

SÍKHULLÁMOK TERJEDÉSE ANIZOTRÓP KÖZEGBEN

dr. Erdei Gábor, 2017-12-04

források: Born & Wolf, *Principles of Optics*

A JEGYZET MÉG FEJLESZTÉS ALATT ÁLL!

Bevezetés

Az első előadáson bemutattuk, hogy az elektrodinamika alapegyenleteiben (Maxwell-egyenletek) az EM tér és az anyag közötti kölcsönhatást makroszkópikus formában a relatív dielektromos permittivitás és permeabilitás segítségével írhatjuk le, bevezetve az anyagfüggő \mathbf{D} ill. \mathbf{H} mennyiségeket. Hosszútávú rendezettséget nem mutató anyagokban (pl. amorf szilárdtestek, folyadékok és gázok) ϵ és μ skalár mennyiségek, ami azt jelenti, hogy \mathbf{D} - \mathbf{E} és \mathbf{H} - \mathbf{B} páronként azonos irányba mutatnak. Léteznek azonban olyan közegek is, ahol egy atom vagy molekula polarizációja nem egyforma mértékű, ha az elektromos térerősségvektor / mágneses indukció irányát változtatjuk – ezeket nevezzük *optikailag anizotróp* anyagoknak, amelyekre tipikus példát az egykristályok szolgáltatnak. Mivel ezek alkalmazása igen széleskörű, a továbbiakban röviden megvizsgáljuk főbb tulajdonságaikat és fizikai leírásuk módszereit. Az egyszerűség kedvéért homogén, szigetelő közegekben végezzük számításainkat ($\sigma = 0$), ahol a töltéssűrűség is nulla. Mivel az optikai anyagok többsége nem mágnesezhető, jelen tárgyalásban feltesszük, hogy $\mu = \mu_0$.

A térerősségvektorok kölcsönös helyzete

Vizsgálatunk tárgya tehát az elektromos anizotrópia. Teljesen általános esetben az elektromos térerősség minden komponense befolyásolja a dielektromos eltolásvektor mindegyik komponensét. Lineáris közelítésben az a következő formában írható fel:

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z \\ D_y &= \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z \\ D_z &= \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{D} = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}, \quad (1)$$

ahol $\boldsymbol{\epsilon}$ a dielektromos permittivitástenzor. Megmutatható (ld. Born-Wolf), hogy a nem mágnesezhető, forrás és abszorpciómentes közegben ($\sigma = 0$; $\rho = 0$; $\mu_r = 1$) az energiamegmaradás törvényét leíró

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = -\frac{\partial w}{\partial t} \quad (2)$$

kontinuitási egyenlet csakis akkor tud teljesülni, ha a permittivitástenzor szimmetrikus, azaz:

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} \quad ; \quad \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} \quad ; \quad \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} , \quad (3)$$

ahol \mathbf{S} a teljesítménysűrűség áramlását jellemző Poynting-vektor, w pedig az EM tér össz-energiásűrűségét jelöli. Attól függően, hogy az (1) megfogalmazására használt Descartes-koordináta rendszerünknek mik a bázisvektorai, az $\boldsymbol{\epsilon}$ -ben szereplő paraméterek értéke más és más lesz. Lineáris algebrából megtanultuk, hogy a főténgelyre szimmetrikus mátrixok leírására mindig létezik egy olyan bázisvektor-rendszer, amelyben a mátrix diagonális alakra hozható (főtengely-transzformáció):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (4)$$

A főtengelyek általában megegyeznek az adott kristály fő szimmetriatengelyeivel, így irányuk a hordozó közeg orientációjához szigorúan kötött. Ez alól kivételek a monoklin és triklin elemi cellájú kristályok (ld. később). Mivel a dielektromos permittivitás függ az EM hullám frekvenciájától (diszperzió), ilyen kristályokban a főtengelyek iránya is a frekvenciával változik. A jelenséget *axiális diszperzió*nak nevezik.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0 \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{I.} \quad \text{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \text{II.} \quad \text{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{III.} \quad \text{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \text{IV.} \quad \text{div} \mathbf{D} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

