^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2$$

(1) Az $r \to \infty$ határesetben a Painlevé-Gullstrand-T-koordináta megegyezik a sík téridőben megszokottan használt t-koordinátával.

(2) Másrészt az itt levezetett mozgásállandó értéke az $r \to \infty$ tartományban a $\frac{dT}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}$ kifejezéshez tart.

A mozgásállandó, amit találtunk: Az **<u>ENERGIA</u>** (osztva a kő tömegével)

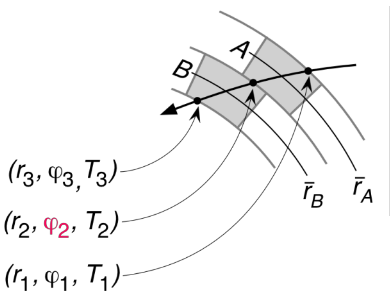
A kő (szabad tömegpont) <u>energiája</u> a fekete lyuk körüli mozgása során <u>állandó</u>.

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dT}{d\tau} - \sqrt{\frac{2M}{r}}\,\frac{dr}{d\tau} = konst$$

P-G-metrika: $g_{\alpha\beta}$ nem függ φ-től sem $\to$ <u>még egy mozgásállandó van!</u>

$$\Delta\tau^2 \approx \left(1 - \frac{2M}{\bar{r}}\right)\Delta T^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{\bar{r}}}\Delta T \Delta r - \Delta r^2 - \bar{r}^2 \Delta\varphi^2 \qquad \text{[PGK]}$$

A és B: két kicsi szomszédos téridőtartomány, amelyeken egy kő áthalad.



Rögzítsük a két szélső eseményt, és a középső esemény r- és T-koordinátáját!

φ_2 = ?, hogy a kő karóráján - a MÖE-vel összhangban - a <u>legtöbb idő teljen el</u> az 1. és 3. esemény között?

$$\tau_A \approx \left[-\bar{r}_A^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \langle \varphi_2 \cdot nélküli \cdot tagok \rangle \right]^{1/2}$$

$$\tau_B \approx \left[-\bar{r}_B^2 (\varphi_3 - \varphi_2)^2 + \langle \varphi_2 \cdot nélküli \cdot tagok \rangle \right]^{1/2}$$

$$\tau_{össz} = \tau_A + \tau_B$$

MÖE $\rightarrow$ $$\frac{d\tau_{össz}}{d\varphi_2} = 0$$

$$\frac{d\tau_A}{d\varphi_2} + \frac{d\tau_B}{d\varphi_2} = 0$$

$$\frac{d\tau_A}{d\varphi_2} \approx \frac{-2\bar{r}_A^2 (\varphi_2 - \varphi_1)}{2\sqrt{\ldots}} = \frac{-\bar{r}_A^2 (\varphi_2 - \varphi_1)}{\tau_A}$$

$$\frac{d\tau_B}{d\varphi_2} \approx \frac{2\bar{r}_B^2 (\varphi_3 - \varphi_2)}{2\sqrt{\ldots}} = \frac{\bar{r}_B^2 (\varphi_3 - \varphi_2)}{\tau_B}$$

7

$$\frac{\bar{r}_A^2 (\varphi_2 - \varphi_1)}{\tau_A} = \frac{\bar{r}_B^2 (\varphi_3 - \varphi_2)}{\tau_B}$$

Visszatérve a differenciális limitre (*A* és *B* mérete $\rightarrow$ 0) és jelölésmódra:

$$r_A^2 \frac{d\varphi_A}{d\tau_A} = r_B^2 \frac{d\varphi_B}{d\tau_B}$$

A $r^2 \dfrac{d\varphi}{d\tau}$ **mennyiség a kő mozgása során <u>állandó</u>!**

Mi legyen a neve ennek a mozgásállandónak?

Tekintsük az $r \rightarrow \infty$ tartományt (ahol sík a téridő), és mozogjon a kő lassan [newtoni határeset] $\Rightarrow$ $dt \rightarrow d\tau$

Ez a mozgásállandó: Az **<u>IMPULZUSMOMENTUM</u>** (osztva a kő tömegével)

A kő <u>impulzusmomentuma</u> a fekete lyuk körüli mozgása során <u>állandó</u>.

$$\frac{L}{m} = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = konst$$

8