

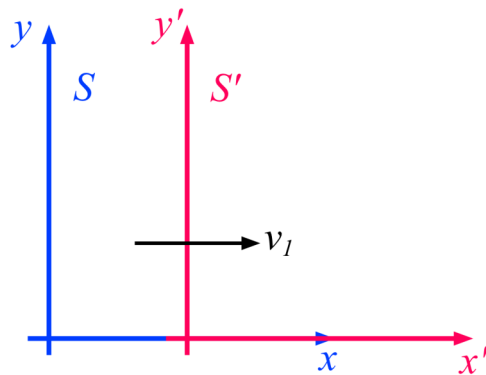
Wigner-rotáció, Thomas-precesszió

Bokor Nándor, BME, 2015.

[Megjegyzés: az alábbi írásban az időt *méter* mértékegységben mérjük (pl. a „ $t = 1\text{m}$ “ kifejezés a $t = 3.33 \cdot 10^{-9}\text{s}$ -ot jelenti, azaz 1 méternyi idő alatt azt az időtartamot értjük, amely alatt a fény 1m távolságot megtesz), a sebességeket pedig *dimenzió nélküli* mennyiségként értelmezzük (pl. „ $v = 0.4$ “ a fénysebesség 40%-át jelenti).]

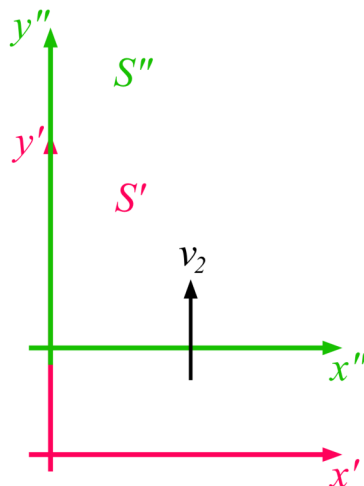
I. Két Lorentz-transzformáció (Lorentz-boost) egymásutánja

Egy S' inerciarendszer v_1 sebességgel halad egy S inerciarendszerhez képest a pozitív x -tengely (és x' -tengely) irányába (ld. 1. ábra). Egy eseménynek az S -ben, ill. S' -ben megadott tér-idő-koordinátái között tehát a jólismert x -irányú Lorentz-transzformáció (ún. *Lorentz-boost*) terem kapcsolatot.



1. ábra

Egy S'' inerciarendszer v_2 sebességgel halad az S' -höz képest a pozitív y' -tengely (és y'' -tengely) irányába (ld. 2. ábra). Egy eseménynek az S' -ben, ill. S'' -ben adott tér-idő-koordinátái között az y' -irányú Lorentz-boost adja meg a kapcsolatot.

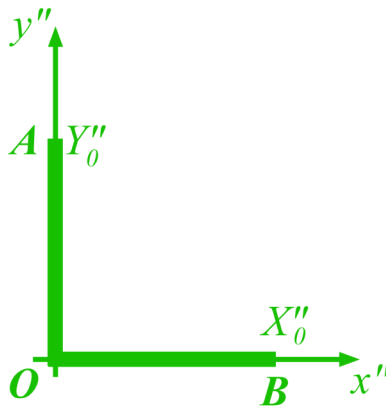


2. ábra

Milyen koordináta-transzformációra van szükség, hogy az S -beli tér-idő-koordinátákból *közvetlenül* megkapjuk az S'' -beli tér-idő-koordinátákat?

Másképpen: hogyan írható fel két Lorentz-boost egymásutánja? (Azt várjuk, hogy az is pusztán egyetlen Lorentz-boost lesz, csak valamilyen ferde irányban.)

Mielőtt erre a kérdésre formálisan válaszolnánk, próbáljunk egy kis fizikai intuíciót szerezni. Képzeljük el, hogy S'' -ben egymásra merőlegesen nyugszik két rúd (3. ábra). *Milyen irányúak ezek a rudak az S -beli megfigyelő szerint?*



3. ábra

Hogy ezt a kérdést eldönthessük, előbb meg kell állapodnunk, mit értünk egy *mozgó rúd iránya* alatt: praktikusán megfogalmazva, ki kell dolgoznunk egy mérési eljárást, amellyel S a hozzá képest mozgó rudak orientációját méri. Egy lehetséges mérési eljárás – amely egyidejű események helyszínének a mérésén alapul – a következő: Tekintsük az O , A , B eseményeket, amelyek a rudak végpontjainál következnek be (ld. 3. ábra), S -ből mérve *egyidejűen* (a $t = 0$ időpillanatban). A három esemény S -ben mért *helye* kirajzolja a két rúd orientációját az S vonatkoztatási rendszerben. Hol (milyen térkoordinátájú helyeken) játszódnak le ezek az események S szerint? Ezt a kérdést az $S'' \rightarrow S'$ és $S' \rightarrow S$ Lorentz-transzformációkból kaphatjuk meg.

Az O esemény térbeli koordinátái S'' -ben:

$$x''_O = 0,$$

$$y''_O = 0.$$

Ugyanennek az eseménynek a S' -beli koordinátái:

$$\begin{aligned}x'_O &= 0, \\y'_O &= v_2 t'_O.\end{aligned}$$

Az S -beli koordináták pedig:

$$x_O = v_1 t, \quad (1)$$

$$y_O = \frac{v_2(t - v_1 x_O)}{\sqrt{1 - v_1^2}}. \quad (2)$$

Az utolsó egyenletben az S és S' közötti Lorentz-transzformációt alkalmaztuk a t'_O koordináta átírására vesszőtlen koordinátákra.

Az A esemény térbeli koordinátái S'' -ben:

$$\begin{aligned}x''_A &= 0, \\y''_A &= Y_0\end{aligned}$$

S' -ben ugyanennek az eseménynek a koordinátáira a következő egyenleteket írhatjuk:

$$\begin{aligned}x'_A &= 0, \\y'_A - v_2 t'_A &= \sqrt{1 - v_2^2} \cdot Y_0.\end{aligned}$$

Az utolsó egyenlet az y''_A -re felírt Lorentz-transzformáció, kicsit átrendezve.

Az S -beli térkoordináták pedig:

$$x_A = v_1 t, \quad (3)$$

$$y_A = y'_A = Y_0 \sqrt{1 - v_2^2} + v_2 \frac{t - v_1 x_A}{\sqrt{1 - v_1^2}}. \quad (4)$$

Az utolsó egyenlet utolsó tagjában az S és S' közötti Lorentz-transzformációt alkalmaztuk a t'_A koordináta átírására vesszőtlen koordinátákra.

A B esemény térbeli koordinátái S'' -ben:

$$\begin{aligned}x''_B &= X_0, \\y''_B &= 0.\end{aligned}$$

Az S' -beli térkoordináták:

$$\begin{aligned}x'_B &= X''_0, \\y'_B &= v_2 t'_B.\end{aligned}$$

Az S és S' -közötti Lorentz-transzformációt felhasználva elvégezzük az

$$X''_0 = \frac{x_B - v_1 t}{\sqrt{1 - v_1^2}} \quad \text{és} \quad t'_B = \frac{t - v_1 x_B}{\sqrt{1 - v_1^2}}$$

helyettesítéseket, amiből az S -beli térkoordinátákra

$$x_B = X''_0 \sqrt{1 - v_1^2} + v_1 t, \quad (5)$$

$$y_B = v_2 \frac{t - v_1 x_B}{\sqrt{1 - v_1^2}} \quad (6)$$

adódik.

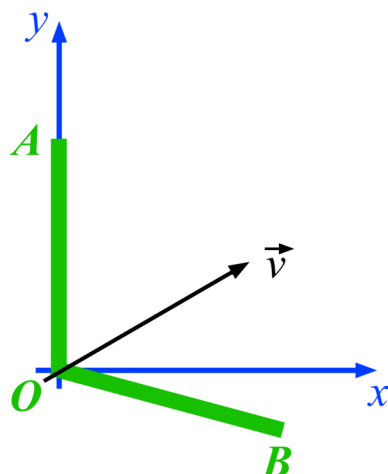
Az \mathbf{O} , \mathbf{A} , \mathbf{B} események S -ben ugyanakkor, a $t = 0$ időpontban zajlanak. Az (1)-(6) kifejezésekbe $t = 0$ -t helyettesítve az alábbi térkoordinátákat kapjuk:

$$(x_O, y_O) = (0, 0), \quad (7)$$

$$(x_A, y_A) = \left(0, Y''_0 \sqrt{1 - v_2^2}\right), \quad (8)$$

$$(x_B, y_B) = \left(X''_0 \sqrt{1 - v_1^2}, -v_1 v_2 X''_0\right). \quad (9)$$

A (7)-(9) összefüggésekből látható, hogy S az \mathbf{O} , \mathbf{A} , \mathbf{B} események helyét a 4. ábrának megfelelő elrendezésűnek méri. S szerint az S'' vonatkoztatási rendszer x'' és y'' -tengelyeit kijelölő merőleges rudak *nem merőlegesek*.