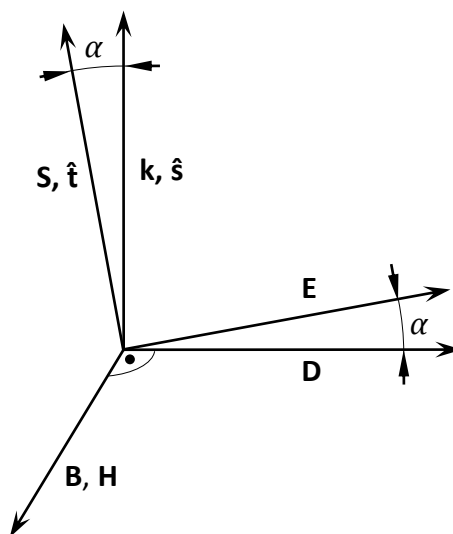
indukciós törvény

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \quad (7)$$

gerjesztési törvény

$$\text{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D} \quad (8)$$

Mivel $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, azaz e két vektor azonos irányú, a fenti két egyenletből az következik, hogy \mathbf{B} merőleges \mathbf{E} -re és \mathbf{D} -re is. Emellett \mathbf{B} merőleges \mathbf{k} -ra is, tehát $\mathbf{B} \perp \mathbf{D} \perp \mathbf{k}$. A Poynting-vektor pedig $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, tehát $\mathbf{H} \perp \mathbf{E} \perp \mathbf{S}$. A fentieket foglalja össze az alábbi ábra, általános esetben. Amennyiben \mathbf{E} éppen egy főtengely irányába áll, (4) értelmében mindig párhuzamos \mathbf{D} -vel.



Fresnel-féle sebességi törvény

(7)-et (8)-ba behelyettesítve:

$$\mathbf{k} \times \left(\mathbf{k} \times \mathbf{E} \frac{1}{\mu_0 \omega} \right) = -\omega \mathbf{D} . \quad (9)$$

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{v_p} \hat{\mathbf{s}} . \quad (10)$$

v_p - fázissebesség

$$\hat{\mathbf{s}} \times (\hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{E}) = -\mu_0 v_p^2 \mathbf{D} . \quad (11)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \equiv (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} . \quad (12)$$

$$\hat{\mathbf{s}} \times (\hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{E}) = (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{s}} - (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) \cdot \mathbf{E} = (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{s}} - \mathbf{E} . \quad (13)$$

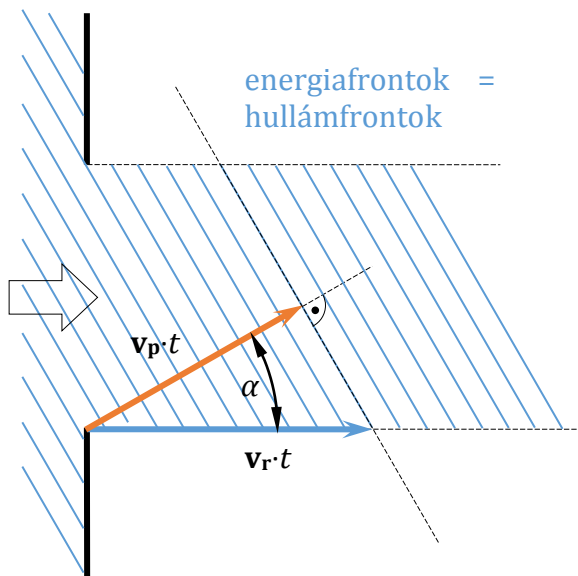
$$\mathbf{D} = \frac{1}{\mu_0 v_p^2} (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{s}} \cdot (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E})) . \quad (14)$$

Megmutatható, hogy (ld. Born-Wolf):

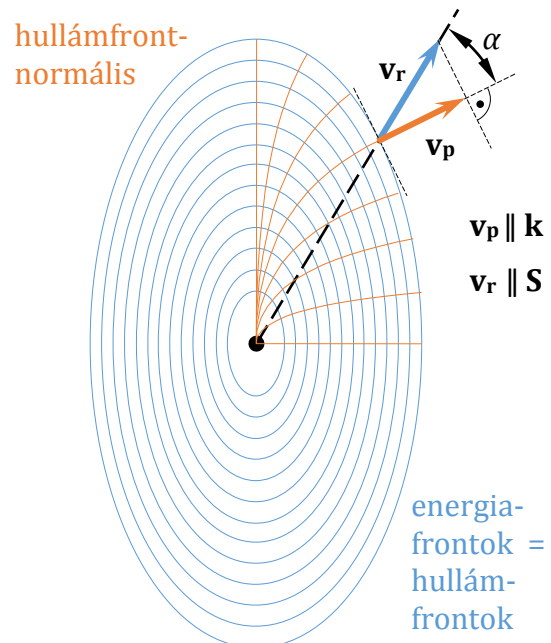
$$w = \frac{\mathbf{S}}{v_p} \cdot \hat{\mathbf{s}} = \frac{S \cdot \cos \alpha}{v_p} . \quad (15)$$

