Fizika 1i, 2020 őszi félév, 4. gyakorlat - MEGOLDÁS

Órai munkára javasolt feladatok

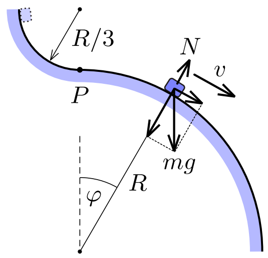
F1. *a*) Mivel a súrlódás elhanyagolható, használhatjuk a mechanikai energiamegmaradás törvényét:

$$mg\frac{R}{3} = \frac{1}{2}mv_P^2,$$

ahol m a test tömege. Ebből a sebesség a P pontban: $v_P = \sqrt{2gR/3} \approx 4{,}4$ m/s.

b) Az alsó negyedköríven történő mozgás egyenlete:

$$mg\cos\varphi - N = m\frac{v^2}{R}.$$



Elválás pillanatában a lejtő és a test közötti kényszererő megszűnik, azaz $N = 0$. Tehát a fenti egyenletből $v^2 = gR\cos\varphi$. A sebesség meghatározásához ismét az energiamegmaradást használjuk:

$$mg\left[\frac{R}{3} + R(1-\cos\varphi)\right] = \frac{1}{2}mv^2.$$

Ebből az egyenletből $v^2 = 2gR\left(\frac{4}{3} - \cos\varphi\right)$. A v^2-re kapott kétféle egyenletből az elválás szöghelyzete:

$$\cos\varphi = \frac{8}{3} - 2\cos\varphi \;\rightarrow\; \cos\varphi = \frac{8}{9} \;\rightarrow\; \varphi \approx 27{,}3°.$$

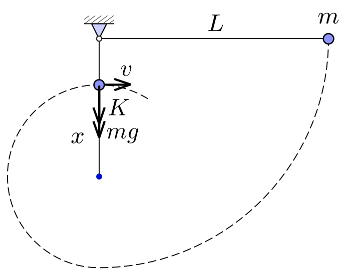
c) Felhasználva a *b*) részben kapottakat:

$$v = \sqrt{gR\cos\varphi} = \sqrt{\frac{8}{9}gR} \approx 5{,}1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

F2. *a*) Ha a test meg tud tenni egy teljes kört, akkor a legfelső pontban is még körmozgást végez:

$$mg + K = m\frac{v^2}{x}, \tag{1}$$

ahol K a kötélerő. Határesetben a kötélerő nullává válik a legfelső pontban, $K = 0$. Tehát $v^2 = gx$.



A sebességet az energiamegmaradás adja. Az elengedési helyzettől nézve:

$$mg(L-2x) = \frac{1}{2}mv^2 \;\rightarrow\; v^2 = 2g(L-2x). \tag{2}$$

A v^2-re kapott kétféle összefüggésből:

$$x = 2(L-2x) \;\rightarrow\; x = \frac{2L}{5}.$$

Ahhoz, hogy a kötélerő a legfelső helyzetben se tűnjön el, x legfeljebb $2L/5$ lehet.

b) Mivel a megadott $x = L/3 < 2L/5$, ezért a legmagasabb pontba a test eljut. A kötélerőt az (1), a sebességet pedig a (2) egyenletből kapjuk:

$$K = m\left(\frac{v^2}{x} - g\right) = mg\left(\frac{2(L-2x)}{x} - 1\right).$$

Behelyettesítve x megadott értékét, $K = mg$ adódik.

F3. *a*) Az ütközés során a két testből álló rendszer lendülete (lendületvektora) megmarad. Legyen $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg. A teljes lendületvektor (a szorzótényezők kg$\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ egységben értendők):

$$\boldsymbol{p} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = 3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}.$$

Ütközés után az $m_1 + m_2 = 3$ kg tömegű, összetapadt testek impulzusvektora ugyanekkora:

$$\boldsymbol{p} = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}.$$

Tehát a testek közös sebességvektora $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$, azaz a sebesség nagysága: $v = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \sqrt{21}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 4{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

b) A $\boldsymbol{v}$ vektor és az x irányba mutató $\boldsymbol{i}$ vektor skaláris sorzata:

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{i} = 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + (-4)\cdot 0 = 1.$$

Ezt a skaláris szorzatot a vektorok hosszával és a közöttük lévő szöggel is meghatározhatjuk:

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{i} = v\cdot 1\cdot\cos\varphi.$$

Vagyis a kérdéses szög:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{21}} \;\rightarrow\; \varphi \approx 77{,}4°.$$

c) Az ütközés előtti mozgási energiák összege:

$$E_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(3^2+2^2) + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(4^2+6^2) = 58{,}5\ \mathrm{J}.$$

Az ütközés utáni mozgási energia:

$$E_2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 = 31{,}5\ \mathrm{J}.$$

Az energiaveszteség nagysága: $\Delta E = E_1 - E_2 = 27$ J, ami a kezdeti teljes mozgási energia kb. 46%-a.

F4. Legyen a kezdetben v_0 sebességgel mozgó test tömege m_1, az állóé m_2. Ütközés után a testek sebessége egyaránt v. Rugalmas ütközés esetén a lendület és a mechanikai energia is megmarad. Lendületmegmaradás:

$$m_1 v_0 = -m_1 v + m_2 v,$$

az energiamegmaradás:

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2.$$

Az első egyenletből $v = m_1 v_0/(m_2 - m_1)$. Ezt felhasználva a második egyenletben:

$$m_1 = (m_1 + m_2) \frac{m_1^2}{(m_2 - m_1)^2}.$$

Mivel egyik tömeg sem nulla, ezért az egyenlet az $m_2 = 3m_1$ alakot nyeri, tehát a tömegarány: $m_2/m_1 = 3$.