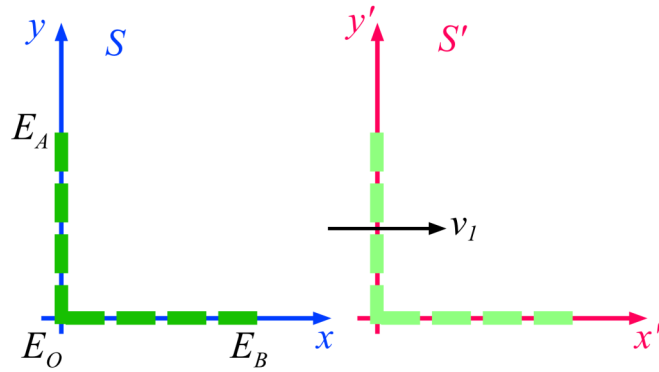
4. ábra

Próbáljuk meg a fenti meglepő eredményt egyszerű, intuitív fizikai képpel megérteni. Kövessük a két rúd „élettörténetét“ attól kezdve, hogy az S vonatkoztatási rendszerben nyugalomban levő gyárban elkészítették és merőlegesen elhelyezték őket, egészen addig, amíg az S' vonatkoztatási rendszerrel együtt száguldanak, és az ottani nézőpont szerint merőlegesek egymásra. Mi történt közben a rudakkal? Miért nem maradtak végig merőlegesek az S -beli megfigyelő számára?

Tegyük fel, hogy a (méter)rudak kezdetben S -ben nyugszanak, és merőlegesek egymásra. [Nem törődve ennek a fizikai képnek az irrealitásával, feltesszük, hogy a rudak egyes atomjai függetlenek egymástól, azaz a rudakban semmiféle rugalmas hullám nem halad. Ha a két végüket eltérő módon meglökjük, azok onnantól kezdve egymástól függetlenül tudnak mozogni.]

Két folyamat zajlik le egymás után:

1. Az S' megfigyelő a két rudat hirtelen jobbra meglöki, és „magával sodorja“ őket (ld. 5. ábra).

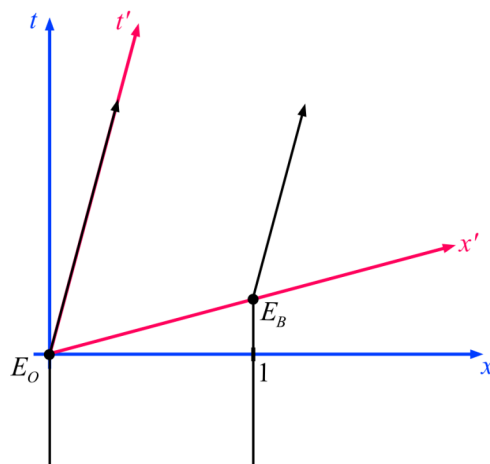


5. ábra

Fontos: az 5. ábrán látható E_O , E_A , E_B „lökési események“ az S' -ben mérve egyidejűek!

Az S és S' közötti Lorentz-transzformációs képletekből könnyen levezethető, hogy:

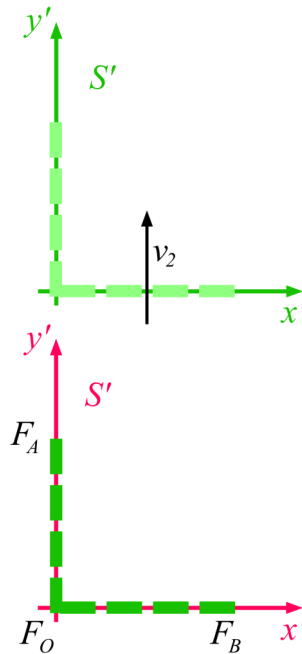
- S szerint az E_O és E_A események egyidejűek, azaz a függőleges rúd a lökés után is párhuzamos marad az y -tengellyel (és méter hosszúságú marad),
- S szerint az E_O és E_B események *nem* egyidejűek ($t_{E_O} < t_{E_B}$). De ez nem baj, ettől még a lökés után a vízszintes rúd is párhuzamos marad az x -tengellyel (csak rövidebb lesz, mint 1 méter, S és S' szerint is). Ez utóbbi jelenséget az alábbi (x,t) tér-idődiagram segít megérteni:



6. ábra

A rudak most már S' -ben nyugszanak, és még mindig merőlegesek egymásra (S és S' szerint is).

2. Az S'' megfigyelő a két rudat hirtelen az y' irányában meglöki, és „magával sodorja” őket (ld. 7. ábra).



7. ábra

Az egyszerűség kedvéért legyenek a 7. ábrán látható F_O , F_A , F_B „lökési események” ismét az S' -ben mérve egyidejűek.

Ismét az S és S' közötti Lorentz-transzformációs képletekre gondoljunk. Ezekből könnyen látható, hogy:

- S szerint az F_O és F_A események egyidejűek, azaz a függőleges rúd a lökés után is párhuzamos marad az y -tengellyel,
- S szerint az F_O és F_B események nem egyidejűek ($t_{F_O} < t_{F_B}$). A vízszintes rúd nem marad párhuzamos az x -tengellyel, mert S mérése szerint a B pont később lett felfelé meglökve, mint az O pont.

Ezzel intuitíve megértettük a 4. ábra furcsa rúd-orientációit, de még ezek után is nehezen megemészthetően hangzik (bár igaz) az a kijelentés, hogy S szerint az S'' vonatkoztatási rendszer y'' -tengelye párhuzamos a saját y -tengelyével, az S'' x'' -tengelye viszont nem párhuzamos a saját x -tengelyével.

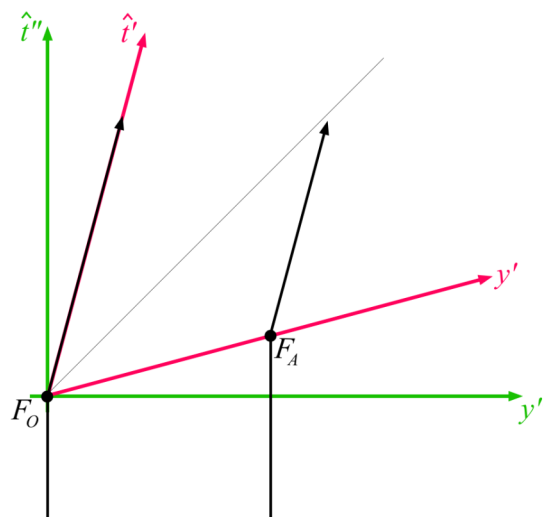
Hogyan látja ezt a kérdést az S'' -beli megfigyelő? Az ő mérése szerint melyik kétvesszős tengely párhuzamos melyik vesszőtlen tengellyel?

S'' a következő okoskodással (ill. méréssel) válaszol a kérdésre: Játsszuk le a rudak történetét bemutató fenti „filmet“ *visszafelé!* (A visszafelé lejátszott filmben az idő – fordított irányú – múlását \hat{t} -pal jelölöm.)

1. A fordított film első jelenetében a két rúd az S'' vonatkoztatási rendszer x'' -, y'' -tengelyei irányában áll. A visszafelé lejátszott filmben az F_O , F_A , F_B események (végtelenül gyors) „lefékezési“ események lesznek, amelyek az S'' -ben nyugvó rudakat S' -ben nyugvó rudakká fékezik. S' szerint az F_O , F_A , F_B események (a visszafelé lejátszott filmben is) *egyidejűek*.

Az S'' és S' közötti Lorentz-transzformációs képletekből könnyen levezethető, hogy:

- S'' szerint az F_O és F_B események egyidejűek, azaz a vízszintes rúd a fékezés után is párhuzamos marad az x'' -tengellyel,
- S'' szerint az F_O és F_A események *nem* egyidejűek ($\hat{t}_{F_O}'' < \hat{t}_{F_A}''$). De ez nem baj, ettől még a fékezés után a függőleges rúd is párhuzamos marad az y'' -tengellyel (csak rövidebb lesz, mint volt). Ez utóbbi jelenséget az alábbi (y'', \hat{t}'') téridődiagramon is láthatjuk:



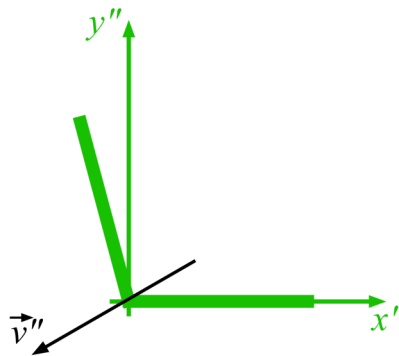
8.ábra

2. A visszafelé lejátszott filmben ezután az S' -ben nyugvó rudakat újabb fékező lökések érik (E_O, E_A, E_B események), amelyek S' -ben *egyidejűek*, és amelyek után a két rúd az S -ben nyugalomba kerül.

Az S'' és S' közötti Lorentz-transzformációs képletekből könnyen levezethető, hogy:

- S'' szerint az E_O és E_B események *egyidejűek*, azaz a vízszintes rúd párhuzamos marad az x'' -tengellyel,
- S'' szerint az E_O és E_A események *nem egyidejűek* ($\hat{t}_{E_O}'' < \hat{t}_{E_A}''$). A függőleges rúd *nem marad párhuzamos az y'' -tengellyel*, mert S'' szerint az A pont később lett lefékezve, mint az O pont.

S'' szerint tehát a rudak helyzete kezdetben (amikor még S -ben nyugalomban voltak) a 9. ábrának megfelelő:



9. ábra

Összefoglalva: S'' szerint az S vonatkoztatási rendszer y -tengelye *nem* párhuzamos a saját y'' -tengelyével, az S rendszer x -tengelye viszont párhuzamos a saját x'' -tengelyével! A 4. ábrát a 9. ábrával összevetve látható, hogy *a párhuzamosság nem abszolút fogalom* (S szerint párhuzamos tengelyek S'' szerint nem párhuzamosak, és fordítva.)

Az S -beli, S' -beli és S'' -beli nézőpontokat az alábbi táblázatokban összegezhetjük (az intuíciónknak ellentmondó sorokat rikító színekkel kiemelttem).

