

1. Feladatok munkavégzés és konzervatív erők tárgyköréből. Munkatétel

Munkavégzés, teljesítmény

1.1. Feladat: (HN 6B-8) **Órai kidolgozásra 1. feladat** Egy rúgót nyugalmi állapotból 4 J munka árán 10 cm-rel nyújthatunk meg. Mekkora munkavégzés szükséges további 10 cm-rel való megnyújtásához, ha a Hooke-törvény mindvégig érvényben marad?

Megoldás: Két megnyúlás van. Az első $\Delta l = l_1 - l_0 = 10$ cm, amelyre felírható, hogy

$$W = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2. \quad (1.1.1)$$

Innen a k rugóállandó értéke kifejezhető

$$k = \frac{2W}{(\Delta l)^2} = 800 \text{ N/m}. \quad (1.1.2)$$

A további $l_2 = 10$ cm nyújtáshoz szükséges munkavégzés

$$\Delta W = \frac{1}{2}k(l_2 + \Delta l)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = 12 \text{ J}. \quad (1.1.3)$$

1.2. Feladat: (HN 6B-10) Egy rugó által kifejtett erő a Hooke-törvény helyett az $F = -kx^3$ törvény szerint változik, ahol $k = 200 \text{ N/m}^3$. Mennyi munkát végzünk, míg 0,1 m-ről 0,3 m-re nyújtjuk?

Megoldás: A rugó végét $F'(x) = kx^3$ erővel kell húznunk, így a munka definíciója alapján az általunk végzett munka:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F'(x) dx = \int_{x_1=0,1}^{x_2=0,3} kx^3 dx = \left[\frac{1}{4}kx^4 \right]_{x_1=0,1}^{x_2=0,3} = 0,4 \text{ J} \quad (1.2.1)$$

integrállal számolható ki.

1.3. Feladat: (HN 6B-27) * A 200 N súlyú gyerek nyugalmi helyzetben lévő, 3 m-es kötelű hintán ül. A gyerek barátja húzza oldalra, hogy a hinta kötele 36° -os szöget alkosson a

függőlegessel. Határozzuk meg mekkora munkára volt ehhez szükség! A feladatot a munka definíciójának felhasználásával oldja meg!

Megoldás: Jelölje K a kötélrőt, α a kötélfüggőlegessel bezárt szögét, m a gyerek tömegét. Első lépésként azt a szögfüggő erőt kell meghatározni, amellyel a barátja F erővel vízszintes irányban húzza. Mivel egyensúlyi állapotokon keresztül mozgásról van szó az erőkre felírhatjuk, hogy a függőleges komponensekre

$$K \cos \alpha = mg, \quad (1.3.1)$$

a vízszintes komponensekre

$$K \sin \alpha = F. \quad (1.3.2)$$

Innen az F erő:

$$F = mg \operatorname{tg} \alpha. \quad (1.3.3)$$

A vízszintes irányú elmozdulás két szöghöz $\alpha + d\alpha$ és az α szögekhez tartozó tartozó x koordináták különbsége, azaz

$$dx = l \sin(\alpha + d\alpha) - l \sin \alpha = l \cos \alpha \cdot d\alpha, \quad (1.3.4)$$

ahol felhasználtuk, hogy kis szögekre érvényesek a

$$\cos(d\alpha) = 1, \quad (1.3.5)$$

$$\sin(d\alpha) = d\alpha \quad (1.3.6)$$

közelítések. Az elemi munka kifejezése

$$dW = mg \operatorname{tg} \alpha \cdot l \cos \alpha \cdot d\alpha = mgl \sin \alpha \cdot d\alpha. \quad (1.3.7)$$

amellyel a teljes végzett munka:

$$W = \int_0^\alpha mgl \sin \alpha \cdot d\alpha = mgl(1 - \cos \alpha). \quad (1.3.8)$$

1.4. Feladat: (HN 6B-39) **Órai kidolgozásra 2. feladat** Egy 48 km/h sebességgel egyenletesen haladó gépkocsira a légellenállás 900 N erővel hat. Mekkora teljesítménnyel dolgozik a motor a légellenállás leküzdésére?

Megoldás: A teljesítmény

$$P = \frac{dW}{dt}, \quad (1.4.1)$$

ahol a dW elemi munka

$$dW = \mathbf{F} d\mathbf{r}. \quad (1.4.2)$$

Ezt behelyettesítve a teljesítmény

$$P = \mathbf{F} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{v} = 12000 \text{ W}. \quad (1.4.3)$$

1.5. Feladat: (HN 6C-57) Egy testet a koordinátarendszer origójából egyenes vonalban állandó $\mathbf{F} = f_1\hat{x} + f_2\hat{y}$ ($f_1 = 2\text{N}$; $f_2 = 4\text{N}$) erővel az $\mathbf{r} = s_1\hat{x} + s_2\hat{y}$ ($s_1 = 1\text{m}$; $s_2 = 5\text{m}$) helyre viszünk. (Az egyenesvonalú egyenletes mozgás fenntartásához természetesen egyéb kényszererők is fellépnek.) Határozzuk meg az \mathbf{F} erő munkáját

- (a) közvetlenül az $\mathbf{F}\Delta\mathbf{r}$ skaláris szorzattal,
- (b) az $|\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\theta$ szorzattal!

Megoldás:

- (a) A munkát a skaláris szorzattal számolva

$$W = f_1s_1 + f_2s_2 = 22 \text{ J} \quad (1.5.1)$$

adódik.