F5. *a*) A lövedék behatol a hasábba, majd együtt lendülnek ki v kezdősebességgel. Ezt a sebességet a lendületmegmaradásból kaphatjuk meg:

$$mv_0 = (m+M)v \;\to\; v = \frac{m}{m+M} v_0.$$

A befúródás során a mechanikai energia nem marad meg (rugalmatlan ütközés), viszont ezt követően megmarad:

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = (m+M)gL(1-\cos\alpha),$$

ahonnan $v^2 = 2gL(1-\cos\alpha)$. A lendületmegmaradásból kapott kifejezéssel:

$$\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 v_0^2 = 2gL(1-\cos\alpha).$$

Ebből a lövedék ütközés előtti sebessége:

$$v_0 = \left(1 + \frac{M}{m}\right)\sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}.$$

Mivel $m/M \ll 1$, ezért az eredmény így is felírható:

$$v_0 \approx \frac{M}{m}\sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}.$$

b) A kezdeti mozgási energia $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$. Az ütközés utáni mozgási energia

$$E = \frac{1}{2}(m+M)v^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}v_0^2 \approx \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}v_0^2.$$

A hővé alakult mozgási energia:

$$\Delta E = E_0 - E = \frac{1}{2}mv_0^2 \frac{M}{m+M} \approx \frac{1}{2}mv_0^2\left(1 - \frac{m}{M}\right)$$

A kérdéses hányados:

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{M}{m+M} \approx 1 - \frac{m}{M}$$

F6. Az elindítást követően a két test rezegve fog haladni az asztallapon. A rugó megnyúlása maximális, ha mindkét test sebessége azonos nagyságú és irányú. Legyen ez V. Mivel csak a rugóerő hat a rendszerre, ami belső erő, ezért érvényes a lendületmegmaradás:

$$mv = 2mV \;\to\; V = \frac{v}{2}.$$

Az energiamegmaradás:

$$\frac{1}{2}mv^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}D\Delta\ell_{\text{max}}^2.$$

Ebből a rugó legnagyobb megnyúlása:

$$\Delta\ell_{\text{max}} = \sqrt{\frac{mv^2}{2D}}.$$

Másik megoldás: Üljünk bele a rendszer tömegközéppontjába. A tömegközéppont sebessége $v_{\text{TK}} = mv/(2m) = v/2$. Ebben a rendszerben mindkét test kezdeti sebessége $v/2$, irányuk ellentétes. Amikor a rugó megnyúlása maximális, a tömegközépponti rendszerben a két test áll. Energiamegmaradás:

$$2 \cdot \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}D\Delta\ell_{\text{max}}^2.$$

Ebből ugyanazt az eredményt kapjuk.

F7. Az égéstermékre ható gyorsítóerő:

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\Delta m \cdot v}{\Delta t} = \mu v,$$

ahol $v = 2500$ m/s, $\mu = 16$ kg/s. Ugyanekkora (állandó) erő hat a rakétára csak felefelé. Ahogy fogy az üzemanyag, a rakéta tömege csökken, és egyszer csak a rá ható F erő egyenlővé válik a rakétára ható $m(t)g$ nehézségi erővel. Ezt követően indul el a rakéta.

Elinduláskor a rakéta tömege $m(t) = m_0 - \mu t$, ahol $m_0 = 4100$ kg a rakéta kezdeti tömege. Tehát

$$F = m(t)g \;\to\; \mu v = (m_0 - \mu t)g,$$

ahonnan az elindulás ideje:

$$t = \frac{m_0}{\mu} - \frac{v}{g}.$$

Behelyettesítve az adatokat:
– $g = 9{,}81$ m/s^2-tel $t \approx 1{,}4$ s,
– $g = 10$ m/s^2-tel $t \approx 6{,}3$ s.

Ha a kerekített nehézségi gyorsulás értékével számolunk, akkor kb. 350%-kal (!) nagyobb értéket kapunk.

F8. Tekintsünk a lánc egy kicsiny Δm tömegű, $\Delta\ell$ hosszú darabját, ami a kupacból indulva a már v sebességgel mozgó részhez csatlakozik. Ezen $\Delta m = \frac{m}{L}\Delta\ell$ darab megmozgatásához szükséges erő:

$$F_1 = \frac{\Delta m \cdot v}{\Delta t} = \frac{mv\Delta\ell}{L\Delta t} = \frac{mv^2}{L},$$

hiszen $\Delta\ell/\Delta t = v$.

A láncra ható erők eredője nulla, hiszen állandó sebességgel mozgatjuk. Az általunk kifejtett, felfelé mutató erő $F(t)$, a láncszemek megindításához szükséges erő ellenereje lassítani igyekszik a már függőlegesen mozgó láncot, ahogy a mozgó láncra ható, változó $m(t)g$ nehézségi erő is. Tehát:

$$F(t) - F_1 - m(t)g = 0.$$

Az állandó sebességű mozgás miatt $m(t) = \frac{m}{L} \cdot vt$, azaz a lánc emeléséhez szükséges erő, amíg a lánc nincs teljes hosszában felemelve:

$$F(t) = \frac{mv^2}{L} + mg\frac{vt}{L}.$$

$T = L/v$ idő alatt a teljes láncot felemeljük. Ekkor az erő az $F(T) = m(g + v^2/L)$ értékről hirtelen az mg értékre esik le, és ezután ekkora is marad.