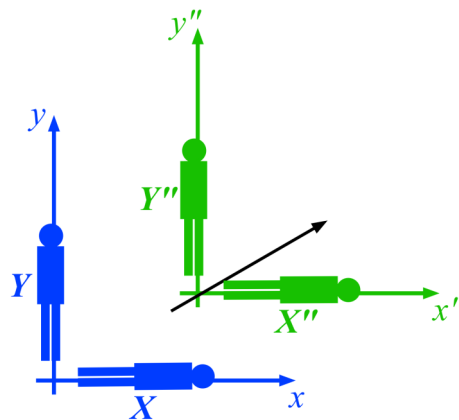
S szerint	„az x -tengely párhuzamos az x' -tengellyel“ (S' egyetért)
S szerint	„az y -tengely párhuzamos az y' -tengellyel“ (S' egyetért)
S szerint	„az x -tengely NEM párhuzamos az x'' -tengellyel“ (S'' NEM ért

	egyet, ld. lejjebb)
S szerint	„az y -tengely párhuzamos az y'' -tengellyel“ (S'' NEM ért egyet, ld. lejjebb)

S' szerint	„az x' -tengely párhuzamos az x -tengellyel“ (S egyetért)
S' szerint	„az y' -tengely párhuzamos az y -tengellyel“ (S egyetért)
S' szerint	„az x' -tengely párhuzamos az x'' -tengellyel“ (S'' egyetért)
S' szerint	„az y' -tengely párhuzamos az y'' -tengellyel“ (S'' egyetért)

S'' szerint	„az x'' -tengely párhuzamos az x' -tengellyel“ (S' egyetért)
S'' szerint	„az y'' -tengely párhuzamos az y' -tengellyel“ (S' egyetért)
S'' szerint	„az x'' -tengely párhuzamos az x -tengellyel“ (S NEM ért egyet, ld. feljebb)
S'' szerint	„az y'' -tengely NEM párhuzamos az y -tengellyel“ (S NEM ért egyet, ld. feljebb)

Még jobban illusztrálhatjuk, hogy a merőlegesség és a párhuzamosság nem abszolút fogalmak, ha a fenti táblázatok színessel jelölt sorai köré egy rövid történetet kerekítünk. A 10. ábrán négy ember látható, a nevük X , Y , X'' és Y'' . X és Y az S vonatkoztatási rendszerben nyugszik, párhuzamosan az x - ill. az y -tengellyel, X'' és Y'' pedig a S'' vonatkoztatási rendszerben nyugszik, párhuzamosan az x'' - ill. az y'' -tengellyel.



10. ábra

Négyük között az alábbi párbeszéd zajlanak:

X : „Merőlegesek vagyunk.“

Y : „Szerintem is.“

X'' : „Merőlegesek vagyunk.“

Y'' : „Szerintem is.“

X : „Nem vagyunk párhuzamosak.“

X'' : „De igen!“

Y : „Párhuzamosak vagyunk.“

Y'' : „Nem!“

X : „Merőlegesek vagyunk.“

Y'' : „Szerintem is.“

Y : „Nem vagyunk merőlegesek.“

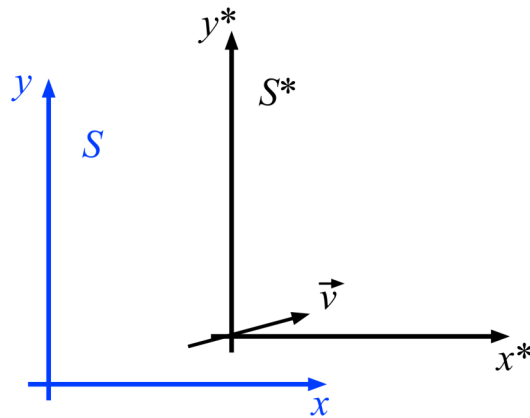
X'' : „Szerintem sem.“

A 4. és 9. ábrákból ellenőrizhetjük, hogy ezekben a párbeszédekben *mindenki igazat mondott*.

A fentiek alapján kezdjük sejteni, hogy az S és S'' vonatkoztatási rendszerek között kapcsolatot teremtő koordináta-transzformáció *nem egy egyszerű (ferde irányú) Lorentz-boost lesz!*

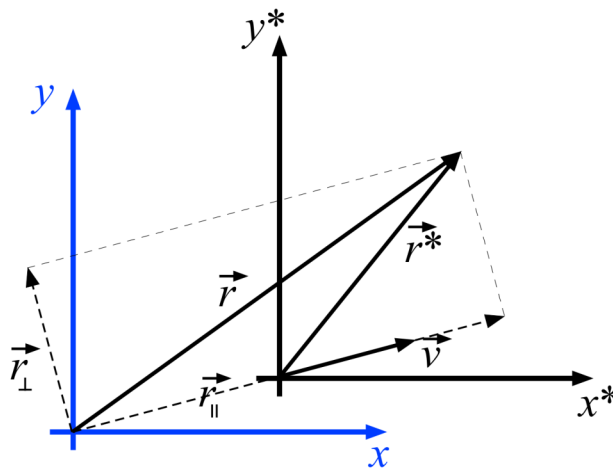
II. Egyetlen ferde irányú Lorentz-boost

Hogy ez utóbbi sejtést igazoljuk, először nézzük meg részletesen, milyen egyenletek írják le a Lorentz-transzformációt két olyan inerciarendszer között, amelyek nem tisztán x - vagy y -irányban, hanem az (x,y) síkban valamilyen *általános irányban* mozognak egymáshoz képest (11. ábra).



11. ábra

Egy adott esemény helyvektora az S rendszerben \vec{r} , ugyanennek az eseménynek a helyvektora az S^* rendszerben \vec{r}^* (12. ábra).



12. ábra

Bontsuk fel az \vec{r} helyvektort egy S^* haladási irányába mutató és egy arra merőleges összetevőre: $\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$. Ez azért nagyon praktikus ötlet, mert az r_{\parallel} és r_{\perp} játssza most azokat a szerepeket, amelyeket a jól megszokott 1D

Lorentz-boost képleteiben az x -, ill. y -koordináták játszanak. Ennek alapján egy esemény S -beli $(t, \vec{r}) = (t, r_{II}, r_{\perp})$ téridő-koordinátái, ill. S^* -beli $(t^*, \vec{r}^*) = (t^*, r_{II}^*, r_{\perp}^*)$ téridő-koordinátái között a Lorentz-transzformációt az alábbi két transzformációs egyenletbe [egy skalár és egy vektori egyenlet, tehát valójában három egyenlet!] foglalhatjuk össze:

$$t^* = \gamma(t - r_{II}v), \quad (10)$$

$$\vec{r}^* = \vec{r}_{\perp} + \gamma(\vec{r}_{II} - \vec{v}t), \quad (11)$$

ahol $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$.

(10)-ben $r_{II}v$ helyett $\vec{r} \cdot \vec{v}$ írható, (11)-ben pedig kihasználhatjuk, hogy $\vec{r}_{II} = r_{II} \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v} \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v}$, ill. hogy $\vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{II}$. Ezekkel a helyettesítésekkel az általános irányú (az (x, y) síkban \vec{v} relatív sebességgel mozgó inerciarendszerek közötti) Lorentz-boost az alábbi alakba írható:

$$t^* = \gamma(t - \vec{r} \cdot \vec{v}), \quad (12)$$

$$\vec{r}^* = \vec{r} + (\gamma - 1)\vec{r}_{II} - \gamma\vec{v}t = \vec{r} + \left[\frac{\gamma - 1}{v^2} (\vec{r} \cdot \vec{v}) - \gamma t \right] \vec{v}. \quad (13)$$

Felhasználva, hogy $\vec{v} = (v_x, v_y)$, a (12) és (13) egyenleteket egyetlen mátrix-egyenletté foglalhatjuk össze:

$$\begin{pmatrix} t^* \\ x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v_x & -\gamma v_y \\ -\gamma v_x & 1 + (\gamma - 1) \frac{v_x^2}{v^2} & (\gamma - 1) \frac{v_x v_y}{v^2} \\ -\gamma v_y & (\gamma - 1) \frac{v_x v_y}{v^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{v_y^2}{v^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix}. \quad (14)$$

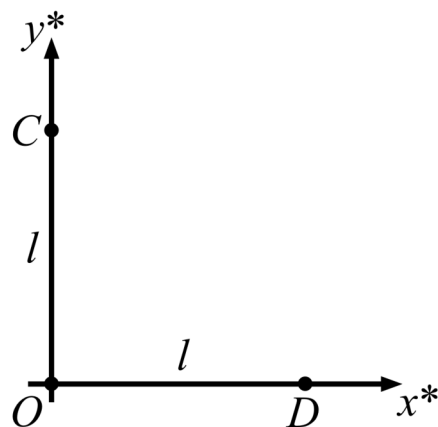
A (14) jobb oldalán szereplő transzformációs mátrixot, azaz az *általános irányú Lorentz-boost mátrixát* jelöljük $\tilde{\Lambda}$ -mal. A (14)-ből rögtön tehetünk

egy – a későbbiekben fontosnak bizonyuló – megfigyelést: az S és S^* vonatkoztatási rendszerek között kapcsolatot teremtő $\tilde{\Lambda}$ mátrix *szimmetrikus*.

Első ránézésre – az 11. ábrát az 1. és 2. ábrákkal összevetve – az az érzésünk, hogy \vec{v} alkalmas megválasztásával az S'' vonatkoztatási rendszert teljesen meg fogjuk tudni feleltetni az S^* -nak (hiszen mindkettő az S -hez képest valamilyen ferde irányban mozgó inerciarendszer). De valóban így van-e?