- (b) Az erő nagysága $|\mathbf{F}| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{20} \text{ N}$, míg az elmozdulás nagysága $|\Delta\mathbf{r}| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \sqrt{26} \text{ m}$. A két vektor által bezárt szög

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{F}\Delta\mathbf{r}}{|\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|} = \frac{22}{\sqrt{20}\sqrt{26}}. \quad (1.5.2)$$

A kiszámolt értékeket összeszorozva $W = |\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\theta = 22 \text{ J}$.

1.6. Feladat: (HN 6C-58) **Órai kidolgozásra 3. feladat** Egy fiú a $m_0 = 3 \text{ kg}$ tömegű, $l_0 = 2 \text{ m}$ hosszúságú hajlékony láncot egyik végénél fogva úgy tartja, hogy a másik vége éppen a leér a földre.

- (a) Határozzuk meg, hogy miként változik a gyerek által kifejtett erő, ha a láncot egyenletes sebességgel s távolsággal lejjebb eresztzi!
- (b) A $W = \sum_i \mathbf{F}_i \Delta\mathbf{s}_i$ összegzés vagy a $W = \int \mathbf{F} ds$ integrál felhasználásával számítsuk ki azt a munkát, amit a gyerek végez, míg a teljes láncot a földre eresztzi!

Megoldás:

(a) Jelölje $\lambda = \frac{m_0}{l_0}$ a hosszegységenkénti tömeget. Az s távolsággal lejjebb eresztett lánca azon részének tömege, amelyet még tartani kell:

$$m(s) = m_0 - \lambda s = m_0 - \frac{m_0}{l_0} s. \quad (1.6.1)$$

Az ehhez szükséges erő:

$$F(s) = \left(m_0 - \frac{m_0}{l_0} s \right) g, \quad (1.6.2)$$

amely felfele mutat.

(b) (α) A gyerek által végzett munka a görbe alatti terület kiszámolásával. Mivel az $F(s)$ erő az s távolság lineáris függvénye, így az $F(s)$ egyenes, valamint az x és az y tengely által határolt derékszögű háromszög területét kell kiszámolni. A háromszög alapja l_0 , a magassága $F(s=0) = m_0 g$, így a terület $\frac{1}{2} m_0 g l_0$. Figyelembe véve, hogy az elmozdulás a ható erővel ellentétes előjelű a végzett munka:

$$W = -\frac{1}{2} m_0 g l_0. \quad (1.6.3)$$

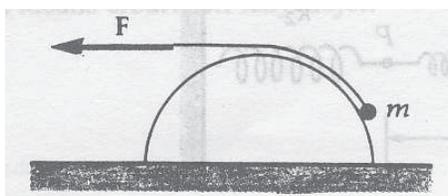
(β) A gyerek által végzett munka integrállal:

$$W = -\int_0^{l_0} F(s) ds = -\int_0^{l_0} \left(m_0 - \frac{m_0}{l_0} s \right) g ds = -\frac{1}{2} m_0 g l_0. \quad (1.6.4)$$

1.7. Feladat: (HN 6C-59) * A 1. ábrán látható súrlódásmentes félhenger aljáról a tetejére húzunk fel egy m tömegű testet a henger tetején átvett kötél segítségével.

(a) Határozzuk meg a kötélerőt a hely függvényében!

(b) Az $\int \mathbf{F} ds$ integrál segítségével határozzuk meg azt a munkát, ami a testnek a henger aljáról a tetejéig való egyenletes sebességű felhúzásához szükséges! A henger sugara R .



1. ábra.

Megoldás:

(a) A húzás egyensúlyi állapotokon keresztül történik, ami azt eredményezi, hogy minden pillanatban $v = 0$ sebességet tételezünk fel. Jelölje φ a tömegponthoz húzott sugár és az x tengely

által bezárt szöget. Az mg súlyerő mindig y irányú, az ébredő N támaszerő kifelé mutató radiális irányú, a K kötelerő érintő irányú. Így a testre ható erők y komponenseire

$$0 = mg - N \sin \varphi - K \cos \varphi, \quad (1.7.1)$$

x komponenseire

$$0 = K \sin \varphi - N \cos \varphi \quad (1.7.2)$$

összefüggések állnak fenn. Ezekből a kötelerő:

$$K(\varphi) = \frac{mg}{\cos \varphi (1 + \tan^2 \varphi)} = mg \cos \varphi. \quad (1.7.3)$$

(b) Az elmozdulás a henger felületén (a keresztmetszetet tekintve a kör kerületén) lehetséges, amely kis $d\varphi$ szög esetén

$$ds = R d\varphi. \quad (1.7.4)$$

A végzett munka a $W = \int F_s ds$ definíció alapján

$$W = \int_0^{90^\circ} K(\varphi) R d\varphi = \int_0^{90^\circ} mgR \cos \varphi d\varphi = mgR, \quad (1.7.5)$$

ahogy az várható is volt.

1.8. Feladat: (HN 6C-73) * A 4 kg tömegű, nyugalomban lévő testet a rá ható változó erő az $x = 2t - 3t^2 + t^3$ függvény szerint mozgat. (Az x -et méterben, a t -t másodpercben mérjük.) Határozzuk meg, hogy mekkora munkát végez ez az erő a mozgás első három másodpercében!

