1. Feladatok a dinamika tárgyköréből

Newton három törvénye

1.1. Feladat: **Órai kidolgozásra: 1. feladat** Három azonos m tömegű gyöngyszemet fonálra fűzünk, egymástól kis távolságokban a fonálhoz rögzítünk, és az elhanyagolható tömegű fonál végét ujjunkkal fogva függőlegesen lógatunk a g homogén nehézségi erőtérben. Majd a t_0 időpillanattól kezdve a gyorsulással emeljük a fonál végét. Mekkora erő ébred az egyes fonalszakaszokban?

Megoldás: Számozzuk meg a gyöngyszemeket. A legalsó legyen az 1-es, a középső a 2-es, a felső a 3-as. A koordinátarendszer y tengelye mutasson felfele. Mindhárom gyöngyszem a gyorsulással mozog felfele, így a koordinátarendszerben pozitív értékű. A nehézségi gyorsulás lefele mutat, így negatív: $-g$.
Az 1-es testre a K_1 kötélerő (az 1-es 2-es testet összekötő fonalszakaszon) hat felfele;
a 2-es testre hat a $-K_1$ kötélerő lefele (az 1-es 2-es testet összekötő fonalszakaszon) és a K_2 kötélerő felfele (a 2-es 3-as testet összekötő fonalszakaszon);
a 3-as testre hat a $-K_2$ kötélerő lefele (az 2-es 3-as testet összekötő fonalszakaszon) és az F kötélerő felfele (ezt mi fejtjük ki).
A mozgásegyenletek rendre (1-2-3 testre):

$$ma = K_1 - mg, \tag{1.1.1}$$

$$ma = K_2 - K_1 - mg, \tag{1.1.2}$$

$$ma = F - K_2 - mg. \tag{1.1.3}$$

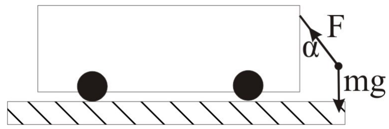
Az egyenletrendszerből a keresett kötélerők:

$$K_1 = m(a+g), \tag{1.1.4}$$

$$K_2 = ma + K_1 + mg = 2m(a+g), \tag{1.1.5}$$

$$F = ma + K_2 + mg = 3m(a+g). \tag{1.1.6}$$

Megjegyzés: Gyakorlásként általánosítsa a feladatot különböző számú és tömegű gyöngyszemekre!



1. ábra.

1.2. Feladat: **Órai kidolgozásra: 2. feladat** Egy mozgó kocsin rögzített fonál végén egy $m = 2$ kg tömegű test lóg. A fonal szakítási szilárdsága $F_{max} = 30$ N. Mekkora egyenletes gyorsulással mozoghat a kocsi, hogy a fonal még éppen el ne szakadjon?

Megoldás: Jelölje α azt a szöget, amelyet a gyorsítás alatt a kötél bezár a függőlegessel (lásd az 1. ábrát). Ekkor az F kötélerő vízszintes komponense gyorsítja a testet

$$ma = F \sin\alpha, \tag{1.2.1}$$

míg a függőleges komponens a súlyerővel tart egyensúlyt

$$mg = F \cos\alpha. \tag{1.2.2}$$

A két egyenletből a gyorsulás maximális értéke

$$a_{max} = \sqrt{\frac{F_{max}^2}{m^2} - g^2}. \tag{1.2.3}$$

Behelyettesítve a számadatokat $a_{max} \approx 11,18$ m/s^2 adódik.

1.3. Feladat: (HN 5B-19) Nyugalomból induló test súrlódásmentesen csúszik le a vízszintessel $\alpha = 30^0$-os szöget bezáró lejtőn.
(a) Határozzuk meg azt a t_0 időpillanatot amikor a test eléri a $v_0 = 50$ m/s-os sebességet?
(b) Mekkora s távolságba jut el ezalatt a test?

Megoldás:
(a) Az m tömegű test mozgásegyenlete

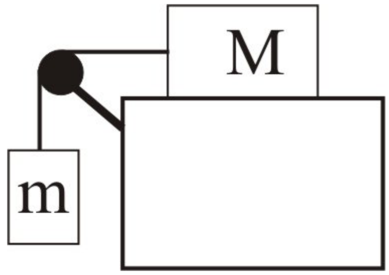
$$ma = mg \sin\alpha, \tag{1.3.1}$$

amiből a test gyorsulása

$$a = g \sin\alpha. \tag{1.3.2}$$

A test sebessége az idő függvényében

$$v(t) = g \sin\alpha t. \tag{1.3.3}$$



2. ábra.

A t_0 időpillanatban a test eléri a v_0 sebességet, azaz $v(t_0) = v_0$. A sebesség eléréséhez szükséges idő pedig $t_0 = v_0/(g \sin\alpha)$. Behelyettesítve a számadatokat $t_0 = 10$ s adódik.
(b) A t_0 idő alatt megtett út

$$s = \frac{1}{2} g t_0^2 \sin\alpha. \tag{1.3.4}$$

Behelyettesítve a számadatokat $s = 250$ m adódik.