Először is nézzük meg, milyen irányúnak méri az S -beli megfigyelő az S^* vonatkoztatási rendszer x^* -, y^* -tengelyeit (hogy aztán ezt összevethessük a 4. ábrával, ami az S'' tengelyeinek irányát mutatja S szerint).

Tekintsük a C , O , D eseményeket (pl. fényvillanásokat), amelyek az x^* -, y^* -tengelyeken játszódnak le, a 13. ábra szerint.



13. ábra

A 13. ábráról leolvashatók a három esemény térbeli koordinátái:

$(x_O^*, y_O^*) = (0, 0)$, $(x_C^*, y_C^*) = (0, l)$ és $(x_D^*, y_D^*) = (l, 0)$. A fényvillanások S -ben mérve legyenek egyidejűek ($t_O = t_C = t_D = 0$), így ugyanis valóban ki fogják jelölni az x^* -, y^* -tengelyek állását S -ben mérve. Írjuk fel a (14) Lorentz-transzformáció inverzét:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v_x & \gamma v_y \\ \gamma v_x & 1 + (\gamma - 1) \frac{v_x^2}{v^2} & (\gamma - 1) \frac{v_x v_y}{v^2} \\ \gamma v_y & (\gamma - 1) \frac{v_x v_y}{v^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{v_y^2}{v^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t^* \\ x^* \\ y^* \end{pmatrix}. \quad (15)$$

[A fenti egyenlet jobb oldalán szereplő transzformációs mátrixot vagy úgy kaphatjuk meg, hogy ténylegesen kiszámoljuk a (14)-ben szereplő $\tilde{\Lambda}$ inverzét, vagy – egyszerűbben, fizikai megfontolásból, az S és S^* mozgása közötti szimmetriát kihasználva – úgy, hogy (14)-ben megcseréljük a csillagos és csillagtalan koordinátákat, és elvégezzük a $v_x \rightarrow -v_x$ és $v_y \rightarrow -v_y$ helyettesítéseket.]

(15)-ből az O esemény koordinátáira a következőket írhatjuk:

$$t_O = \gamma t_O^* = 0,$$

$$x_O = \gamma v_x t_O^*,$$

$$y_O = \gamma v_y t_O^*,$$

amiből a térbeli koordinátákra

$$x_O = 0 \text{ és } y_O = 0 \text{ adódik.}$$

(15)-ből a D eseményre a következőket kapjuk:

$$t_D = \gamma t_D^* + \gamma v_x l = 0 \rightarrow t_D^* = -v_x l,$$

$$x_D = \gamma v_x t_D^* + \left[1 + (\gamma - 1) \frac{v_x^2}{v^2} \right] l,$$

$$y_D = \gamma v_y t_D^* + (\gamma - 1) \frac{v_x v_y}{v^2} l,$$

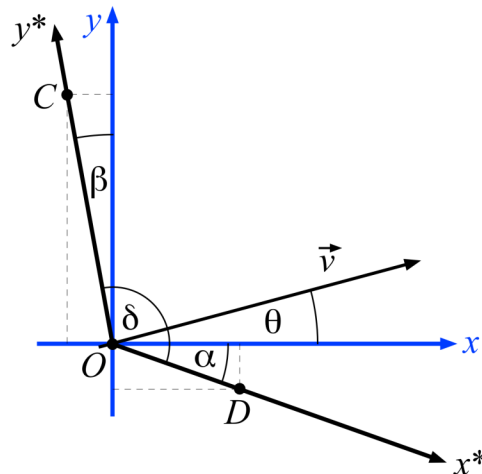
amiből némi algebra után a térbeli koordinátákra az

$$x_D = l \left[-\gamma v_x^2 + 1 + (\gamma - 1) \frac{v_x^2}{v^2} \right] \text{ és } y_D = l \left[\left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{v_x v_y}{v^2} \right] \text{ kifejezések adódnak.}$$

Hasonló módon kaphatjuk meg (15)-ből, némi algebra után, a C esemény S -ben mért térbeli koordinátáit:

$$x_C = l \left[\left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{v_x v_y}{v^2} \right] \text{ és } y_C = l \left[-\gamma v_y^2 + 1 + (\gamma - 1) \frac{v_y^2}{v^2} \right].$$

A kapott eredmények részletes elemzése nélkül is azonnal észrevehetjük, hogy x_C és y_D is negatív! Az S vonatkoztatási rendszerből mérve az S^* tengelyei tehát a 14. ábrának megfelelően állnak:

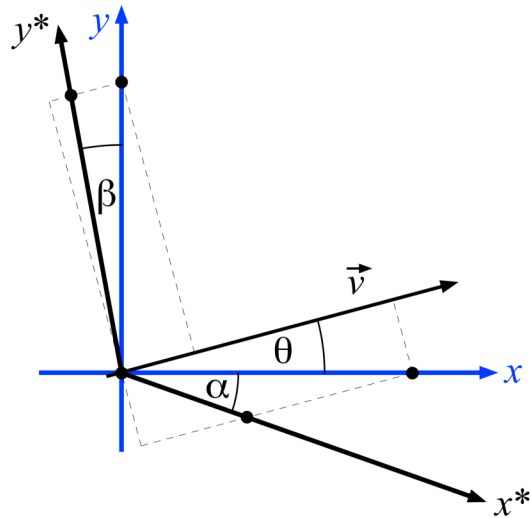


14. ábra

A 14. ábra – ami az S^* tengelyeinek állását mutatja be S -ből mérve – *különbözik* a 4. ábrától – ami az S'' tengelyeinek állását mutatja be szintén S -ből mérve. Az S^* és S'' vonatkoztatási rendszerek tehát nem lehetnek egészen ugyanazok, akkor sem, ha ugyanazzal a sebességgel, ugyanabban az irányban haladnak S -hez képest. A 4. és 14. ábrákat összevetve láthatjuk: az S^* és S'' vonatkoztatási rendszerek egymáshoz képest *el vannak fordulva!*

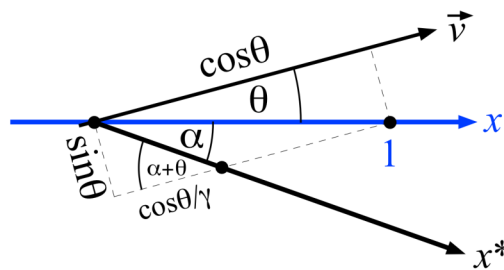
[Közbevetett megjegyzés: a 14. ábrából megállapíthatjuk, hogy a 11. ábra bizonyos szempontból rossz, „öszvér“ rajz, mert senki nézőpontjának nem felel meg teljesen: az S tengelyeit az S nézőpontjából, az S^* tengelyeit az S^* nézőpontjából ábrázolja. Azt viszont helyesen mutatja, hogy az x^* -, y^* -tengelyeket kijelölő méterrudak merre száguldanak S -ből mérve.]

A *hosszkontrakció* révén szemléletes fizikai magyarázatot is tudunk adni arra, hogy miért „lapulnak ki“ S szerint az S^* vonatkoztatási rendszer tengelyei a 14. ábrán látható módon. A 15. ábra voltaképpen a 14. ábra megismétlése, csak néhány járulékos segédvonalal.



15. ábra

Mint a Lorentz-transzformációból tudjuk, a hosszkontrakció a tárgyak mozgás irányába eső vetületénél jelentkezik, az arra merőleges vetületnél nem. Ez esetünkben azt jelenti, hogy S mérés szerint az x^* -, y^* -tengelyeket kijelölő méterrudaknak a \vec{v} -re merőleges komponense változatlan hosszúságú marad, a \vec{v} -vel párhuzamos komponensük pedig $1/\gamma$ -szorosára rövidül. Ezek után az x^* -tengely α dőlési szöge a 16. ábra alapján számítható.



16. ábra

Az ábráról leolvasható, hogy $\tan(\alpha + \theta) = \frac{\sin \theta}{(1/\gamma) \cos \theta}$. A bal oldalra egy

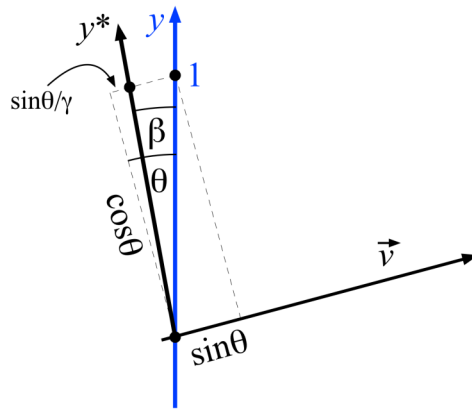
ismert trigonometrikus azonosságot alkalmazva a $\frac{\tan \alpha + \tan \theta}{1 - \tan \alpha \tan \theta} = \gamma \cdot \tan \theta$

egyenletet kapjuk. Ebből az α szögre a

$$\tan \alpha = (\gamma - 1) \frac{\tan \theta}{1 + \gamma \tan^2 \theta} \quad (16)$$

összefüggés adódik.

Az y^* -tengely β dőlési szöge hasonló módon, a 17. ábra alapján számítható.



