MECHANIKA 2	A) HF 04.

A következő **A és B** feladatokban **használja a mellékletben** közölt, az anyag rugalmas tulajdonságait jelllemző adatok közötti (ismert) összefüggéseket!

A 07.) feladat

Egy homogén, izotróp anyagban a deformációs tenzor nem függ a helytől.

a.) Tegyük fel, hogy a deformációs tenzor olyan, hogy az $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_0$ (ahol ε_0 állandó) és a többi nulla. Írja fel az ε_{xy} kapcsolatát az $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$ elmozdulásmezővel és az $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_0$ ismeretében határozza meg $s_i(x, y, z)$ (i=x,y,z) elmozdulások lehetséges matematikai alakját! Milyen elmozdulásokat írnak le az ε_0-t tartalmazó tagon kívül megjelenő tagok? (Tegye fel, hogy a kifejezés a koordináták lineáris függvénye!)

b.) Most tegyük fel, hogy a deformációs tenzor diagonális. A főátlóban lévő elemek ismeretében határozza meg $s_i(x, y, z)$ (i=x,y,z) elmozdulások lehetséges matematikai alakját!

c.) Az a.) feladatot általánosítva, tegyük fel, hogy a deformációs tenzornak csak a diagonálisán kívül vannak elemei. Ezek ismeretében határozza meg $s_i(x, y, z)$ (i=x,y,z) elmozdulások lehetséges matematikai alakját!

d.) Tételezzük fel, hogy a koorinátadendszerünket ügyesen vettük fel, így az $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$ elmozdulásmező a forgásokat már nem tartalmazza! Ennek az ismeretében határozza meg az $s_i(x, y, z)$ (i=x,y,z) elmozdulások végső (a fenti előírásoknak megfelelő) alakját, ha a deformációs tenzor tetszőleges (szimmetrikus) mátrix!
(*Segítség: az elmozdulásmező és a deformációs tenzor közötti összefüggés lineáris, így az a.) b.) és c.) feladat eredményei alapján a d.) könnyen megoldható.*)

A 08.) feladat

Egy „b_0” hosszúságú, állandó „A_0” keresztmetszetű, hosszú egyenes hasábot a felső lapjánál fogva fellógatunk. A hasáb tengelye a „+z” tengely, amely függőlegesen **lefelé** mutat. A hasáb felső lapja a z=0 helyen lévő, vízszintes (x,y) síkhoz van „ragasztva”. A hasáb anyaga homogén és a sűrűsége ρ_0.

Keressük a statikus egyensúlyban lévő test σ_{ij} feszültség tenzorát.

a.) Válassza ki a hasábnak egy tetszőleges „z” helyen lévő infinitezimális „dz” vastagságú és „dm” tömegű szeletét! Írja fel a szelet egyensúlyát megadó statikus egyenletet!

b.) Az egyensúlyi egyenlet alapján írja fel a σ_{zz}-re adódó (elsőrendű) differnenciál egyenletet!

c.) Oldja meg a σ_{zz}-re kapott differnenciál egyenletet azzal a peremfeltétellel., hogy a „z=b_0” helyen lévő alaplapon nyílvánvalóan $\sigma_{zz}(b_0)$ =0!

d.) Alkalmazza a Hooke-törvényt! (lásd melléklet!) Fejezze ki az ε_{zz}, ill. az $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$ deformációkat a σ_{zz} függvényében! Használja a $\{\mu, \lambda\}$ Lamé-állandókat!

e**.) EXTRA gyakorlásra**: Mutassa meg, hogy az $\varepsilon_{zz}(\sigma_{zz})$ összefüggés lineáris, az együttható pedig éppen a mellékletben is szereplő „E” Young modulus!

MECHANIKA 2	B) HF 04.

B 10.) feladat

Egy állandó „A_0" keresztmetszetű, egyenes hasábot a felső lapjánál fogva fellógatunk. A hasáb tengelye a „+z" tengely, amely függőlegesen **lefelé** mutat. A hasáb felső lapját a z=0 helyen lévő vízszintes (x,y) síkhoz „lágyan odaragasztottuk". Ez azt jelenti, hogy egyensúly beállta után a fedőlaphoz tapadó **ragasztóban nyírófeszültség már nem ébredhet**. A hasáb anyaga homogén és a sűrűsége ρ_0. A hasáb terheletlen (azaz a felragasztás előtti) hossza „b_0".

A hasábot a merev alsó lapjánál egy „F_0" nagyságú, „z" irányú erővel megtámasztottuk.