1.4. Feladat: (HN: 5B-33) Az m és $M = 8$ kg tömegű hasábokat az 2. ábrán látható elrendezésben fonallal kötünk össze. A csiga tengelysúrlódása és az érintkező felületek közötti súrlódás elhanyagolható.
(a) Mekkora az alsó test m tömege, ha a testek gyorsulása $a = 2$ m/s^2?
(b) Mekkora K erő feszíti a fonalat?

Megoldás:
(a) Mivel a hasábokat összekötő kötél nem nyúlik meg, mindkét hasáb gyorsulása ugyanakkora (lásd a 3. ábrát.) Az egyes hasábok mozgásegyenletei

$$ma = mg - K \tag{1.4.1}$$

és

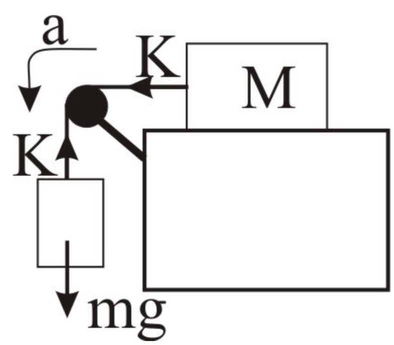
$$Ma = K. \tag{1.4.2}$$

E két egyenletből

$$m = \frac{Ma}{g-a} = 2\,\mathrm{kg} \tag{1.4.3}$$

adódik.
(b) A kötelet feszítő erő pedig

$$K = \frac{mM}{m+M} g = 16\,\mathrm{N}. \tag{1.4.4}$$



3. ábra.

Centripetális erő

1.5. Feladat: Egy $m = 70$ kg tömegű pilóta repülőgépével $R = 1$ km sugarú függőleges síkú pályán $v = 1080$ km/h egyenletes sebességgel köröz. A repülőnek állandóan a teteje néz a körpálya középpontja felé. Mekkora erővel nyomja a pilóta az ülést a körpálya legfelső pontján?

Megoldás: A körpálya legfelső pontjában a pilóta körmozgását az mg súlyerő és a kör közepe felé mutató N támaszerő biztoítja:

$$m\frac{v^2}{R} = mg + N \tag{1.5.1}$$

Ebből az egyenletből az N támaszerő könnyen kifejezhető:

$$N = m\frac{v^2}{R} - mg = 5600\,\mathrm{N}. \tag{1.5.2}$$

A pilóta az ülést ugyanekkora nagyságú, ellentétes irányú erővel nyomja. (A nyomóerő a pilóta súlyának nyolcszorosa.)

1.6. Feladat: **Órai kidolgozásra: 3. feladat** (HN 5B-20) Egy gépkocsi $R = 18$ m sugarú, függőleges síkú, kör alakú domboldalon mozog felfelé. A domb tetején a vezető azt tapasztalja, hogy éppen csak érinti az ülést. Mekkora sebességgel haladt a gépkocsi?

Megoldás: A domb tetején két erő hat a vezetőre, melyek biztosítják a vezető körpályán történő mozgását. A kör közepe felé mutató mg súlyerő, valamint az ülés által kifejtett, ellentétes irányú N támaszerő határozzák meg a vezető gyorsulását, mely (feltéve, hogy az autó nem válik el az úttesttől) a centripetális gyorsulással egyenlő:

$$m\frac{v^2}{R} = mg - N. \tag{1.6.1}$$

Határesetben, amikor a vezető éppen csak érinti az ülést, $N \to 0$. A határesethez tartozó sebesség:

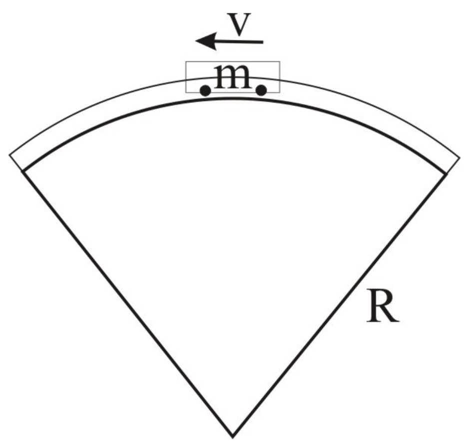
$$v = \sqrt{Rg} \approx 13,41 \text{ m/s}. \tag{1.6.2}$$

1.7. Feladat: (HN 5B-21) A hullámvasút kocsija állandó $v = 6$ m/s-os sebességgel halad át a pálya $R = 6$ m sugarú, függőleges síkú részének tetőpontján a 4. ábrán látható módon. A kocsi és az utasok együttes tömege $m = 1350$ kg.

(a) Mekkora és milyen irányú a kocsi gyorsulása a tetőponton?

(b) Mekkora eredő erő hat ebben a pillanatban a kocsira és az utasokra összesen?

(c) Mekkora erővel nyomja a pálya a kocsit a tetőponton?



4. ábra.