Megoldás: A test sebessége, mint az idő függvénye:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2 - 6t + 3t^2. \quad (1.8.1)$$

A 3. másodpercben a sebesség $v(3s) = 11$ m/s. A végzett munka – figyelembe véve, hogy a test nyugalomból indult –

$$W = \frac{1}{2} m v^2 = 242 \text{ J}. \quad (1.8.2)$$

1.9. Feladat: (HN 6C-75) Az m tömegű test a nehézségi erő hatására szabadon esik. Mutassuk meg, hogy h távolság megtétele alatt a nehézségi erő átlagos teljesítménye: $P_{\text{átl}} = m \sqrt{g^3 h / 2}$!

Megoldás: Az eső test sebessége $v = gt$, kinetikus energiája

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mg^2t^2. \quad (1.9.1)$$

A h magasságból történő eséshez tartozó idő $t = \sqrt{2h/g}$. A teljesítmény – a behelyettesítések elvégzése után –

$$P = \frac{E}{t} = m\sqrt{\frac{g^3h}{2}}. \quad (1.9.2)$$

Ez igazolja a feladat állítását.

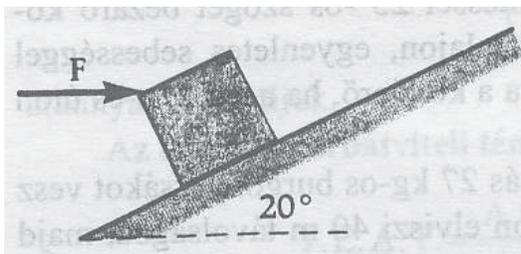
Munkatétel

1.10. Feladat: (HN 6B-23) A 2. ábra szerint 2 kg-os testet vízszintes 27 N nagyságú erővel tolnunk fel egy 20° -os lejtőn. A csúszási súrlódási együttható a lejtő és a test között 0,180.

(a) Mekkora a test gyorsulása?

(b) Határozzuk meg a kinematikai egyenletek felhasználásával a nyugalomból induló test sebességét abban a pillanatban, amikor 3 m-t tett meg a lejtőn felfelé!

(c) Válaszoljunk a (b) kérdésre a munkatétel alkalmazásával!



2. ábra.

Megoldás: Jelölések: $m = 2$ kg; $F = 27$ N; $\alpha = 20^\circ$ és $\mu = 0,180$.

(a) A mozgásegyenletek felírásához bontsuk fel az F erőt lejtőirányú, felfele mutató ($F \cos \alpha$) és lejtőre merőlegesen lefele mutató ($F \sin \alpha$) komponensekre. A felfele mozgást pozitív előjelűnek tekintve a lejtő irányú mozgásegyenlet

$$ma = F \cos \alpha - mg \sin \alpha - \mu N. \quad (1.10.1)$$

A N támaszerő a

$$0 = N - mg \cos \alpha - F \sin \alpha \quad (1.10.2)$$

egyenletből fejezhető ki. A két egyenletből a gyorsulás

$$a = \frac{F(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)}{m} - g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha = 6,74 \text{ m/s}^2. \quad (1.10.3)$$

(b) Az s út megtétele utáni sebesség

$$v = \sqrt{2sa} = 6,36 \text{ m/s}. \quad (1.10.4)$$

(c) A testre ható lejtőirányú (felfele mutató) eredő erő

$$F' = F(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha, \quad (1.10.5)$$

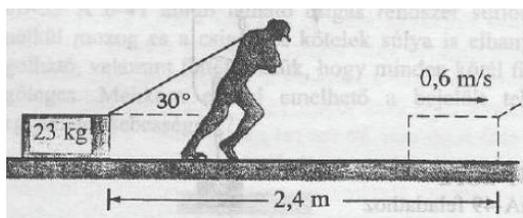
amelynek munkája változtatja meg a test mozgási energiáját

$$\frac{1}{2}mv^2 = F's = (F(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha)s. \quad (1.10.6)$$

Innen a v sebesség

$$v = 6,36 \text{ m/s}. \quad (1.10.7)$$

1.11. Feladat: (HN 6B-28) **Órai kidolgozásra 4. feladat** A 3. ábrán látható ember nyugalmi helyzetből indulva 2,4 m távolságra húz el egy 23 kg-os ládát az érdes ($\mu = 0,5$) padlón. A láda végsebessége 0,6 m/s. A munkatétel alkalmazásával határozzuk meg, hogy mekkora állandó erőt fejtett ki az ember?



3. ábra.

Megoldás: A testre ható erő – ez végzi a gyorsítást – vízszintes komponense:

$$F \cos \alpha - \mu N, \quad (1.11.1)$$

ahol N az asztaltól a testre ható támaszerő:

$$N = mg - F \sin \alpha. \quad (1.11.2)$$

A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W, \quad (1.11.3)$$

ahol W a testen végzett munka, v_1 a kezdeti, v_2 végsebesség. A munka kifejezése most

$$W = (F \cos \alpha - \mu N)s, \quad (1.11.4)$$

ahol az $s = 2,4$ m a megtett út. Figyelembe véve, hogy $v_1 = 0$, a fenti kifejezésekből a hatóerőre

$$F = \frac{\mu mgs + \frac{1}{2}mv_2^2}{s(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} = 104,6\text{N} \quad (1.11.5)$$

adódik.

1.12. Feladat: (HN 8B-29) Egy 5 g tömegű 700 m/s sebességű golyó behatol egy rögzített fakockába és megáll benne. Tegyük fel, hogy a fakocka $8 \cdot 10^3$ N nagyságú állandó erőt fejt ki a golyóra, míg az meg nem áll. Határozzuk meg

- mennyi idő alatt áll meg a golyó?
- milyen mélyen hatol be a fába?
- mennyi munkát végez a fakocka, amíg a golyó meg nem áll?
- mennyivel változik meg a golyó mozgási energiája?