Ebből az energiaterjedés sebessége (sugársebesség):

$$v_r = \frac{\mathbf{S}}{w} \Rightarrow v_p = v_r \cdot \cos \alpha . \quad (16)$$



Síkhullám terjedése anizotróp közegben



Pontforrás tere anizotróp közegben

(1)-et és (14)-et összevetve a következő sajátérték-egyenletet kapjuk:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\mu_0 v_p^2} (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{s}} \cdot (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E})) \quad (17)$$

Tegyük fel, hogy az egyszerűség kedvéért $\boldsymbol{\varepsilon}$ -n elvégeztük a főtengetly-transzformációt, így most alakja megfelel (4)-nek. Ezzel (17) a következőre egyszerűsödik:

$$\varepsilon_i \cdot E_i = \frac{1}{\mu_0 v_p^2} (E_i - \hat{s}_i \cdot (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E})) \quad , \text{ ahol } i = x, y, z \quad (18)$$

$$E_i = \frac{\hat{s}_i \cdot (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E})}{1 - \varepsilon_i \mu_0 v_p^2} \quad , \quad i = x, y, z \quad (19)$$

A három egyenlet mindegyikét \hat{s}_i -vel megszorozva, és ezeket összeadva pont az $\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E}$ skalár szorzatot kapjuk, ami tehát $\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E}$ -vel elosztva pont 1-et ad:

$$\frac{\hat{s}_x^2}{1 - \varepsilon_x \mu_0 v_p^2} + \frac{\hat{s}_y^2}{1 - \varepsilon_y \mu_0 v_p^2} + \frac{\hat{s}_z^2}{1 - \varepsilon_z \mu_0 v_p^2} = 1 \quad , \quad (20)$$

Korábbi megállapításunknak megfelelően ha \mathbf{E} főtengetly irányú, akkor párhuzamos \mathbf{D} -vel, amiből az is következik, hogy ilyenkor a sugár- és fázissebességek is azonos irányúak és azonos abszolút értékűek. Ezeket „fősebességnek” nevezzük, melyek értékei:

$$u_x = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_x}} \quad ; \quad u_y = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_y}} \quad ; \quad u_z = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_z}} \quad . \quad (21)$$

Azért választottunk $u_{x,y,z}$ -t a fősebességek jelölésére, hogy még véletlenül se legyenek összekeverhetők a \mathbf{v} sebességvektor x, y, z komponenseivel.

$$\frac{\hat{s}_x^2}{1 - \frac{v_p^2}{u_x^2}} + \frac{\hat{s}_y^2}{1 - \frac{v_p^2}{u_y^2}} + \frac{\hat{s}_z^2}{1 - \frac{v_p^2}{u_z^2}} = 1 \quad , \quad (22)$$

Mivel $\hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2 + \hat{s}_z^2 \equiv 1$, a fenti egyenlet átalakítható a következő alakba:

$$\frac{\hat{s}_x^2}{u_x^2 - v_p^2} + \frac{\hat{s}_y^2}{u_y^2 - v_p^2} + \frac{\hat{s}_z^2}{u_z^2 - v_p^2} = 0 \quad , \quad (23)$$

Ez a Frensel-féle sebességi törvény. Ha $u_x \neq u_y \neq u_z$ akkor (23) v_p^2 -ben másodfokú egyenletre vezet (a fenti kifejezést megszorozva a nevezők szorzatával), ami azt jelenti, hogy általános esetben minden terjedési irányhoz két különböző sebességérték tartozik (v'_p és v''_p). Ezeket behelyettesítve (19)-be a két sajátvektor komponenseinek arányaira ($E'_x:E'_y:E'_z$ ill. $E''_x:E''_y:E''_z$) valós számokat kapunk, ami azt jelenti, hogy az \mathbf{E}' és \mathbf{E}'' sajátvektorok *lineárisan polarizáltak*. Az (1) összefüggés alapján ugyanez elmondható \mathbf{D}' és \mathbf{D}'' -re is. A fentiek miatt a (4)-el leírható optikai effektust *optikai kettőtörésnek* nevezik.