Megoldás:

(a) A kocsi gyorsulása a kör közepe felé (azaz lefelé) mutató centripetális gyorsulással egyenlő, melynek nagysága

$$a = a_{cp} = \frac{v^2}{R} = 6\,\text{m/s}^2. \tag{1.7.1}$$

(b) A kocsira ható erők eredőjét a kocsi gyorsulása határozza meg:

$$F = ma_{cp} = 8100\,\text{N}. \tag{1.7.2}$$

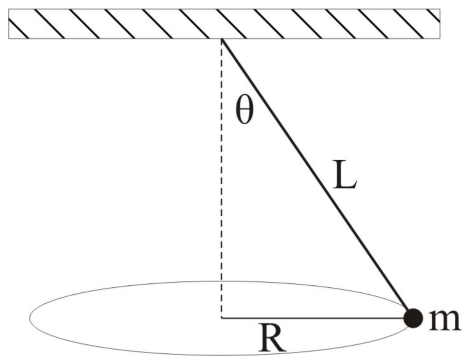
(c) A kocsira ható erők eredője a hullámvasút N támaszerejének és a kocsira ható súlyerőnek a különbsége:

$$F = mg - N. \tag{1.7.3}$$

Felhasználva a centripetális gyorsulás az (1.7.1) kifejezését, valamint az (1.7.2) egyenletet:

$$N = mg - ma_{cp} = 5400\,\mathrm{N}. \tag{1.7.4}$$

1.8. Feladat: (HN 5B-31) Egy L hosszúságú fonállal a mennyezethez erősített testet az 5. ábrán látható módon úgy hozunk mozgásba, hogy a test vízszintes síkú, R sugarú körpályán mozog, miközben a fonál a függőlegessel θ szöget zár be. Fejezzük ki egy fordulat idejét az L és θ paraméterek függvényében!

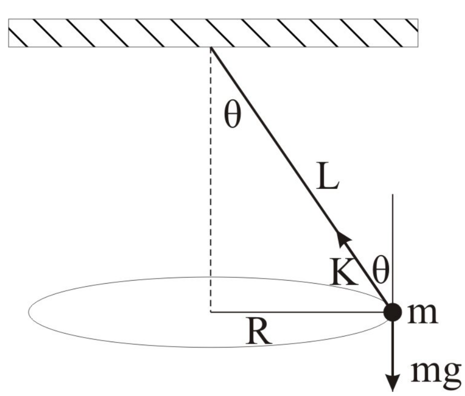


5. ábra.

Megoldás: Jelölje K az m tömegű testre ható kötélerő nagyságát (lásd a 6. ábrát). Mivel a tömegpont nem mozdul el függőlegesen, a súlyerő egyensúlyt tart a kötélerő függőleges komponensével:

$$K\cos\theta = mg, \tag{1.8.1}$$

míg a vízszintes komponens a körpályán történő mozgáshoz biztosítja a szükséges centripetális



6. ábra.

gyorsulást:

$$K \sin\theta = m\frac{v^2}{R}. \tag{1.8.2}$$

A két egyenletből a tömegpont sebessége (felhasználva, hogy $R = L\sin\theta$)

$$v = \sqrt{gL\sin\theta\,\mathrm{tg}\,\theta}. \tag{1.8.3}$$

Egy fordulat ideje

$$T = \frac{2R\pi}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}. \tag{1.8.4}$$

1.9. Feladat: **Órai kidolgozásra: 4. feladat** (HN: 5B-32) Egy $L = 1,4$ m hosszú fonálinga függőleges síkban mozog. Amikor az ingatest sebessége $v = 2,2$ m/s, akkor a fonál $\alpha = 20^0$-os szöget zár be a függőlegessel. Határozzuk meg ebben a pillanatban

(a) az ingatest a_{cp} centripetális gyorsulását,

(b) az ingatest a_t tangenciális gyorsulását,

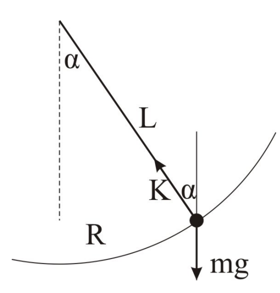
(c) a fonalat feszítő K erőt, ha az ingatest tömege $m = 600$ g!

Megoldás:

(a) A centripetális gyorsulás nagysága:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{L} \approx 3,45\mathrm{m/s^2}. \tag{1.9.1}$$

(b) A tangenciális gyorsulást a súlyerő tangenciális komponense határozza meg (a kötélerő merőleges a körpálya érintőjére, ahogy azt a 7. ábra mutatja):



7. ábra.

$$a_t = g\sin\alpha \approx 3,40\mathrm{m/s^2}. \tag{1.9.2}$$

A körmozgást a K kötélerő és a súlyerő fonálirányú komponense — $mg\cos\alpha$ — különbsége biztosítja. A mozgásegyenlet a radiális komponensekre

$$m\frac{v^2}{L} = K - mg\cos\alpha. \tag{1.9.3}$$

Az egyenletből kifejezhető a K kötélerő:

$$K = m\frac{v^2}{L} + mg\cos\alpha \approx 7,7\mathrm{N}. \tag{1.9.4}$$

Súrlódási erő

1.10. Feladat: Vízszintes asztallapon két tégla fekszik egymáson. Minimálisan mekkora F erővel kell hatni az alsó téglára, hogy az kicsússzon a felső alól? A súrlódási tényező az asztallap és a tégla, valamint a két tégla között $\mu = 0,4$, a két tégla össztömege pedig $m = 5$ kg.