Megoldás: A koordinátarendszer tengelye mutasson balról jobbra. Jelöljük az adatokat: $m = 5$ g; $v_0 = 700$ m/s (tételezzük fel, hogy a golyó balról jobbra halad) és így $F = -8 \cdot 10^3$ N.

- Először a golyó gyorsulását számoljuk, amely

$$a = \frac{F}{m} = -1,6 \cdot 10^6 \text{ m/s}^2. \quad (1.12.1)$$

A megállásig eltelt idő a $v(t) = 0 = at + v_0$ összefüggésből

$$t = \frac{v_0}{-a} = 4,375 \cdot 10^{-4} \text{ s}. \quad (1.12.2)$$

- A kiszámolt adatok felhasználásával a megtett út

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0,153 \text{ m}. \quad (1.12.3)$$

- A fakocka által végzett munka

$$W = F \cdot s = -1225 \text{ J}. \quad (1.12.4)$$

(d) A golyó kinetikus energiájának megváltozása

$$\Delta E_k = W = -1225 \text{ J.} \quad (1.12.5)$$

1.13. Feladat: A d vastagságú deszkába m tömegű v_0 sebességű lövedék csapódik. Mekkora lesz a másik oldalon kilépő lövedék v sebessége, ha

(a) a deszkában állandó a ható F erő,

(b) a deszkában a behatolási mélységtől függő $F(x) = cx^2$ erő fékezi? (A c konstans paraméter.)

Megoldás: A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W, \quad (1.13.1)$$

ahol W a testen végzett munka. Ami az a, esetben:

$$W = -Fd, \quad (1.13.2)$$

és a b, esetben:

$$W = -\int_0^d cx^2 dx = -\frac{1}{3}cd^3. \quad (1.13.3)$$

Ezekkel a sebességek: a,

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{1}{2}mv_0^2 - Fd \right)}, \quad (1.13.4)$$

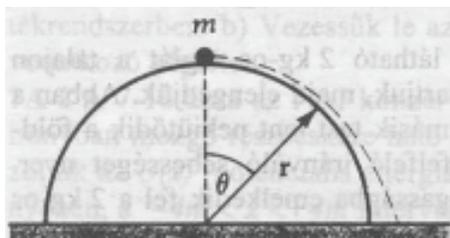
és b,

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{3}cd^3 \right)}. \quad (1.13.5)$$

Munkavégzés konzervatív erőterben. Potenciális energia

1.14. Feladat: (HN 7B-18) **Órai kidolgozásra 5. feladat** Egy kicsiny, m tömegű test a sima, r sugarú félgömb tetején nyugszik. A nyugalmi helyzetéből kissé kimozdítva, súrlódásmentesen lecsúszik a gömbön. Mekkora a függőlegessel bezárt szög, amikor a test elhagyja a gömb felszínét?

Megoldás: A potenciális energia zérus szintje legyen a félgömb alján. Így a helyzeti energia mozgás kezdetén $E_{p_1} = mgr$, a kinetikus energia $E_{k_1} = 0$ mivel a test áll. A felülettől történő



4. ábra.

elválás pillanatában: $E_{p_2} = mgr \cos \theta$, a mozgási energia $E_{k_2} = \frac{1}{2}mv^2$. A mozgás során nincs súrlódás és közegellenállás, így a mechanikai energia megmaradó mennyiség, azaz írhatjuk:

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}. \quad (1.14.1)$$

Behelyettesítés után:

$$mgr = \frac{1}{2}mv^2 + mgr \cos \theta. \quad (1.14.2)$$

A körmozgás feltétele:

$$\frac{mv^2}{r} = mg \cos \theta - N, \quad (1.14.3)$$

ahol a jobboldal első tagja a súlyerő radiális komponense, az N a támaszerő. Az elválás pillanatában:

$$N = 0. \quad (1.14.4)$$

Az egyenletek megoldása:

$$\cos \theta = \frac{2}{3} \rightarrow \theta = 48^\circ. \quad (1.14.5)$$

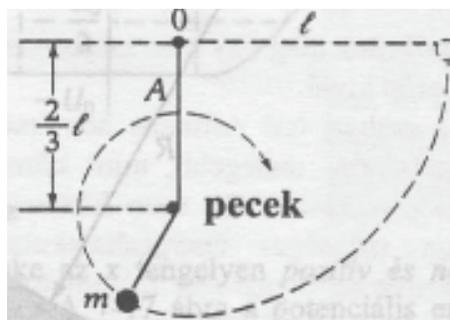
1.15. Feladat: (HN 7B-21) Egy m tömegű testet l hosszúságú kötéltre ingaként felfüggesztünk. A test vízszintes helyzetből indul. Az O felfüggesztési ponttól $2/3l$ távolságban kicsiny pöcköt helyeztünk el, melybe a kötéllengése során beakad. Így a test a legalsó pont elérése után egy $1/3l$ sugarú függőleges körpályára tér át. Határozzuk meg a fonalat feszítő erőt az A pontban, ami a pöckök elérése utáni legmagasabb helye a testnek!