Az $u_x ; u_y ; u_z$ fősebességek nem a megfelelő x, y, z irányba terjedő hullámfront sebességét jelentik! Pl. Ha z-irányú a fázissebesség ($\hat{s}_x = \hat{s}_y = 0$ és $\hat{s}_z = 1$), akkor $v'_p = u_x$ és $v''_p = u_y$.

(18) alapján

$$D_x = \varepsilon_x E_x = \varepsilon_x \frac{\hat{s}_x \cdot (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E})}{1 - \frac{v_p^2}{u_x^2}} = \varepsilon_x u_x^2 \frac{\hat{s}_x \cdot (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E})}{u_x^2 - v_p^2} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\hat{s}_x \cdot (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E})}{u_x^2 - v_p^2}, \quad (24)$$

Behelyettesítve a v_p' és v_p'' sebességeket (24)-be és a kapott két dielektromos eltolásvektort skalárisan összeszorozva:

$$\mathbf{D}' \cdot \mathbf{D}'' = \frac{1}{\mu_0^2} \left[\frac{\hat{s}_x \cdot (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E}')}{u_x^2 - v_p'^2} \frac{\hat{s}_x \cdot (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E}'')}{u_x^2 - v_p''^2} + \frac{\hat{s}_y \cdot (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E}')}{u_y^2 - v_p'^2} \frac{\hat{s}_y \cdot (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E}'')}{u_y^2 - v_p''^2} + \frac{\hat{s}_z \cdot (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E}')}{u_z^2 - v_p'^2} \frac{\hat{s}_z \cdot (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E}'')}{u_z^2 - v_p''^2} \right], \quad (25)$$

$$\mathbf{D}' \cdot \mathbf{D}'' = \frac{1}{\mu_0^2} \frac{(\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E}') \cdot (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E}'')}{v_p'^2 - v_p''^2} \cdot \left[\frac{\hat{s}_x^2}{u_x^2 - v_p'^2} + \frac{\hat{s}_x^2}{u_y^2 - v_p'^2} + \frac{\hat{s}_x^2}{u_z^2 - v_p'^2} - \frac{\hat{s}_x^2}{u_x^2 - v_p''^2} - \frac{\hat{s}_x^2}{u_y^2 - v_p''^2} - \frac{\hat{s}_x^2}{u_z^2 - v_p''^2} \right] = 0 \quad (26)$$

Ebből az következik, hogy az adott terjedési irányhoz tartozó két \mathbf{D} sajátvektor mindig merőleges egymásra. Ugyanez az \mathbf{E} -kre is igazolható

Bevezetve:

$$g \equiv \frac{1}{\left(\frac{\hat{s}_x}{u_x^2 - v_p^2} \right)^2 + \left(\frac{\hat{s}_y}{u_y^2 - v_p^2} \right)^2 + \left(\frac{\hat{s}_z}{u_z^2 - v_p^2} \right)^2}, \quad (27)$$

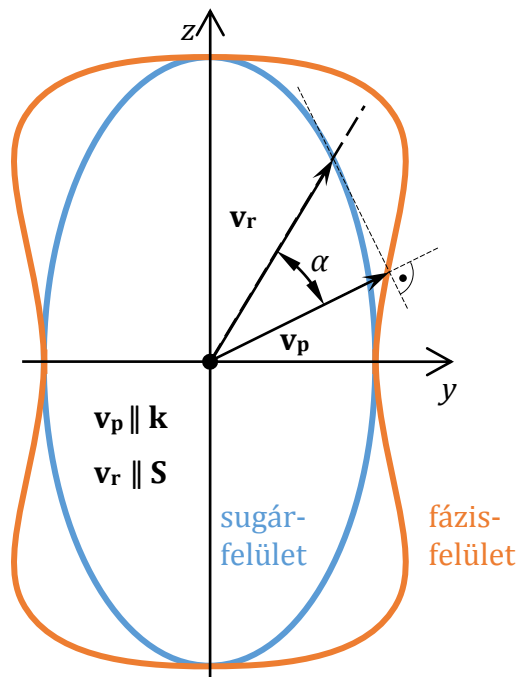
Igazolható, hogy (Born-Wolf)