Megoldás: Jelölje a felső test tömegét m_1, az alsó test tömegét pedig m_2. Ekkor $m = m_1 + m_2 = 5$ kg. Legyen ezen felül a_1 a felső test, a_2 pedig az alsó test gyorsulása. A felső téglára $F_{s1} = \mu m_1 g$ súrlódási erő hat, mellyel a tégla mozgásegyenlete:

$$m_1 a_1 = F_{s1} = \mu m_1 g \tag{1.10.1}$$

Az alsó téglára a felső tégla által kifejtett F_{s1} súrlódási erő mellett, az alsó tégla és asztallap között fellépő $F_{s2} = \mu(m_1 + m_2)g$ súrlódási erő is hat, melyek fékezni próbálják az alsó tégla mozgását. Az alsó tégla mozgásegyenlete:

$$m_2 a_2 = F - \mu m_1 g - \mu(m_1 + m_2)g = F - \mu m_1 g - \mu m g. \tag{1.10.2}$$

Az első egyenletből kifejezve az a_1 gyorsulást

$$a_1 = \mu g \tag{1.10.3}$$

adódik. amely az m_1 test maximális gyorsulását jelenti. Ez azt jelenti, hogy a mnimális F erő esetén még nem válnak el, és $a = a_1 = a_2$ írható. Ezzel a második mozgásegyenletbe a $\mu m_1 g$ helyére $m_1 a$ -t helyettesítve

$$m_2 a = F - m_1 a - \mu(m_1 + m_2)g. \tag{1.10.4}$$

Ezt az F erőre átrendezve a minimális erő

$$F = (m_1 + m_2)a + \mu(m_1 + m_2)g = ma + \mu m g = 40\,\mathrm{N}. \tag{1.10.5}$$

Megjegyzés: A feladatmegoldásból látszik, hogy a kérdés megválaszolásához csak az össztömegre volt szükség. Kisebb vagy nagyobb erő alkalmazásakor az egyenletekből levont következtetések módosulhatnak! Ezeknek diszkussziója gyakorló feladat.

1.11. Feladat: Egy autó az országúton nagy sebességgel halad. Az autógumi és az úttest felülete között a tapadási súrlódási együttható $\mu = 0,9$. Az $R = 100$ m sugarú, vízszinten kanyarban mekkora lehet a jármű maximális sebessége, hogy ne sodródjon ki?

Megoldás: A kanyarban az F tapadási súrlódási erő biztosítja az autónak a körmozgáshoz szükséges centripetális gyorsulást:

$$m\frac{v^2}{R} = F. \tag{1.11.1}$$

A maximális tapadási erő $F_{max} = \mu mg$ felső határt szab az autó maximális sebességének is, mely az alábbi egyenlőtlenséggel fejezhető ki:

$$m\frac{v^2}{R} \leq F_{max} = \mu mg. \tag{1.11.2}$$

Maximális sebesség esetén egyenlőség áll fenn az egyenlet két oldala között, ezért a maximális sebesség nagysága:

$$v_{max} = \sqrt{\mu g R}. \tag{1.11.3}$$

Behelyettesítve a számadatokat $v_{max} = 30$ m/s adódik.

1.12. Feladat: (HN 5B-43) Egy gyerek a parttól $s = 12$ m-re áll a befagyott tavacska jegén. Csizmája és a jég közötti tapadási súrlódási együttható $\mu = 0,05$. Határozzuk meg azt a minimális időt, amely alatt kisétálhat a partra, ha megcsúszás nélkül lépked?

Megoldás: A gyerek $F = \mu mg$ erővel nyomja a jeget, ezért csúszás nélkül legfeljebb $a = \mu g$ gyorsulásra képes. Az s út megtételéhez ezért legkevesebb

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{\mu g}} = 6,93\,\mathrm{s} \tag{1.12.1}$$

idő szükséges.

1.13. Feladat: (HN 5B-44) Egy rakodórámpán láda nyugszik. Ha a rámpa szöge $\alpha_1 = 30^0$-os, akkor a láda megcsúszik. Amennyiben a csúszó láda alatt a lejtő hajlásszöge $\alpha_2 = 20^0$-ra csökken, akkor a láda mozgása egyenletessé válik. Határozzuk meg a lejtő és a láda közötti csúszási és tapadási súrlódási együttható értékét!

Megoldás: A feladatban jelölje μ_t a tapadási és μ_{cs} a csúszási súrlódási együtthatót. Nyugalmi helyzetben a tapadási súrlódási erő egyensúlyt tart a súlyerő lejtővel párhuzamos komponensével, ezért

$$ma = 0 = mg\sin\alpha_1 - \mu_t g\cos\alpha_1. \tag{1.13.1}$$

Az egyenletből

$$\mu_t = \operatorname{tg}\alpha_1 \approx 0,577 \tag{1.13.2}$$

tapadási súrlódási együttható adódik. Egyenletes gyorsulás esetén a súlyerő lejtővel párhuzamos komponense a csúszási súrlódási együtthatóval tart egyensúlyt:

$$ma = 0 = mg\sin\alpha_2 - \mu_{cs} g\cos\alpha_2. \tag{1.13.3}$$

Az egyenletből

$$\mu_{cs} = \operatorname{tg}\alpha_2 \approx 0,364. \tag{1.13.4}$$

csúszási súrlódási együttható adódik.

1.14. Feladat: (HN 5B-46) Az $m = 5$ kg-os tömegű test lecsúszik a vízszintessel $\alpha = 41^0$ szöget bezáró lejtőn. A test és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható $\mu = 0,3$.
(a) Határozzuk meg a súrlódási erő nagyságát!
(b) Mekkora gyorsulással csúszik le a test?