Megoldás: A potenciális energia zérus szintje legyen az A pont magasságában. Így a mechanikai energia megmaradás tétele miatt egyszerűen

$$mg \frac{1}{3}l = \frac{1}{2}mv^2. \quad (1.15.1)$$

Másrészt a pecek körüli körmozgásra az A pontban az

$$m \frac{v^2}{\frac{1}{3}l} = K + mg \quad (1.15.2)$$

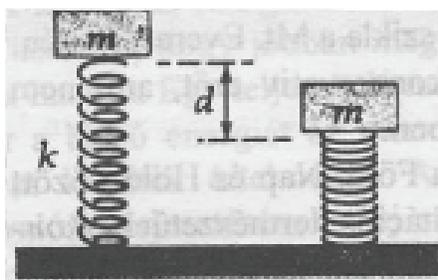


5. ábra.

összefüggés írható, ahol K a kötél erő. A két egyenletből

$$K = mg. \quad (1.15.3)$$

1.16. Feladat: (HN 7A-10) **Órai kidolgozásra 6. feladat** Egy m tömegű téglát úgy van felerősítve, hogy a k rugóállandójú rugót éppen csak érinti. A téglát ekkor elengedjük nyugalmi



6. ábra.

helyzetéből. Határozzuk meg, hogy milyen d távolságra jut el a téglát az elengedés után!

Megoldás: Mivel a mozgás során nincs súrlódás és közegellenállás, a mechanikai energia megmarad. Azaz a kezdeti kinetikus energia E_{k_1} és potenciális energia E_{p_1} összege egyenlő a tekintett mozgás végi kinetikus E_{k_2} és potenciális energia E_{p_2} összegével:

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}. \quad (1.16.1)$$

Mivel a test kezdetben és az alsó helyzetben is áll, így $E_{k_1} = 0$ és $E_{k_2} = 0$. A helyzeti energia zérus pontját a talajra helyezve $E_{p_1} = mgh$, ahol h a téglát a talajtól való távolsága. Az E_{p_2} a téglát az alsó helyzethez tartozó helyzeti energiájából és a rugalmas energiájából áll, azaz $E_{p_2} = mg(h-d) + \frac{1}{2}kd^2$. A fenti egyenletbe helyettesítve:

$$mgh = mg(h-d) + \frac{1}{2}kd^2. \quad (1.16.2)$$

Ebből a d összenyomódás mértéke:

$$d = \frac{2mg}{k}. \quad (1.16.3)$$

(Megjegyzés: Természetesen ugyanez az eredmény adódik, ha pl. a felső helyzetet választjuk a potenciális energia zérus pontjának.)

1.17. Feladat: A völgy fölött h magasságban átvezető viaduktról gumiköteleken ugrálnak alá (bungee jumping). Milyen L hosszúságúnak válassza az m tömegű ugró a k direkción erejű gumi-kötelet, hogy a talajt éppen érintse? (Az ugró kiterjedése legyen pontszerű.)

Megoldás: Az ugró a mozgás elején és a talaj érintése pillanatában áll, így mozgási energiája mindkét esetben zérus. Így a kezdeti mgh helyzeti energia – a völgy alját zérus szintnek véve – a gumikötélben tárolódó rugalmas energiává alakul, azaz:

$$mgh = \frac{1}{2}k(h-L)^2. \quad (1.17.1)$$

Itt a $h-L$ a gumikötél megnyúlása. Az egyenlet megoldása:

$$L = h \pm \sqrt{\frac{2mgh}{k}}. \quad (1.17.2)$$

Innen a fizikailag értelmes megoldás, így a kezdeti (beállítandó) hossz:

$$L = h - \sqrt{\frac{2mgh}{k}}. \quad (1.17.3)$$

1.18. Feladat: * Az m_0 tömegű l_0 hosszúságú lánc a földön hever. A végét elkezdjük állandó v_0 sebességgel emelni. a, Mekkora erőt kell ehhez kifejteni? b, Mekkora a végzett összes munka, amikor a kötélen vége éppen elhagyja a talajt?

Megoldás: a, Tekintsük a közbenső t időpontot, amikor már $v_0 t$ hossz felemelkedett és v_0 sebességű. E pillanatban az m tömegű darabnak a helyzeti energiája:

$$E_p(t) = \frac{1}{2}mgh = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m_0}{l_0} v_0 t}_m g \underbrace{v_0 t}_h \quad (1.18.1)$$

tömegű darabra. Másrészt ennek az m tömegű darabnak a kinetikus energiája:

$$E_k(t) = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0 t v_0^2. \quad (1.18.2)$$

A teljes energia:

$$E(t) = \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^2 t^2 g + \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^3 t, \quad (1.18.3)$$

amelyből a $P(t)$ teljesítmény:

$$P(t) = \frac{dE}{dt} = \frac{m_0}{l_0} v_0^2 t g + \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^3. \quad (1.18.4)$$

A $P(t) = F v$ összefüggésből a lánkra

$$F(t) = \frac{P(t)}{v_0} = \frac{m_0}{l_0} v_0 g t + \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^2 \quad (1.18.5)$$

erővel kell hatni. b, A végzett munka egyszerűen kiszámolható úgy, hogy a lánccsúspontja $\frac{l_0}{2}$ magasságra emelkedett, másrészt a lánccsúspont sebessége v_0 . A helyzeti energiája $\frac{m_0 g l_0}{2}$, a mozgási energiája $\frac{1}{2} m_0 v_0^2$, azaz

$$W = \frac{m_0 g l_0}{2} + \frac{1}{2} m_0 v_0^2. \quad (1.18.6)$$

Megjegyzés: E munka a következőképpen is kiszámolható. A felemeléshez szükséges idő: $t_f = \frac{l_0}{v_0}$. A munka $W = \int F dx = \int F v dt$ alapján:

$$W = \int_0^{\frac{l_0}{v_0}} \left(\frac{m_0}{l_0} v_0 g t + \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^2 \right) v_0 dt = \frac{m_0 g l_0}{2} + \frac{1}{2} m_0 v_0^2. \quad (1.18.7)$$

Energiatétel

1.19. Feladat: Egy 60 kg-os láda 4 m magasról lecsúszik egy a vízszintessel 30° -os szöget bezáró lejtőn. Mekkora a súrlódási erő munkája ezalatt, ha a láda 5 m/s sebességet ér el?