17. ábra

Az ábrából látható, hogy $\tan(\theta - \beta) = \frac{\sin \theta}{\gamma \cos \theta}$. A bal oldalra ismét egy

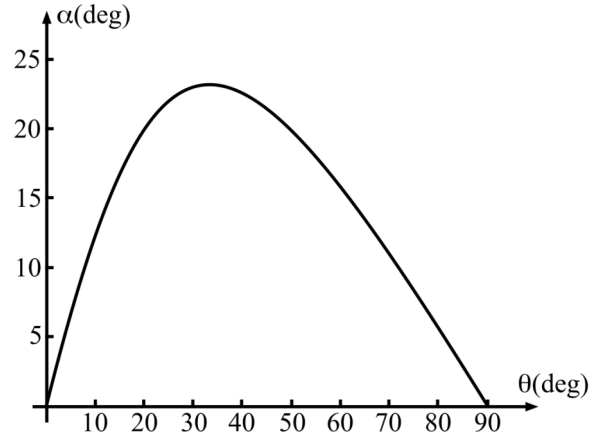
trigonometrikus azonosságot alkalmazhatunk, ezzel

$$\frac{\tan \theta - \tan \beta}{1 + \tan \theta \tan \beta} = \frac{1}{\gamma} \cdot \tan \theta. \text{ Ebből az } \beta \text{ szögre a}$$

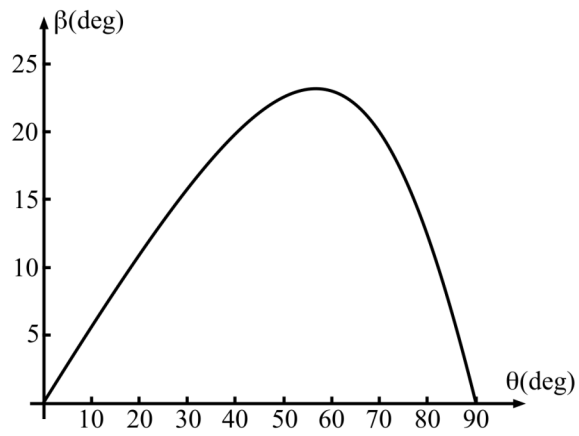
$$\tan \beta = (\gamma - 1) \frac{\tan \theta}{\gamma + \tan^2 \theta} \quad (17)$$

képlet adódik.

A (16) és (17) kifejezések alapján ábrázolhatjuk az x^* -, y^* -tengelyek dőlésszögét θ függvényében, adott v sebesség mellett. A 18. és 19. ábrákon egy-egy ilyen függvénygörbe látható, $v = 0.9$ esetén.

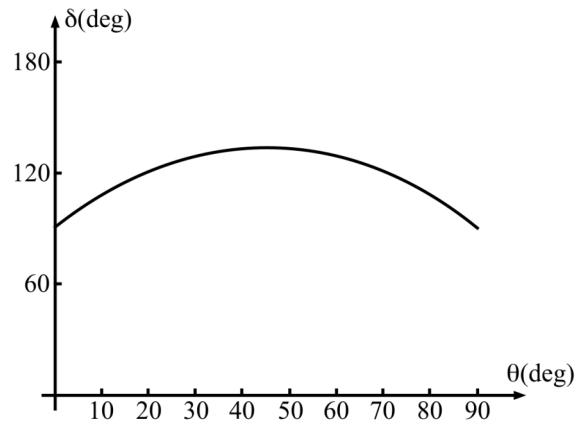


18. ábra



19. ábra

Az x^* - és y^* -tengelyek által S mérése szerint bezárt δ szög (ld. 14. ábra) θ -függését ($\nu = 0.9$ mellett) a 20. ábra mutatja.



20. ábra

A 20. ábrából leolvasható, hogy $\theta = 0$ és $\theta = 90^\circ$ esetén is $\delta = 90^\circ$. Ez várható is volt: ebben a két speciális esetben – tisztán x - vagy tisztán y -irányú Lorentz-boost esetén – a x^* - és y^* -tengelyek S mérése szerint is merőlegesek egymásra.

III. „Vízszintes Lorentz-boost + függőleges Lorentz-boost ≠ ferde Lorentz-boost“

Most nézzük a formális bizonyítást arra, hogy egy vízszintes (x -) irányú v_1 sebességű Lorentz-boost és egy függőleges (y' -) irányú v_2 sebességű Lorentz-boost összessége (azaz az $S \rightarrow S''$ transzformáció) *nem írható fel* egyetlen ferde \vec{v} sebességű Lorentz-boostként (mint amilyen az $S \rightarrow S^*$ transzformáció).

A (14) általános Lorentz-transzformáció képletéből – annak speciális eseteként – leolvashatjuk az S vonatkoztatási rendszer és a hozzá képest x -irányba $\vec{v}_1 = (v_1, 0)$ sebességgel mozgó S' vonatkoztatási rendszer közötti transzformációt:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1 v_1 & 0 \\ -\gamma_1 v_1 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} = \Lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Hasonló módon a (14)-ből leolvasható az S' vonatkoztatási rendszer és a hozzá képest y' -irányban $\vec{v}'_2 = (0, v_2)$ sebességgel mozgó S'' vonatkoztatási rendszer közötti transzformáció [emlékeztető: a v_2 már az S' -ben, nem az S -ben mért sebesség!]:

$$\begin{pmatrix} t'' \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & -\gamma_2 v_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_2 v_2 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \Lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Az S és S'' vonatkoztatási rendszerek között tehát a

$$\begin{pmatrix} t'' \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \Lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \Lambda_2 \Lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

transzformáció teremt kapcsolatot, ahol a $\Lambda_2 \Lambda_1$ mátrixszorzatra (18)-ból és (19)-ből az alábbi kifejezést kapjuk:

$$\Lambda_2 \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \gamma_2 & -\gamma_1 \gamma_2 v_1 & -\gamma_2 v_2 \\ -\gamma_1 v_1 & \gamma_1 & 0 \\ -\gamma_1 \gamma_2 v_2 & \gamma_1 \gamma_2 v_1 v_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Kérdés: S'' -höz eljuthatunk-e *egyetlen Lorentz-boosttal* S -ből? Azaz: a kettejük között kapcsolatot teremtő fenti $\Lambda_2 \Lambda_1$ transzformációs mátrix felírható-e olyan alakban, mint a (14)-ben szereplő $\tilde{\Lambda}$ mátrix, valamilyen alkalmas (v_x, v_y) választással? A válaszhoz elég csak ránéznünk a (14) és (20) mátrixokra: a Lorentz-boost $\tilde{\Lambda}$ transzformációs mátrixa – mint azt a (14) képlet alatt már megjegyeztük – *szimmetrikus*, míg a (20)-ból látható, hogy a $\Lambda_2 \Lambda_1$ transzformációs mátrix *nem az* (bár Λ_1 és Λ_2 külön-külön azok). A $\Lambda_2 \Lambda_1$ transzformáció tehát *nem* fejezhet ki egyszerű ferde irányú Lorentz-boostot ($\Lambda_2 \Lambda_1 \neq \tilde{\Lambda}$). A $\Lambda_2 \Lambda_1$ csak *egy ferde irányú Lorentz-boost és egy síkbeli forgatás kombinációja lehet*: $\Lambda_2 \Lambda_1 = \tilde{R} \tilde{\Lambda}$.

Az algebra áttekinthetőbbé tétele érdekében a ferde irányú Lorentz-boost ((14) egyenlet) elemeinek némelyikére vezessük be az A_x, A_y, C egyszerűsítő jelöléseket:

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v_x & -\gamma v_y \\ -\gamma v_x & A_x & C \\ -\gamma v_y & C & A_y \end{pmatrix}.$$

A síkbeli forgatás transzformációs mátrixa az

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \tilde{\alpha} & \sin \tilde{\alpha} \\ 0 & -\sin \tilde{\alpha} & \cos \tilde{\alpha} \end{pmatrix}$$

jól ismert alakban írható, ahol $\tilde{\alpha}$ az elforgatás szöge.

Adott v_1 vízszintes és v_2 függőleges Lorentz-boost egymásutánja mekkora (v_x, v_y) sebességű ferde Lorentz-boost és mekkora $\tilde{\alpha}$ szögű elfordulás egymásutánjának felel meg? A válaszhoz először kiszámítjuk a $\tilde{R} \tilde{\Lambda}$ mátrix-szorzatot:

$$\tilde{R}\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v_x & -\gamma v_y \\ -\gamma v_x \cos \tilde{\alpha} - \gamma v_y \sin \tilde{\alpha} & A_x \cos \tilde{\alpha} + C \sin \tilde{\alpha} & C \cos \tilde{\alpha} + A_y \sin \tilde{\alpha} \\ \gamma v_x \sin \tilde{\alpha} - \gamma v_y \cos \tilde{\alpha} & -A_x \sin \tilde{\alpha} + C \cos \tilde{\alpha} & -C \sin \tilde{\alpha} + A_y \cos \tilde{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

majd a (20) és (21) transzformációs mátrixok elemeit páronként egyenlővé tesszük. Némi algebra után az alábbi eredmények adódnak:

$$v_x = v_1, \quad (22)$$

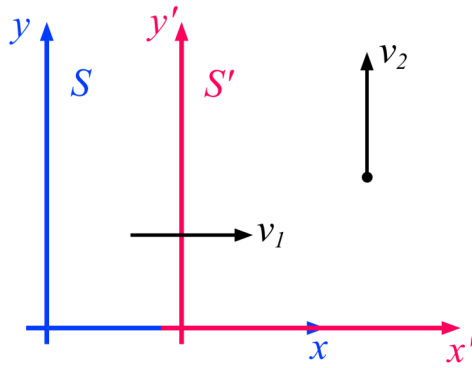
$$v_y = \frac{v_2}{\gamma_1}, \quad (23)$$

$$\sin \tilde{\alpha} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cdot \frac{v_1 v_2 (1 - \gamma_1 \gamma_2)}{\gamma_1^2 v_1^2 + v_2^2}, \quad (24)$$

$$\cos \tilde{\alpha} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cdot \frac{\gamma_1 v_1^2 + \gamma_2 v_2^2}{\gamma_1^2 v_1^2 + v_2^2}. \quad (25)$$

A (22) egyenlet érthető és szemléletes. A (23) egyenlet első ránézésre talán meglepőbb, de a 21. ábra segít az értelmezésében. Tekintsünk egy testet, amely az (S vonatkoztatási rendszerhez képest v_1 sebességgel mozgó) S' -ből mérve v_2 sebességgel halad felfelé. Mekkora ennek a testnek az y -irányú sebességkomponense S -ből mérve? A választ a Lorentz-féle sebességtranszformációs összefüggés adja meg:

$$v_y = \frac{v_2 \sqrt{1 - v_1^2}}{1 - 0 \cdot v_1} = v_2 \sqrt{1 - v_1^2} = \frac{v_2}{\gamma_1}, \text{ ez pedig éppen a (23) egyenlet.}$$



21. ábra

A rend kedvéért, (24)-et a (25)-tel elosztva, írjuk még fel az elfordulás szögének tangensét:

$$\tan \tilde{\alpha} = \frac{v_1 v_2 (1 - \gamma_1 \gamma_2)}{\gamma_1 v_1^2 + \gamma_2 v_2^2}. \quad (26)$$

Ismételjük meg fejezetünk fő tanulságát: két eltérő irányú Lorentz-boost egymásutánja ekvivalens egy ferde irányú Lorentz-boost és egy *elforgatás* egymásutánjával.