Megoldás:
(a) A lejtőn lecsúszó testre ható N támaszerő (kényszererő) egyensúlyt tart a súlyerő lejtőre merőleges komponensével, ezért $N = mg\cos\alpha$. A csúszási súrlódási erő pedig

$$F_s = \mu N = \mu mg\cos\alpha \approx 11,32\ \mathrm{N}. \tag{1.14.1}$$

(b) A test lejtővel párhuzamos mozgását a súlyerő lejtővel párhuzamos komponense és a súrlódási erő határozzák meg:

$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha, \tag{1.14.2}$$

ahonnan a test gyorsulása

$$a = g\sin\alpha - \mu\cos\alpha \approx 4,3\ \mathrm{m/s^2}. \tag{1.14.3}$$

1.15. Feladat: (HN 5B-47) A vízszintessel $\alpha = 60^0$-os szöget bezáró lejtőn egy test $a = g/2$ gyorsulással csúszik le. Mekkora a csúszó súrlódási együttható?

Megoldás: A lejtővel párhuzamos mozgást leíró dinamikai egyenlet:

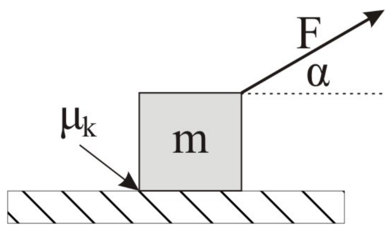
$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha. \tag{1.15.1}$$

Behelyettesítve a gyorsulás értékét a súrlódási együttható az alábbi alakban fejezhető ki:

$$\mu = \frac{\sin\alpha - \frac{1}{2}}{\cos\alpha}. \tag{1.15.2}$$

Behelyettesítve a számadatokat $\mu \approx 0,732$ adódik a súrlódási együttható értékére.

1.16. Feladat: **Órai kidolgozásra: 5. feladat** (HN 5B-52) Egy $m = 4$ kg tömegű testet a 8. ábrának megfelelően $F = 20$ N erővel húzunk ($\alpha = 30^0$). Mekkora a test gyorsulása, ha a test és talaj közötti csúszási súrlódási együttható $\mu_k = 0,2$?



8. ábra.

Megoldás: Mivel a test nem emelkedik fel a talajról a függőleges gyorsulása zérus. Ezért

$$0 = N + F\sin\alpha - mg, \tag{1.16.1}$$

ahol N a testre ható támaszerő. Írjuk fel a mozgás vízszintes vetületére vonatkozó mozgásegyenletet!

$$ma = F\cos\alpha - F_s, \tag{1.16.2}$$

ahol F_s a testre ható súrlódási erő, melyet az N támaszerő segítségével határozhatunk meg:

$$F_s = \mu_k N. \tag{1.16.3}$$

Az egyenletrendszer megoldásából a test gyorsulása meghatározható:

$$a = \frac{F(\cos\alpha + \mu_k\sin\alpha)}{m} - \mu_k g. \tag{1.16.4}$$

Behelyettesítve a számadatokat $a \approx 2,83$ m/s^2 adódik.

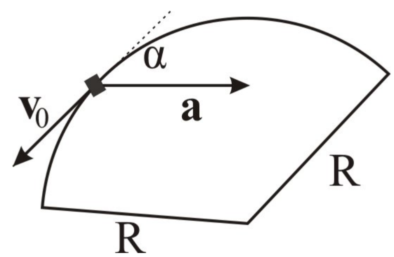
1.17. Feladat: **Órai kidolgozásra: 6. feladat** (HN 5B-58) Egy gépkocsi $R = 80$ m sugarú vízszintes körpályán mozog. A 9. ábra azt a pillanatot mutatja, amikor az autó sebessége éppen $v_0 = 10$ m/s és a gyorsulása $\mathbf{a}$, mely a körpálya érintőjével $\alpha = 35^0$-os szöget zár be.

(a) Mekkora a gépkocsi centripetális gyorsulása?

(b) Mekkora a tangenciális gyorsulás?

(c) Mekkora utat tesz meg a gépkocsi a megállásig, ha az érintő menti gyorsulása állandó?

(d) Az úttest vízszintes, azaz a kanyarban nem túlemelt pálya. Mekkora minimális nyugalmi súrlódási együttható szükséges ahhoz, hogy az ábrán mutatott pillantban a gépkocsi ne csússzon meg?



9. ábra.

Megoldás:

(a) A centripetális gyorsulás az autó sebességének és a kanyar görbületi sugarának segítségével határozható meg:

$$a_{cp} = \frac{v_0^2}{R}. \tag{1.17.1}$$

Behelyettesítve a számadatokat $a_{cp} = 1,25$ m/s^2 adódik.

(b) Az ábra segítségével meghatározhatjuk az $\mathbf{a}$ gyorsulásvektor nagyságát is. Felhasználva, hogy az $\mathbf{a}$ vektor sugár irányú vetülete éppen a centripetális gyorsulás, az eredő gyorsulás nagysága

$$a = |\mathbf{a}| = \frac{a_{cp}}{\sin\alpha}. \tag{1.17.2}$$

A tangenciális gyorsulás pedig az

$$a_t = a\cos\alpha = \frac{a_{cp}}{\mathrm{tg}\,\alpha} \tag{1.17.3}$$

összefüggéssel határozható meg. Behelyettesítve a számadatokat $a_t \approx 1,79$ m/s^2 adódik.