Megoldás: Jelölések: $m = 60$ kg, $h = 4$ m, $\alpha = 30^\circ$ és $v = 5$ m/s. A mechanikai energia megmaradást "elrontó" disszipatív erő munkáját a következőképpen tudjuk figyelembe venni:

$$U_{p_2} + E_{k_2} = U_{p_1} + E_{k_1} + W, \quad (1.19.1)$$

ahol végső potenciális és kinetikus energiát összegét (mechanikai energia) úgy kapjuk, hogy a kezdeti potenciális és kinetikus energiához hozzáadjuk a súrlódási végzett munkát. Mivel a kezdeti mechanikai energia nagyobb mint a végső, biztosak lehetünk benne, hogy W negatív. A potenciális energia zérus szintjét a lejtő aljára a jelen esetre a következő egyenlet írható:

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g h + W. \quad (1.19.2)$$

Az adatok behelyettesítése után

$$W = -1650 \text{ J}. \quad (1.19.3)$$

1.20. Feladat: Az α hajlásszögű, μ súrlódási együtthatójú lejtő alján felfelé lökünk v_0 sebességgel egy m tömegű testet. A test a mozgás tetőpontját elérve visszacsúszik. Mekkora lesz a sebessége a lejtő alján? A feladatot oldjuk meg a

- (a) dinamikai egyenletek megoldásával és
- (b) az energiatétel felhasználásával!

Megoldás:

(a) A felfele mozgásnál legyen a koordinátatengely irányítása pozitív a felfele irányban. Ekkor a test lejtőirányú mozgásegyenlete

$$ma_{fel} = -mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha, \quad (1.20.1)$$

amelyből a gyorsulás

$$a_{fel} = -g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha. \quad (1.20.2)$$

A felfele mozgás ideje a $0 = v_0 + a_{fel}t$ egyenletből

$$t_{fel} = \frac{v_0}{-a_{fel}}, \quad (1.20.3)$$

amellyel a idő alatt a megtett út

$$s = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}. \quad (1.20.4)$$

A lefele csúzásnál fordítsuk meg a koordinátatengelyt, a pozitív irányítás mutasson lefele. Ekkor a mozgásegyenlet

$$ma_{le} = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha, \quad (1.20.5)$$

amelyből a gyorsulás

$$a_{le} = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha. \quad (1.20.6)$$

A lefele mozgás ideje a $v = a_{le}t$ egyenletből

$$t_{le} = \frac{v}{a_{le}}, \quad (1.20.7)$$

amely idő alatt a megtett s út

$$s = \frac{1}{2}a_{le}t^2 = \frac{v^2}{2a_{le}}. \quad (1.20.8)$$

E két egyenletből a sebesség a lejtő alján

$$v = \sqrt{2sa_{le}}. \quad (1.20.9)$$

Az s és a_{le} korábban kapott kifejezéseit behelyettesítve a sebességre a

$$v = v_0 \sqrt{\frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}} \quad (1.20.10)$$

eredmény adódik.

(b) Az energiátétel azt állítja, hogy a végső kinetikus és potenciális energia összege egyenlő a kezdeti kinetikus és potenciális energia összegével plusz a testen végzett munkával, azaz

$$U_{p2} + E_{k2} = U_{p1} + E_{k1} + W. \quad (1.20.11)$$

A felfele mozgásnál $U_{p1} = 0$; $E_{k1} = \frac{1}{2}mv_0^2$; $U_{p2} = mgs \sin \alpha$; $E_{k2} = 0$ és $W = -\mu mgs \cos \alpha$. Egy egyenletbe összeírva

$$mgs \sin \alpha = \frac{1}{2}mv_0^2 - \mu mgs \cos \alpha. \quad (1.20.12)$$

Ebből az s út

$$s = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}. \quad (1.20.13)$$

A lefele csúszásnál

$$U_{p2} + E_{k2} = U_{p1} + E_{k1} + W, \quad (1.20.14)$$

ahol $U_{p1} = mgs \sin \alpha$; $E_{k1} = 0$; $U_{p2} = 0$; $E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2$ és $W = -\mu mgs \cos \alpha$. Egy egyenletbe írva

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgs \sin \alpha - \mu mgs \cos \alpha. \quad (1.20.15)$$

Az s utat a (1.20.13) egyenletből behelyettesítve a sebességre a fentiekkel egyező

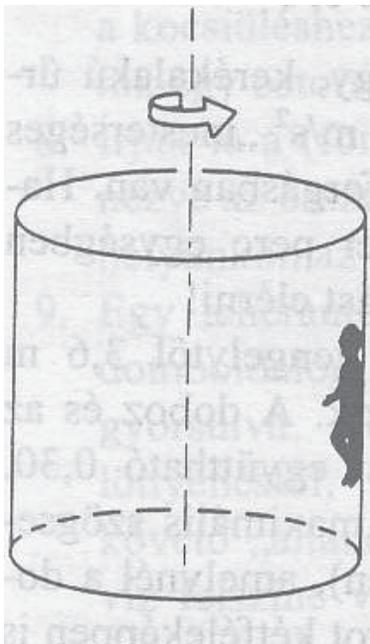
$$v = v_0 \sqrt{\frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}} \quad (1.20.16)$$

eredményt kapjuk.