Az előző mondatban szereplő elforgatást *Wigner-rotációnak* hívjuk.

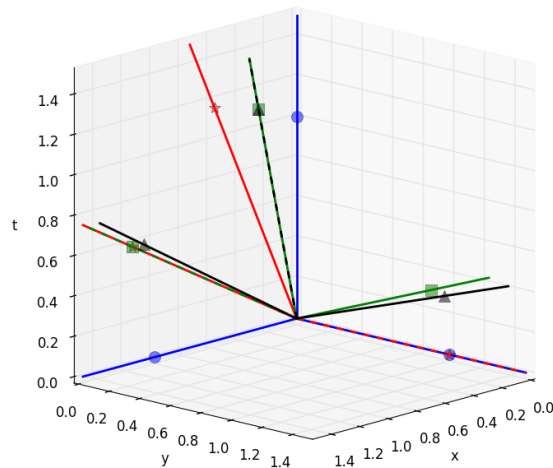
IV. 3D téridő-diagram a Wigner-rotáció megértéséhez

A

http://fizipedia.bme.hu/index.php/3D_szeml%C3%A9ltet%C5%91_%C3%A1bra_a_Wigner-rot%C3%A1ci%C3%B3_meg%C3%A9rt%C3%A9s%C3%A9hez. linkről

letölthető, Microsoft Windows ill. MacOSX alatt futtatható alkalmazások egyetlen 3D téridő-diagramon ábrázolják a fent részletezett S , S' , S'' és S^* vonatkoztatási rendszerek tengelyeit, megfelelően bekalibrálva, $v_1 = 0.5$ és $v_2 = 0.3$ konkrét számértékek választása mellett. [Az S^* az S -ből közvetlenül ferde Lorentz-boosttal kapott vonatkoztatási rendszer, amelynek sebességkomponenseit úgy választjuk, hogy kielégítsék a (22) és (23) egyenleteket. Így tehát az S^* és az S'' origója együtt mozog, csak a tengelyeik vannak egymáshoz képest $\tilde{\alpha}$ szöggel elfordulva.]

A fenti ábrákon alkalmazott színkóddal összhangban a 3D diagramon az alábbi színek felelnek meg az egyes vonatkoztatási rendszereknek: S – kék, S' – piros, S'' – zöld, S^* – fekete. Az egyes vonatkoztatási rendszerek tengelyein az egységnyi osztásokat a következő szimbólumok ábrázolják: S – kék kör, S' – piros csillag, S'' – zöld négyzet, S^* – fekete háromszög (ld. 22. ábra).



22. ábra

A 3D diagram tehát először is mutatja, hogy a téridőnek egymáshoz képest *milyen irányokban* állnak a (x,y,t) , (x',y',t') , (x'',y'',t'') és (x^*,y^*,t^*) tengelyek, illetve hogy hol helyezkednek el az egyes tengelyeken a *kalibrációs egységek*. A diagram ezek kívül is nagyban megkönnyítheti helyes fizikai szemléletünk kialakulását. Alkalmas irányokba való beforgatásával ugyanis számos relativisztikus effektus közvetlenül leolvasható róla.

[1] Ha azt szeretnénk tudni, hogy az S' vonatkoztatási rendszer térbeli tengelyeit milyen irányúnak, méterrudait milyen hosszúnak mérik a többiek, akkor úgy forgassuk az ábrát, hogy a (piros színű) t' -tengellyel pontosan szembenézzünk (vagyis a t' -tengely egyetlen pontnak látsszon, ld. 23. ábra). Ekkor az ábráról közvetlenül láthatók a többi vonatkoztatási rendszer által levont alábbi következtetések:

(a) S szerint („kék nézőpont“):

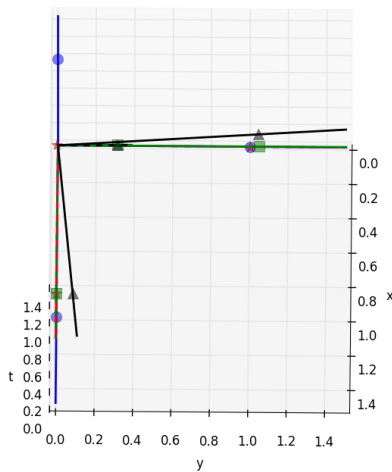
- az S' rendszer x' -métrúdja *megrövidül* (hosszkontrakció a mozgás irányában), az y' -métrúdja *nem*,
- az x -tengely *párhuzamos* az x' -tengellyel,
- az y -tengely *párhuzamos* az y' -tengellyel.

(b) S'' szerint („zöld nézőpont“):

- az S' rendszer y' -métrúdja *megrövidül* (hosszkontrakció a mozgás irányában), az x' -irányú méterrúdja *nem*,
- az x'' -tengely *párhuzamos* az x' -tengellyel,
- az y'' -tengely *párhuzamos* az y' -tengellyel.

(c) S^* szerint („fekete nézőpont“):

- az x^* -tengely *nem* párhuzamos az x' -tengellyel,
- az y^* -tengely *nem* párhuzamos az y' -tengellyel.



23. ábra

[2] Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy az S vonatkoztatási rendszer térbeli tengelyeit milyen irányúnak, méterrudait milyen hosszúnak mérik a többiek, akkor úgy forgassuk az ábrát, hogy a (kék színű) t -tengellyel nézzünk pontosan szembe (vagyis a t -tengely látsszon egyetlen pontnak, ld. 24. ábra). Ekkor az ábráról közvetlenül leolvashatók a következők:

(a) S' szerint („piros nézőpont“):

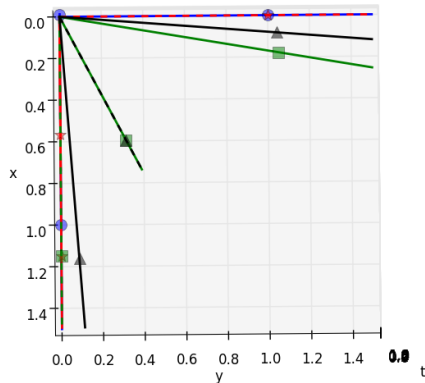
- az S rendszer x -méterrúdja *megrövidül* (hosszkontrakció a mozgás irányában), az y -méterrúdja *nem*,
- az x' -tengely *párhuzamos* az x -tengellyel,
- az y' -tengely *párhuzamos* az y -tengellyel.

(b) S'' szerint („zöld nézőpont“):

- az S rendszer x -méterrúdja *megrövidül*,
- az x'' -tengely *párhuzamos* az x -tengellyel,
- az y'' -tengely *nem* párhuzamos az y -tengellyel.

(c) S^* szerint („fekete nézőpont“):

- az x^* -tengely *nem* párhuzamos az x -tengellyel,
- az y^* -tengely *nem* párhuzamos az y -tengellyel.



24. ábra

[3] Ha azt szeretnénk tudni, hogy az S'' és S^* vonatkoztatási rendszerek térbeli tengelyeit, méterrúdait milyennek mérik a többiek, akkor úgy forgassuk az ábrát, hogy a (zöld, ill. fekete színű) t'' - ill. t^* -tengellyel nézzünk pontosan szembe, a 25. ábrán látható módon (ez a két tengely ugyanis egybeesik). Olvassuk le az ábráról a következőket:

(a) S szerint („kék nézőpont“):

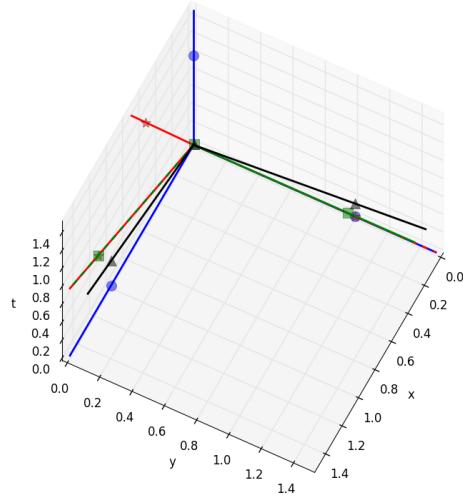
- az S'' rendszer y'' -métrúdja *megrövidül*,
- az x -tengely *nem* párhuzamos az x'' -tengellyel,
- az y -tengely *párhuzamos* az y'' -tengellyel.