(c) Amennyiben a kocsi lassul, de a tangenciális gyorsulása állandó, a kocsi megállásáig megtett út meghatározható az alábbi összefüggésből:

$$s = v_0 t_0 - \frac{1}{2} a_t t_0^2, \tag{1.17.4}$$

ahol $t_0 = v_0/a_t$ a megállásig eltelt idő. Behelyettesítve a számadatokat $s \approx 27,9$ m adódik a megállásig megtett út hosszára.
(d) A dinamika alapegyenlete szerint

$$ma = F_s = \mu mg, \tag{1.17.5}$$

amelyből a minimális súrlódási együttható, mely mellett a kocsi még épp nem csúszik meg, $\mu \approx 0,218$.

1.18. Feladat: * A vízszintes asztalon m tömegű test nyugszik. A test és az asztallap közötti súrlódási együttható μ. (A tapadási és csúszási súrlódási együttható legyen azonos.) A testre a $t = 0$ időpillanattól kezdve $F(t) = f_0 t$ erővel hatunk.
(a) Mi az f_0 együttható mértékegysége?
(b) Mikor indul el a test?
(c) Mekkora lesz a test sebessége a t időpillanatban?

Megoldás:
(a) Az f_0 együttható mértékegysége N/s, mivel idő dimenziójú mennyiséggel megszorozva erő dimenziójú mennyiséget kell, hogy kapjunk.
(b) A test abban a t_0 pillanatban indul el, amikor a rá ható erő eléri a tapadási erő maximumát, azaz $F(t_0) = f_0 t_0 = \mu mg$, ahonnan

$$t_0 = \frac{\mu mg}{f_0}. \tag{1.18.1}$$

(c) A test mozgásegyenlete a megmozdulás pillanatát követő $t \geq t_0$ időintervallumban:

$$ma = f_0 t - \mu mg \tag{1.18.2}$$

Az egyenletből kifejezhetjük a gyorsulást az idő függvényében:

$$a(t) = \frac{f_0}{m} t - \mu g. \tag{1.18.3}$$

A sebességet a gyorsulás idő szerinti integrálásával határozhatjuk meg:

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} a(t')\,\mathrm{d}t' \int_{t_0}^{t} \left(\frac{f_0}{m} t' - \mu g\right) \mathrm{d}t' = \frac{1}{2}\frac{f_0}{m} t^2 - \mu g t + \frac{1}{2}\frac{\mu^2 m g^2}{f_0}. \tag{1.18.4}$$

Tehát a test sebessége:

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha: } t \leq t_0 \\ \frac{1}{2}\frac{f_0}{m} t^2 - \mu g t + \frac{1}{2}\frac{\mu^2 m g^2}{f_0} & \text{ha: } t > t_0 \end{cases}. \tag{1.18.5}$$

1.19. Feladat: Egy függőleges tengelyű korong ω_0 szögsebességgel forog. A korong közepétől R távolságban m tömegű test helyezkedik el. A korong és a test között μ tapadási súrlódási együttható van. A korong egyenletes lassulásba kezd. Legalább mekkora legyen a tapadási súrlódási együttható, hogy a test ne csússzon meg?

Megoldás: A korong szögsebessége az

$$\omega(t) = \omega_0 - \beta t \tag{1.19.1}$$

függvény szerint változik. Ezért a korongon lévő test centripetális gyorsulása

$$a_{cp} = R\omega(t)^2 = R(\omega_0 - \beta t)^2. \tag{1.19.2}$$

A test tangenciális gyorsulása pedig

$$a_t = R\beta. \tag{1.19.3}$$

A test eredő gyorsulása

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}, \tag{1.19.4}$$

melyet a tapadási erő biztosít a test számára. A tapadás feltétele, hogy

$$\mu mg \geq ma = m\sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}. \tag{1.19.5}$$

A tapadási súrlódási együttható ezért:

$$\mu \geq \frac{\sqrt{R^2(\omega_0 - \beta t)^4 + (R\beta)^2}}{g}. \tag{1.19.6}$$

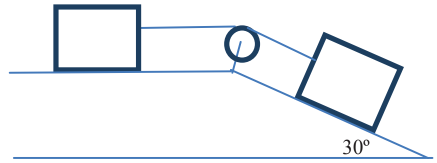
A legnagyobb tapadás a lassulás kezdeti pillanatában szükséges, ezért a minimális tapadasi együttható

$$\mu_{min} = R\frac{\sqrt{\omega_0^4 + \beta^2}}{g}. \tag{1.19.7}$$

1.20. Feladat: **Órai kidolgozásra: 7. feladat** A 10. ábrán két, egyenként $m = 40$ kg tömegű test van összekapcsolva. A súrlódási együttható mindkét testre $\mu = 0,15$. Határozzuk meg a testek gyorsulását és a fonálban ébredő K kötélerőt!