Először legyen $F_0=0$! **Akkor az A08. feladathoz jutottunk**. Azaz:

a.) Válassza ki a hasábvnak egy tetszőleges „z" helyen lávő infinitezimális, „dz" vastagságú és „dm" tömegű szeletét! Írja fel a szelet egyensúlyát megadó egyenletet!

b.) Az egyensúlyi egyenlet alapján írja fel a σ_{zz}-re adódó (alsőrendű) differnenciál egyenletet!

c.) Oldja meg a σ_{zz}-re kapott differnenciál egyenletet azzal a peremfeltétellel., hogy a „$z=b_0$" helyen lévő alaplapon nyílvánvalóan $\sigma_{zz}(b_0)=0$!

d.) Alkalmazza a Hooke-törvényt! (lásd melléklet!) Fejezze ki az ε_{zz}, ill. az $\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}$ deformációkat a σ_{zz} függvényében!

e.) Mutassa meg, hogy az $\varepsilon_{zz}(\sigma_{zz})$ összefüggés lineáris, az együttható pedig éppen a mellékletben is szereplő „E" Young modulus!

Most **legyen F_0 egy véges** érték!

f.) Az F_0 miatt az alsó lapon egy felfelé mutató σ_0 húzó/nyomó feszültség lép fel, azaz a c.) feladat peremfeltétele megváltozik. A fedőlapon ezt a hatást ragsztó kompenzálja.
Mutassa meg, hogy az új feszültség: $\sigma_{zz}=[\sigma_{zz}]_{\text{RÉGI}}-\sigma_0$. Ahol a $[\sigma_{zz}]_{\text{RÉGI}}$ az $F_0=0$ esetben kapott húzófeszültség.

g.) Az új σ_{ij} ismeretében határozza meg az ε_{ij} deformáció tenzort!

h.) A ε_{ij} deformáció tenzor ismeretében határozza meg az elmozdulásmező $s_z(z)$ komponensét!

i.) Az $s_z(z)$ függvény ismeretében hazározza meg az alsó lap elmozdulását!

j.) Határozza meg azt az F_0 erőt, amelynél a rúd b_0 hossza változatlan marad

---

B 11.) feladat

Adott egy elmozdulásmező: $$\vec{s}(\vec{r})=\begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix}=A\cdot\begin{bmatrix} \nu\cdot(b-z)\cdot x \\ \nu\cdot(b-z)\cdot y \\ \frac{1}{2}\left\{\nu\cdot\left(x^2+y^2\right)+(b-z)^2-b^2\right\} \end{bmatrix}$$

A formulában szereplő $\{A,b,\nu\}$ paraméterek ismert állandók

a.) Határozza meg az elmozdulásmező $s_{ij}=\dfrac{\partial s_j}{\partial x_i}$ derivált tenzorát! Ahol a szokásos módon

$j=x,y,z$ valamint $x_1=x$, $x_2=y$ és $x_3=z$.

b.) Az s_{ij} derivált tenzor ismeretében határozza meg az ε_{ij} deformációs tenzort!

c.) Az s_{ij} derivált tenzor ismeretében határozza meg az R_{ij} elfordulást megadó tenzort!

d.) Az ε_{ij} deformációs tenzor ismeretében határozza meg a σ_{ij} feszültség tenzort. Tudjuk, hogy a deformáció egy ρ sűrűségű, homogén anyagban lép fel. Az „E" Young modulus és a „ν" Poisson szám ismert anyagi jellemzők. A deformációs tenzorban szerplő $A = \rho g / E$.

B 12.) feladat

Adott egy homogén, izotróp anyag, amelyben a feszültség tenzor a következő alakú:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

a.) Határozza meg a ε_{ij} deformációs tenzort! A szükséges anyagjellemzők ismertek!

Legyen az $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ egy egységvektor. Az $\vec{n}$ által definiált felületen ébredő feszültség vektort jelölje $\vec{\sigma}_n = (\sigma_{nx}, \sigma_{ny}, \sigma_{nz})$ (Mint az ismeretes ez az adott irányú „egységnyi feületre ható felületi erő".).

b.) Írja fel az $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ egységvektor gömbi **polár koordinátás** (ϑ, φ) alakját!

c.) Határozza meg a $\vec{\sigma}_n = (\sigma_{nx}, \sigma_{ny}, \sigma_{nz})$ feszültségvektort!

d.) Határozza meg a $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ ún. „ főfeszültségeket", azaz a diagonalizált σ_{ij} elemeit! Ennek alapján határozza meg a fellépő maximális feszültséget!

e.) Kersse meg azokat az $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ irányú felületeket, amelyekben csak húzófeszültség ébred!

f.) Határozza meg az anyagban fellépő maximális deformációt!

MELLÉKLET	**HF 04.**

M1.) A rugalmas tulajonságokat jellemző **anyagi állandók** közötti használt kapcsolatok.

A két független adat: Lamé állandók: $\{\mu, \lambda\}$ vagy
Young modulus és Poisson szám : $\{E, \nu\}$

$$E = \frac{\mu \cdot (2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \eta)}$$

$$\lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

M2.) A **Hooke törvény** homogén izotróp anyag esetén:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\Theta_\varepsilon\delta_{ij} \qquad \text{ahol} \qquad \Theta_\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

$$\varepsilon_{ij} = 2\mu'\sigma_{ij} + \lambda'\Theta_\sigma\delta_{ij} \qquad \text{ahol} \qquad \Theta_\varepsilon = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$2\mu' = \frac{1}{2\mu} \qquad \lambda' = -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}$$