(b) S' szerint („piros nézőpont“):

- az S'' rendszer y'' -métrúdja *megrövidül* (hosszkontrakció a mozgás irányában), az x'' -métrúdja *nem*,
- az x' -tengely *párhuzamos* az x'' -tengellyel,
- az y' -tengely *párhuzamos* az y'' -tengellyel,
- az x' -tengely *nem* párhuzamos az x^* -tengellyel,
- az y' -tengely *nem* párhuzamos az y^* -tengellyel.

(b) S'' szerint („zöld nézőpont“) és S^* szerint is („fekete nézőpont“):

- S'' és S^* tengelyei el vannak egymáshoz képest fordulva.

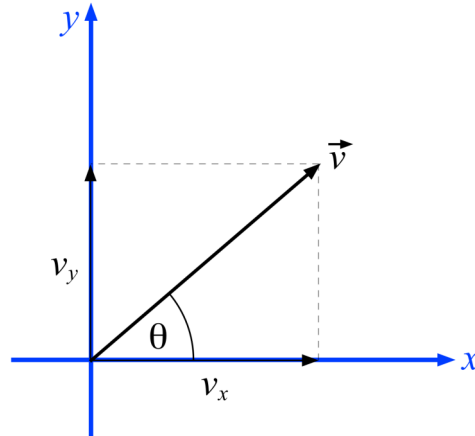


25. ábra

A fenti következtetések közül néhány érdekesebbet színessel kiemeltem. Az [1]-es és [2]-es pontban szereplő két narancssárga mondat illusztrálja, hogy a hosszkontrakció szimmetrikus: S és S' kölcsönösen 1 méternél rövidebbnek mérik egymás (x -irányú) méterrudait. A [2]-es és [3]-as pontban szereplő lila mondatokat összevetve pedig ismét megállapíthatjuk, hogy az egymáshoz képest mozgó rudak párhuzamosságról alkotott vélemény „nem kommutatív“.

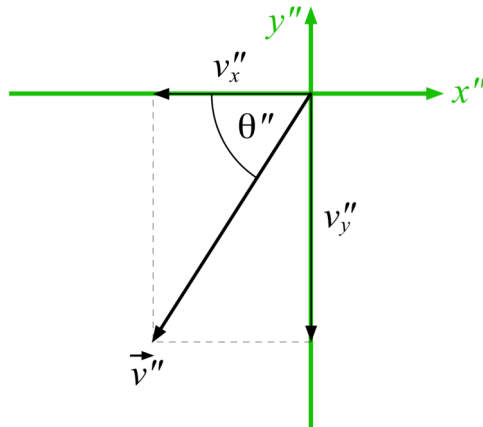
V. Néhány további megjegyzés S és S'' relatív mozgásáról

S'' sebessége S -ből mérve: $\vec{v} = (v_x, v_y)$. A sebességvektor θ szöget zár be az x -tengellyel (26. ábra, S nézőpontja).



26. ábra

S sebessége S'' -ből mérve: $\vec{v}'' = (v_x'', v_y'')$. A sebességvektor θ'' szöget zár be az x'' -tengellyel (27. ábra, S'' nézőpontja).



27. ábra

Mivel S -ből S'' -be egy Lorentz-boost és egy elforgatás egymásutánjával jutunk el, azt várjuk, hogy

- (1) $|\vec{v}| = |\vec{v}''|$ (a Lorentz-boost szimmetriája miatt amilyen gyorsnak méri az S'' az S -et, olyan gyorsnak méri az S az S'' -t),
- (2) az elfordulás miatt viszont $v_x \neq v_x''$ és $v_y \neq v_y''$ (vagy másképpen: $\theta \neq \theta''$).

Ellenőrizzük, hogy a fenti állítások valóban igazak-e.

Az S'' vonatkoztatási rendszer S -ből mért (v_x, v_y) sebességkomponenseit a következő gondolatmenettel kaphatjuk meg. S mérése szerint az S' vonatkoztatási rendszer v_1 sebességgel halad x -irányban. Az S' mérése szerint az S'' vonatkoztatási rendszer v_2 sebességgel halad y' -irányban (ld. 1. és 2. ábra). Az S'' vonatkoztatási rendszer S -hez viszonyított sebességkomponenseit a Lorentz-féle sebességtranszformációs összefüggések adják meg az S' -ben mért $\vec{v}'_2 = (0, v_2)$ sebességkomponensekből:

$$v_x = \frac{0 + v_1}{1 + 0 \cdot v_1} = v_1,$$

$$v_y = \frac{v_2 \sqrt{1 - v_1^2}}{1 + 0 \cdot v_1} = v_2 \sqrt{1 - v_1^2}.$$

[Ezek a korábban már szerepelt (22) és (23) összefüggések.] Ezek után a sebesség nagyságára és irányára a

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2(1 - v_1^2)} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - v_1^2 v_2^2} \quad (27)$$

és

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_2 \sqrt{1 - v_1^2}}{v_1} = \frac{v_2}{\gamma_1 v_1} \quad (28)$$

kifejezések adódnak.

Most nézzük a fordított szereposztást, azaz az S vonatkoztatási rendszer S'' -ből mért (v''_x, v''_y) sebességkomponenseit. Az S'' mérése szerint az S' vonatkoztatási rendszer $-v_2$ sebességgel megy a negatív y'' -tengely irányába. Az S' mérése szerint az S vonatkoztatási rendszer $-v_1$ sebességgel megy a negatív x' -tengely irányába (ld. a 1. és 2. ábrát, fordított sorrendben). Az S sebességének az S'' -ben mért komponenseit itt is a Lorentz-féle

sebességtranszformációs összefüggések adják meg az S' -ben mért $\vec{v}'_1 = (-v_1, 0)$ sebességkomponensekből:

$$v''_x = \frac{-v_1 \sqrt{1 - v_2^2}}{1 - 0 \cdot v_2} = -v_1 \sqrt{1 - v_2^2},$$

$$v''_y = \frac{0 - v_2}{1 - 0 \cdot v_2} = -v_2.$$

A sebesség nagyságára és irányára ezekből a

$$|\vec{v}''| = \sqrt{v''_x{}^2 + v''_y{}^2} = \sqrt{v_1^2(1 - v_2^2) + v_2^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - v_1^2 v_2^2} \quad (29)$$

és

$$\tan \theta'' = \frac{v''_y}{v''_x} = \frac{v_2}{v_1 \sqrt{1 - v_2^2}} = \frac{\gamma_2 v_2}{v_1} \quad (30)$$

összefüggéseket kapjuk.

(27)-et (29)-cel, ill. (28)-at (30)-cal összevetve megállapíthatjuk, hogy valóban $|\vec{v}| = |\vec{v}''|$ és $\theta \neq \theta''$, ahogy vártuk.

Tegyük fel most a következő kérdést: Mennyi az S által mért θ szög és az S'' által mért θ'' szög különbsége? [Ez a szögekülönbség „öszvér“ mennyiség, fizikai tartalma nincs, mert senki sem méri közvetlenül. Csak azért számoljuk ki, mert érdekes eredményt fog adni.]

Az alábbi kifejezésre jutunk:

$$\tan(\theta - \theta'') = \frac{\tan \theta - \tan \theta''}{1 + \tan \theta \cdot \tan \theta''} = \frac{v_1 v_2 (1 - \gamma_1 \gamma_2)}{\gamma_1 v_1^2 + \gamma_2 v_2^2}, \quad (31)$$

ahol az első egyenlőség egy trigonometrikus azonosság, a másodikat pedig úgy kapjuk, hogy $\tan \theta$ és $\tan \theta''$ helyére behelyettesítjük (28)-at (30)-at. (31)-et (26)-tal összevetve azt a felfedezést tesszük, hogy

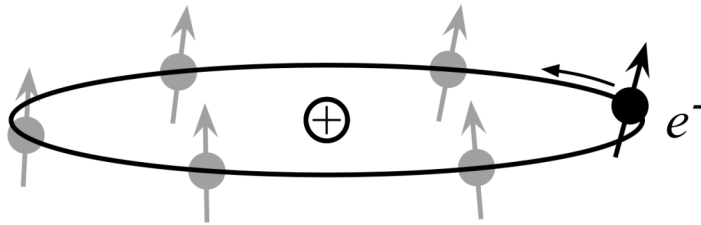
$$\tilde{\alpha} = \theta - \theta'' . \tag{32}$$

Ez egyáltalán nem triviális eredmény. A (32)-es egyenlet bal oldalán szereplő szög a Wigner-rotáció: ez az S'' elfordulása S -ből mérve, ami egy tényleges fizikai jelentéssel bíró adat (hiszen S *méri*). A jobb oldalon szereplő mennyiség viszont két *különböző* megfigyelő által mért szög (egy S -ből mért sebességirány és egy S'' -ből mért sebességirány), kivonva egymásból. Ezt közvetlenül senki sem méri.

[Megjegyzés: A Thomas-precessziót (ld. következő fejezet) számoló cikkek többsége közvetlenül a fenti „öszvér“ mennyiségből, $(\theta - \theta'')$ -ből indul ki, és indoklás nélkül azt veszi a Wigner-rotáció szögének. A (32) egyenletből látjuk, hogy $\theta - \theta''$ valóban egyenlő a Winger-rotáció szögével, de ez nem magától értetődő eredmény.]