Megoldás: Jelölje a a testek gyorsulását. (Mivel a kötél nem nyúlik meg, mindkét test azonos gyorsulással mozog) A balodali test mozgásegyenlete

$$ma = K - \mu mg, \tag{1.20.1}$$



10. ábra.

míg a lejtőn fekvő test mozgásegyenlete

$$ma = mg\sin\alpha - K - \mu mg\cos\alpha \tag{1.20.2}$$

A két egyenletből meghatározható a testek gyorsulása:

$$a = \frac{1}{2}(g\sin\alpha - \mu g - \mu g\cos\alpha). \tag{1.20.3}$$

Behelyettesítve a számadatokat $a \approx 1,1$ m/s^2 adódik. A kötélerőt az (1.20.1) egyenlet segítségével határozhatjuk meg:

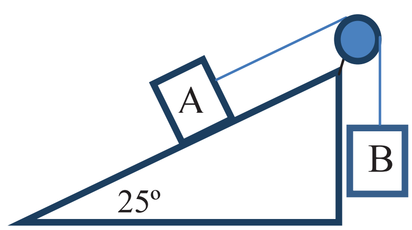
$$K = ma + \mu mg = \frac{\sin\alpha + \mu - \mu\cos\alpha}{2} mg. \tag{1.20.4}$$

Behelyettesítve a számadatokat $K \approx 104$ N adódik.

1.21. Feladat: A vízszintessel $\alpha = 25^0$-os szöget bezáró lejtőn nyugalmi helyzetből indulva $m_A = 30$ kg tömegű testet a 11. ábrán látható módon $m_B = 20$ kg tömegű test húz felfelé. A súrlódási együttható $\mu = 0,2$.

(a) Számoljuk ki a testek gyorsulását!

(b) Számoljuk ki a testek által $t_0 = 2$ s alatt megtett utat!



11. ábra.

Megoldás:

(a) Jelölje K a kötélet feszítő erőt és a a testek gyorsulását. A testek mozgásegyenlete:

$$m_A a = K - m_A g\sin\alpha - \mu m_A g\cos\alpha \tag{1.21.1}$$

és

$$m_B a = m_B g - K. \tag{1.21.2}$$

E két egyenletből a gyorsulás kifejezhető:

$$a = \frac{m_B - m_A \sin\alpha - \mu m_A \cos\alpha}{m_A + m_B}. \tag{1.21.3}$$

Behelyettesítve a számadatokat $a \approx 0,0376$ m/s^2 adódik.

(b) A testek által megtett út t_0 idő alatt, amennyiben a testek nyugalmi helyzetből indulnak:

$$s = \frac{1}{2} a t_0^2. \tag{1.21.4}$$

Behelyettesítve a számadatokat $s \approx 7,5$ cm adódik.

Közegellenállási erők

1.22. Feladat: ** Az m tömegű testet a koordinátarendszer origójából v_0 sebességgel a vízszinteshez képest α szöggel elhajítunk a homogén nehézségi erőtérben. A testre az $\mathbf{F}_k = -c\mathbf{v}$ sebességgel arányos közegellenállás is hat, ahol c konstans arányossági tényező.)

(a) Írjuk fel a mozgásegyenletet!

(b) Határozzuk meg a sebességkomponensek időbeli változását!

(c) Határozzuk meg a test helyét, mint az idő függvényét!

(d) Határozzuk meg a pálya alakját!

Megoldás: Amennyiben az y tengely pozitív iránya felfelé mutat, a nehézségi gyorsulás vektora a $\mathbf{g} = (0, -g)$ alakban adható meg. A gyorsulás és sebesség vektorok pedig rendre $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ és $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ alakúak. A $t_0 = 0$ időpillanatban a kezdeti sebességkoponensek $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ valamint $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$. Mivel a koordináta-rendszer origóját a hajítás helyére tesszük, a kezdeti pozíció koordinátáit jelöljék $x_0 = 0$ és $y_0 = 0$.

(a) Az elhajított testre két erő hat, az $m\mathbf{g}$ súlyerő valamint a $-c\mathbf{v}$ közegellenállási erő. A dinamika alaptörvénye (Newton II. axiómája) szerint a test mozgásegyenlete

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - c\mathbf{v}. \tag{1.22.1}$$

Írjuk fel az $\mathbf{a}$ vektor x és y komponenseire vonatkozó skaláregyenleteket. Felhasználva, hogy $a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$ és $a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$, az

$$m a_x = m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -c v_x \tag{1.22.2}$$

és

$$ma_y = m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -mg - cv_y \tag{1.22.3}$$

egyenleteket kapjuk.

(b) Az (1.22.2) és (1.22.3) egyenletek egymástól függetlenek (azaz nem csatolt differenciálegyenlet-rendszert írnak le), aminek köszönhetően szeparált egyenleteket kapunk a mozgás x és y vetületére. Az (1.22.2) egyenletben szeparálva a változókat és idő szerint integrálva az egyenletet:

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{\mathrm{d}v_x}{v_x} = -\frac{c}{m}\int_{t_0=0}^{t} \mathrm{d}t'. \tag{1.22.4}$$

Az integrálások elvégzése után

$$\ln\frac{v_x(t)}{v_{0x}} = -\frac{c}{m}t \tag{1.22.5}$$

adódik, ahonnan a sebesség x komponense

$$v_x(t) = v_{0x}e^{-\frac{c}{m}t}. \tag{1.22.6}$$

Hasonló módon az (1.22.3) egyenletben is szeparáljuk az integrálási változókat:

$$m\int_{v_{0y}}^{v_y} \frac{\mathrm{d}v_y}{mg + cv_y} = -\int_{t_0=0}^{t} \mathrm{d}t'. \tag{1.22.7}$$