2. Feladatok a gyorsuló koordináta-rendszerek tárgyköréből

Centrifugális erő

2.1. Feladat: (HN 13B-20) Egy népszerű vidámparki mutatványnál a látogatók egy függőleges tengely körül forgó henger belső falának támaszkodnak a 7. ábrának megfelelően. Ezután a padlót lesüllyesztik, és hagyják, hogy a látogatók a centrifugális erőből a falhoz "odaszögezve" és a súrlódási erő következtében a lecsúszástól védve a falon maradjanak. A henger R sugarának,



7. ábra.

az ω szögsebességnek és a g nehézségi gyorsulásának függvényében határozzuk meg azt a legkisebb μ nyugalmi súrlódási együtthatót, amely a lecsúszást megakadályozza. A feladatot forgó vonatkoztatási rendszerben oldjuk meg!

Megoldás: A forgó vonatkoztatási rendszerben a falhoz "odaszögezett" látogatóra négy erő hat. A centrifugális erő (tehetetlenségi erő), amely radiálisan kifelé mutat és nagysága $F_{cf} = mR\omega^2$. A falon radiálisan befelé mutat az N támaszerő, amelynek nagysága pontosan $mR\omega^2$. Függőlegesen lefelé hat az mg súlyerő, ezzel ellentétesen az F_s súrlódási erő, és a kettő egymással egyenlő. Az fentieket matematikailag összefoglalva:

$$mg = F_s = \mu N = \mu m R \omega^2, \quad (2.1.1)$$

ahonnan

$$\mu = \frac{g}{R\omega^2}. \quad (2.1.2)$$

2.2. Feladat: Órai kidolgozásra 7. feladat Egy $M = 1,499 \cdot 10^{25}$ kg tömegű, $R = 10000$ km sugarú bolygó északi sarkán $k = 100$ N/m direkciós erejű rugóra $m = 1$ kg tömegű testet lógatunk. A bolygó $\omega = 10^{-4}$ 1/s szögsebességgel forog.

(a) Mekkora a rugó megnyúlása?

(b) Ezt követően a mérést az egyenlítőn megismételjük. Mennyi ekkor a rugó megnyúlása?

Megoldás:

(a) A bolygó északi sarkán végzett mérés során

$$\gamma \frac{mM}{R^2} = k\Delta x, \quad (2.2.1)$$

ahol Δx a rugó megnyúlása, amely

$$\Delta x = \gamma \frac{mM}{kR^2} = 0,1 \text{ m} = 100 \text{ mm}. \quad (2.2.2)$$

(b) Az egyenlítőn figyelembe kell vennünk a centrifugális erőt, amellyel az egyenlet úgy módosul, hogy

$$\gamma \frac{mM}{R^2} - mR\omega^2 = k\Delta x'. \quad (2.2.3)$$

Innen a $\Delta x'$ megnyúlás

$$\Delta x' = \gamma \frac{mM}{kR^2} - \frac{mR\omega^2}{k} = 0,099 \text{ m} = 99 \text{ mm}, \quad (2.2.4)$$

azaz a rugó megnyúlása 1 mm-rel kevesebb.

2.3. Feladat: (HN 14C-39) Az ω szögsebességgel forgó ringlispíl középpontjától r távolságra lévő helyen h magasságból egy tárgyat ejtenek a padlóra. A mozgást a ringlispíl vonatkoztatási rendszeréből vizsgálva mutassuk meg, hogy az elejtés talppontja és a becsapódási pont közötti távolság jó közelítéssel $\omega^2 rh/g$. Milyen feltételezésekkel kell élni a feladat megoldása során?

Megoldás: A tárgy

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (2.3.1)$$

idő alatt esik. A forgó vonatkoztatási rendszerben az

$$a_{cf} = r\omega^2 \quad (2.3.2)$$

centrifugális gyorsulása lesz, amely kifelé mutató radiális irányú. E gyorsulással az elejtés talppontja és a becsapódási pont közötti távolság

$$\Delta s = \frac{1}{2} a_{cf} (\Delta t)^2 = \frac{\omega^2 rh}{g}. \quad (2.3.3)$$

A forgás közbeni szögelfordulás

$$\Delta \varphi = \omega \Delta t. \quad (2.3.4)$$

Ha azt tekintjük, hogy a test az álló rendszerből nézve érintő irányban $r\omega$ sebességgel egyenesvonalú egyenletes mozgást végez az elejtés után, akkor az ehhez tartozó elmozdulás

$$\Delta x = r\omega\Delta t. \quad (2.3.5)$$

Az ehhez az elmozduláshoz tartozó α központi szög

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta x}{r} = \omega\Delta t. \quad (2.3.6)$$

Ahhoz, hogy φ és α közelítőleg megegyezzenek egymással, az $\omega\Delta t \ll 1$ feltétel teljesülése szükséges.

Coriolis-erő

2.4. Feladat: (HN 14C-30) **Órai kidolgozásra 8. feladat** Írjuk le, hogyan tudna egy személy a forgásban lévő ringlispíl lapján járni úgy, hogy a rá ható Coriolis-erő és a centrifugális erő egymással egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú legyen! (A ringlispíl forogjon az óra járásával ellentétesen.)