VI. Thomas-precesszió

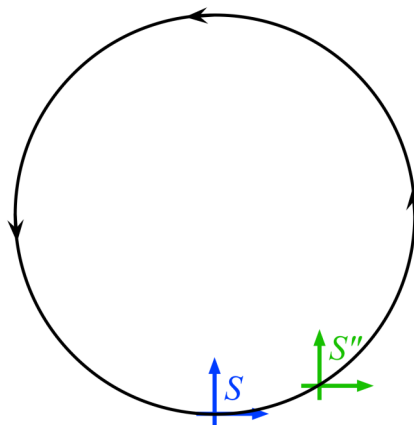
Egy gyorsan forgó pörgettyűt – amelynek tengelye a térnek bizonyos irányába áll – végigviszünk egy körpályán úgy, hogy közben csak a tömegközéppontjánál fejtünk ki rá erőt. Egy teljes kör megtétele után a pörgettyű tengelye más irányban fog állni, mint az induláskor. Ezt a meglepő jelenséget *Thomas-precesszió*nak hívják. Egyik fontos előfordulása a természetben az atomi elektronok spinjének (28. ábra) lassú precesszálása.



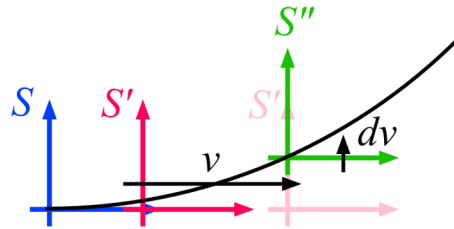
28. ábra

A Thomas-precessziót a klasszikus mechanika alapján nem lehet megmagyarázni. A pörgettyűre mozgás közben végig csak a tömegközéppontjában hat erő, annak pedig a tömegközéppont körül nincs forgatónyomatéka. Tehát a pörgettyű tengelyének a kezdőpontba visszatérve ugyanabba az irányba kellene mutatnia, mint kiinduláskor.

Hogy a tengely mégis elfordul, annak a Wigner-rotációban keresendő az oka. A 29. és 30. ábrák segítenek ezt az összefüggést megérteni.



29. ábra



30. ábra

A 29. ábra a pörgettyű által bejárt körpályát mutatja. Tegyük fel, hogy a körmozgás egyenletes, a sebessége $v = \text{állandó}$. A 30. ábra a körpálya alját ábrázolja.

Mint mindjárt látni fogjuk, a jegyzetben eddig szerepelt S , S' és S'' vonatkoztatási rendszerek relatív mozgása pontosan illeszkednek ehhez a problémához, a pörgettyűt ugyanis voltaképpen úgy visszük végig a körpályán, hogy lokálisan mindig apró, *elfordulás nélküli* Lorentz-boostokkal lökjük odébb, és mindig az éppen *aktuális mozgásirányára merőlegesen*.

Az S most legyen az a vonatkoztatási rendszer, amelyben a kör középpontja nyugszik. Amikor a pörgettyű éppen a körpálya alján van, akkor a pillanatnyi sebességvektora pontosan jobbra mutat. Az S' ennek megfelelően legyen a pálya alsó pontjában a pörgettyű *pillanatnyi nyugalmi inerciarendszere*. A pörgettyűt azonban a következő pillanatban *felfelé*, a pályájára merőlegesen mutató erő löki meg, ami (az S' -ből mérve) dv sebességnövekményt ad neki (ld. 30. ábra). Ekkor a pörgettyű pillanatnyi nyugalmi inerciarendszere az S' -hez képest dv sebességgel felfelé mozgó S'' vonatkoztatási rendszer lett.

Mi történt a pörgettyűvel ezen az infinitezimális szakaszon? Bár a pörgettyű tengelyét nem forgatta el semmilyen erő, a tengely valamilyen infinitezimális szöggel mégis elfordult az S vonatkoztatási rendszerben, mert *maga az S'' vonatkoztatási rendszer* (amelyben a pörgettyű a szakasz végén éppen nyugszik) el van fordulva S -hez képest! Az elfordulás $d\tilde{\alpha}$ szögét a (26) egyenlet adja meg, $v_1 \rightarrow v$, $\gamma_1 \rightarrow \gamma$ és $v_2 \rightarrow dv$ helyettesítésekkel. Mivel $dv \ll 1$, a dv -ben másod- és magasabbrendű tagokat elhanyagoljuk, így a $\gamma_2 \rightarrow 1$ helyettesítés is alkalmazható. Ezután $d\tilde{\alpha}$ -ra az alábbi kifejezést kapjuk:

$$d\tilde{\alpha} \approx \tan d\tilde{\alpha} \approx \frac{v dv(1-\gamma)}{\gamma v^2} = \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{dv}{v} = \left(\sqrt{1-v^2} - 1\right) \frac{dv}{v}. \quad (33)$$

Fontos: Bár a pörgettyű tengelyének apró $d\tilde{\alpha}$ elfordulását konkrétan a pálya alsó szakaszának kis darabjára számoltuk ki, de *akárhol* is tart a pörgettyű a körpályán, mindenhol *ugyanekkora* $d\tilde{\alpha}$ elfordulás kell hogy tartozzon (S mérése szerint) valamely adott dv sebességváltozáshoz. Ezt a mozgás rotációs szimmetriája megköveteli: a pálya egy adott helyén a $d\tilde{\alpha}$ szögelfordulás független kell hogy legyen attól, hogy az S koordináta-tengelyei éppen milyen orientációjúak a pörgettyű ottani sebességéhez képest, hiszen a koordináta-tengelyek orientációja tetszőleges választás eredménye.

Mekkora teljes $\tilde{\alpha} = \int d\tilde{\alpha}$ szöggel fordul el a pörgettyű tengelye egy teljes kör befutása után?

A pályára merőleges dv sebességváltozás a centripetális gyorsulás következménye: $dv = a_{cp} dt = \frac{v^2}{R} dt$, ahol R a körpálya sugara. Ezt (33)-ba írva a

$$d\tilde{\alpha} \approx \frac{\left(\sqrt{1-v^2} - 1\right)v}{R} dt \quad (34)$$

kifejezést kapjuk.

[1] Kis sebességű határeset

Tegyük fel, hogy a körmozgás sebessége sokkal kisebb, mint a fénysebesség: $v \ll 1$. Ekkor a $\sqrt{1-v^2} \approx 1 - v^2/2$ közelítés alkalmazható, amellyel (34) így írható:

$$d\tilde{\alpha} \approx -\frac{v^3}{2R} dt. \quad (35)$$

(35)-öt a teljes körpályára integrálva:

$$|\tilde{\alpha}| \approx \frac{v^3}{2R} \int_0^T dt = \frac{v^3}{2R} T = \frac{v^3}{2R} \frac{2R\pi}{v} = \pi v^2. \quad (36)$$

A (36) nevezetes képlet tehát kis v esetén megadja a pörgettyű tengelyének a Thomas-precesszió által okozott teljes szögelfordulását a körpálya egyszeri befutása alatt. Vigyázat: a fenti képletben (csakúgy, mint mindenhol ebben a jegyzetben) a sebességet dimenzió nélküli számként kell beírni.

Hagyományos mértékegységekkel a (36) eredmény az alábbi alakban írható:

$$|\tilde{\alpha}| \approx \pi \frac{v^2}{c^2}. \quad (37)$$

ahol c a fénysebesség.

[2] Általános eset

Ha a pörgettyű körmozgásának sebessége tetszőleges (< 1) értéket felvehet, a számítás kicsit bonyolultabb. Ekkor a Thomas-precesszió *szögsebességére* – itt nem részletezett számítás után – az

$$\omega_T = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{av}{c^2} \quad (38)$$

összefüggés adódik, ahol a a pörgettyű tömegközéppontjának gyorsulása és $\gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2}$.

[Ellenőrizhetjük, hogy a (38) képlet kis sebességekre valóban visszaadja a (37) eredményt: ha $v \ll c$, akkor $\gamma \approx 1$, így $\omega_T \approx \left(\frac{v^2}{R} v\right) / 2c^2 = v^3 / 2Rc^2$.

Ebből $|\tilde{\alpha}| = \omega_T T \approx (v^3 / 2Rc^2) \cdot (2R\pi / v) = \pi v^2 / c^2$.]

Záró gondolat:

A 28. ábra a hidrogénatom egyszerű modelljét ábrázolja, de nagyon hasonlóan nézne ki a Nap és a körülötte keringő – valamint tengelyforgását végző – Föld vázlatos képe is. Ezek szerint a Föld forgástengelye is végez Thomas-precessziót? Az első hallásra meglepő válasz: *Nem!* Thomas-

precesszió akkor történik, amikor *sík téridőben* egy pörgettyű középpontját valamilyen *erő* (mint amilyen a 28. ábrán az atommag és az elektron közötti Coulomb-erő) *gyorsítja*. A 28. ábrán keringő elektron világvonala a téridőben *nem egyenes*, hanem a körpályára kényszerítő erő hatására spirál alakban feltekeredik a *t*-tengelyre.

A Földet azonban nem a Coulomb-erő tartja a Nap körüli pályán, hanem a gravitáció. Ez a látszólag apró eltérés mindent megváltoztat. A gravitáció alapjaiban különbözik ugyanis a Coulomb-kölcsönhatástól és más kölcsönhatásoktól: a gravitáció *nem erő*. A Föld mozgása görbült térbeli pályájúnak tűnik ugyan, de ez csak azért van így, mert ábráinkon történetesen az állócsillagokhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben szoktuk kirajzolni a pálya alakját. A Föld valójában a Nap tömege által létrehozott *görbült téridőben* végez *erőmentes, szabad* mozgást. Világvonala (pályája a *téridőben*) nem görbült, hanem *egyenes* (geodetikus) vonal. A Föld forgástengelye tehát Thomas-precessziót nem végez.