Az integrálás elvégzésével az

$$\frac{m}{c}\ln\frac{mg + cv_y(t)}{mg + cv_{0y}} = -t, \tag{1.22.8}$$

összefüggéshez jutunk, melyből az y irányú sebességkomponens

$$v_y(t) = \frac{mg + cv_{0y}}{c}e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c}. \tag{1.22.9}$$

Megjegyzés: Belátható, hogy a $c \longrightarrow 0$ határesetben a megoldások a ferde hajításra érvényes $v_x(t) = v_{0x}$ illetve $v_y(t) = v_{0y} - gt$ megoldásokba tartanak. Ennek igazolását az olvasóra bízzuk.

(c) A test helykoordánátáit a sebesség idő szerinti integrálásával számolhatjuk ki, azaz

$$x(t) = \int_{t_0=0}^{t} v_{0x}e^{-\frac{c}{m}t'}\mathrm{d}t' = \left[-\frac{m}{c}v_{0x}e^{-\frac{c}{m}t'}\right]_{t_0=0}^{t} = \frac{m}{c}v_{0x}\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right) \tag{1.22.10}$$

és

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t_0=0}^{t} \left(\frac{mg + cv_{0y}}{c}e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c}\right)\mathrm{d}t' = \left[-\frac{m}{c}\frac{mg + cv_{0y}}{c}e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c}t\right]_{t_0=0}^{t} \\ &= \frac{m}{c}\frac{mg + cv_{0y}}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c}t\right). \end{aligned} \tag{1.22.11}$$

Megjegyzés: Belátható, hogy a $c \longrightarrow 0$ határesetben a megoldások a ferde hajításra érvényes $x(t) = v_{0x}t$ illetve $y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ megoldásokhoz tartanak. Ezeknek igazolását az olvasóra bízzuk.

(d) A pályagörbe alakját megkapjuk, ha az (1.22.10) egyenletből kiküszöböljük a t időváltozót:

$$t = -\frac{m}{c}\ln\left(1 - \frac{cx}{mv_{0x}}\right). \tag{1.22.12}$$

Ezt behelyettesítve az (1.22.11) egyenletbe

$$y(x) = \frac{mg + cv_{0y}}{cv_{0x}}x + \frac{m^2 g}{c^2}\ln\left(1 - \frac{cx}{mv_{0x}}\right) \tag{1.22.13}$$

adódik. Ezt a pályáját ballisztikus pályának nevezik. *Megjegyzés:* Belátható, hogy a $c \longrightarrow 0$ határesetben a megoldás egy parabola pálya. Másfelől a logaritmus függvény argumentumát megvizsgálva látható, hogy a

$$1 > \frac{cx}{mv_{0x}} \tag{1.22.14}$$

relációnak fenn kell állnia. Innen következik, hogy

$$x < \frac{mv_{0x}}{c}, \tag{1.22.15}$$

azaz ennél az x távolságnál soha nem megy messzebb a test.

1.23. Feladat: ** Az m tömegű testet h magasságban elejtjük. A testre az $\mathbf{F}_k = -c\mathbf{v}$ sebességgel arányos közegellenállás is hat. (A c konstans arányossági tényező.)

(a) Írjuk fel a mozgásegyenletet!

(b) Határozzuk meg a sebességének időbeli változását!

(c) Határozzuk meg a test helyét, mint az idő függvényét!

Megoldás: Amennyiben a függőleges tengely pozitív iránya felfelé mutat, a nehézségi gyorsulás a negatív irányba gyorsítja az elejtett testet, melyre két erő hat, az $m\mathbf{g}$ súlyerő valamint a $-c\mathbf{v}$ közegellenállási erő. A dinamika alaptörvénye (Newton II. axiómája) szerint a test mozgásegyenlete

$$ma = -mg - cv. \tag{1.23.1}$$

Felhasználva, hogy $a = \frac{dv}{dt}$, az

$$ma = m\frac{dv}{dt} = -mg - cv \tag{1.23.2}$$

egyenletet kapjuk.

(a) Szeparáljuk az (1.23.2) egyenletben az integrálási változókat, majd végezzük el az integrálás műveletét:

$$m\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{mg+cv} = -\int_{t_0=0}^t \mathrm{d}t'. \tag{1.23.3}$$

Az integrálás elvégzésével az

$$\frac{m}{c}\ln\frac{mg+cv(t)}{mg} = -t, \tag{1.23.4}$$

összefüggéshez jutunk, melyből a sebesség kifejezhető:

$$v(t) = \frac{mg}{c}e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c}. \tag{1.23.5}$$

(b) A test helykoordinátáját a sebesség idő szerinti integrálásával számolhatjuk ki, azaz

$$z(t) = \int\limits_{t_0=0}^{t} \left(\frac{mg}{c}e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c}\right)\mathrm{d}t' = \left[-\frac{m}{c}\frac{mg+cv_{0y}}{c}e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c}t\right]_{t_0=0}^{t}$$

$$= \frac{m}{c}\frac{mg}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c}t\right). \tag{1.23.6}$$