Megoldás: Az ω szögsebességgel forgó ringlispíl origótól való R távolságú pontjában a személyre radiális kifelé mutató $F_{cf} = mR\omega^2$ centrifugális erő hat. Ahhoz, hogy a Coriolis-erő radiális befelé mutató legyen, ahhoz az óra járásával egyezően, az R sugarú kör érintője irányában kell v sebességgel haladnia. A Coriolis erő nagysága $F_{Co} = 2m\omega v$. A kettő

$$F_{cf} = mR\omega^2 = 2m\omega v = F_{Co} \quad (2.4.1)$$

egyenlőségéből a sebességre a

$$v = \frac{R\omega}{2} \quad (2.4.2)$$

adódik.

2.5. Feladat: Egy forgótárcsa szélén álló ember eldob egy testet vízszintesen a függőleges forgástengely irányába 10 m/s kezdősebességgel. A tárcsa percenként 600-at fordul. Mekkora a tárcsa vonatkoztatási rendszerében a test pályájának kezdeti görbületi sugara?

Megoldás: Jelölések: $v = 10$ m/s és $f = 600$ 1/perc = 10 1/s. A tárcsa szögsebessége $\omega = 2\pi f$

= 62,8 rad/s. A forgó rendszerben a testet a Coriolis-erő téríti el, amelyhez tartozó gyorsulás nagysága

$$a_{Co} = 2\omega v. \quad (2.5.1)$$

Az indulás pillanatában körpályán mozog a test, amely esetén gyorsulás

$$a = \frac{v^2}{R}. \quad (2.5.2)$$

A kettő egyenlőségéből a görbületi sugár

$$R = \frac{v}{2\omega} = 0,159 \text{ m}. \quad (2.5.3)$$

2.6. Feladat: (HN 14C-33) A mesterlövész balról jobbra haladó célpontra céloz. A célt követő puskacső a vízszintes síkban mozog. A puska szögsebessége 1,5 rad/s abban a pillanatban, amikor az 5 g tömegű lövedék 500 m/s sebességgel éppen kilép a csőből.

- (a) A forgó rendszerben mekkora Coriolis-erő hat a lövedékre a cső elhagyásának pillanatában?
 (b) Milyen irányú ez az erő?

Megoldás: Jelölések: $\omega = 1,5$ rad/s; $m = 5$ g és $v = 500$ m/s.

(a) A puska csöve az óra járásának megfelelően fordul el, így az ω szögsebességvektor függőlegesen lefele mutat. A Coriolis-erő a ω szögsebességvektor és a \mathbf{v} sebességvektorokkal

$$\mathbf{F} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad (2.6.1)$$

amelynek nagysága – figyelembe véve, hogy ω és \mathbf{v} egymásra merőlegesek

$$F = 2m\omega v = 7,5 \text{ N}. \quad (2.6.2)$$

- (b) Az erő iránya jobbról balra mutat.

2.7. Feladat: (HN 14C-38) A percenként tízet forgó ringlispíl szélén álló kislány 10 m/s vízszintes kezdősebességgel labdát dob a forgástengely felé. Úgy látja, hogy a pályagörbe jobbra kanyarodik.

- (a) Számítsuk ki a pályagörbe kezdeti vízszintes görbületi sugarát!
 (b) Amikor a labdát dobó kislány a ringlispíl közepe felé néz, jobbra vagy balra látja elmozdulni a távoli tájat?

Megoldás: Jelölések: A fordulatszám $f = 10$ 1/perc $= 1/6$ 1/s, amellyel a szögsebesség $\omega = 2\pi f = 1,047$ rad/s; $v = 10$ m/s.

(a) A labda Coriolis-gyorsulása

$$a_{Co} = 2\omega v, \quad (2.7.1)$$

amely éppen az elkanyarodás

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (2.7.2)$$

gyorsulása. Itt r a pályagörbe görbületi sugara. A két gyorsulás egyenlőségéből

$$r = \frac{v}{2\omega} = 9,55 \text{ m}. \quad (2.7.3)$$

(b) Mivel a pályagörbe jobbra kanyarodik, így a ringlispól az óra járásával ellentétes irányban forog. Az ilyen irányban forgó rendszerből nézve a táj balról jobbra látszik mozogni.

2.8. Feladat: Órai kidolgozásra 9. feladat A Föld napi forgása következtében az eső testek kelet felé elhajlanak.

(a) Mekkora az Egyenlítőre szabadon eső test keleti irányú gyorsulása?

(b) Számítsuk ki, hogy a becsapódás pillanatában mekkora a keleti irányú sebessége annak a testnek, amely $h = 100$ m magasból esik szabadon az Egyenlítőre!

Megoldás:

(a) Az Egyenlítőn szabadon eső testnek a Coriolis-erő következményeként – figyelembe véve, hogy a Föld ω szögsebessége és a leeső test v sebessége egymásra merőleges –

$$a(t) = 2\omega v = 2\omega gt \quad (2.8.1)$$

keleti irányú gyorsulása van.

(b) A t időtartamú esés során az $a(t) = 2\omega gt$ egyenes alatti terület éppen a keleti irányú sebesség:

$$v(t) = \omega gt^2. \quad (2.8.2)$$

Más úton:

$$v(t) = \int_0^t a(t) dt = \int_0^t 2\omega gt dt = \omega gt^2. \quad (2.8.3)$$

Az esés ideje $4,47$ s, $\omega = 7,27 \cdot 10^{-5}$ rad/s, $g = 10$ m/s² adatokkal számolva:

$$v_{kelet} = 1.45 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}. \quad (2.8.4)$$