$$v_r^2 = \frac{g}{v_p^2} + v_p^2, \quad (28)$$

továbbá

$$\hat{t}_i = \frac{\hat{s}_i}{v_p v_r} \left(v_p^2 - \frac{g}{u_i^2 - v_p^2} \right), \text{ ahol } i = x, y, z \quad (29)$$

ahol bevezettük a $\hat{\mathbf{t}}$ egységvektort, ami a Poynting-vektor irányába mutat ($\hat{\mathbf{t}} \equiv \mathbf{S}/S$). Mivel adott hullámfrontnormálishoz két-két v_p és v_r sebességérték tartozik, a fenti egyenlet azt jelenti, hogy az adott hullámfrontnormálishoz meghatározott \mathbf{E}' , \mathbf{E}'' sajátvektorokhoz két, eltérő Poynting-vektor irány tartozik!



A sugárfelületek általában nem ellipszoidok, hanem negyedfokú felületek, a fázisfelületek pedig hatodfokú felületek, ld. (23). A két sajátértéknek megfelelően 2-2 ilyen felület van

Úgynevezett kéttengelyű kristályokban (ld. később) két speciális irányú hullámfrontnormális esetén (29) nevezőjében zérus érték jelenik meg. E szingularitás miatt a Poynting-vektor iránya meghatározatlan, ami a *kónikus refrakció* érdekes jelenségéhez vezet.

Indexellipszoid

Az EM tér teljes energiasűrűsége a következő módon írható fel:

$$w = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} , \quad (30)$$

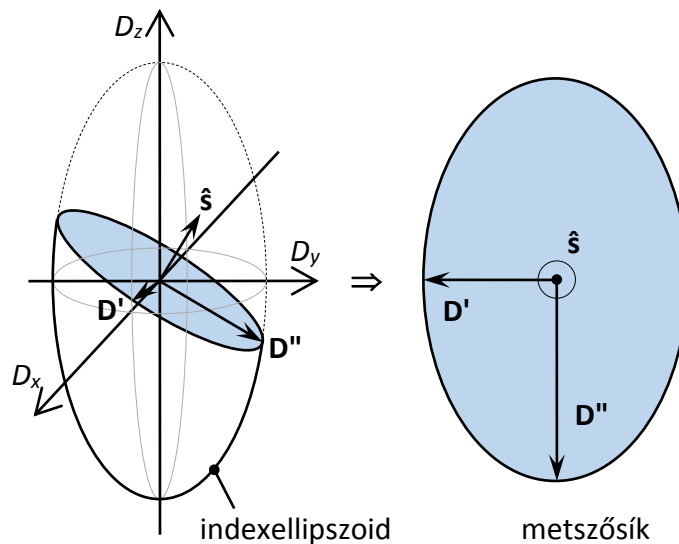
A vizsgált, főtengely-rendszerbe transzformált esetben ez a következőképpen írható:

$$w = \frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z} , \quad (31)$$

Most nézzük meg, hogy az azonos energiasűrűségű, de más és más irányba haladó síkhullámok esetén milyen módon határozható meg \mathbf{D} iránya és hossza. Az egyszerűség kedvéért legyen $w \equiv 1$.

$$\frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z} = 1 , \quad (32)$$

Ez egy ellipszoid felületet ad, amit *indexellipszoidnak* hívnak. Emlékezzünk rá, hogy \mathbf{D}' , \mathbf{D}'' és $\hat{\mathbf{s}}$ orthogonális vektorhármass. Megmutatható, hogy egy adott irányú hullámszámvektor esetén a két \mathbf{D} sajátvektor az alábbi ábrán látható módon határozható meg.



Az ellipszoid féltengelyeinek hossza rendre:

$$\sqrt{\varepsilon_x}; \sqrt{\varepsilon_y}; \sqrt{\varepsilon_z}, \quad (33)$$

amit $\sqrt{\mu_0}$ -val bővítve pont a fősebességek reciprokát kapjuk. Ebből kiindulva igazolható, hogy általános esetben a fenti módon meghatározott D' , D'' vektorok hosszát $\sqrt{\mu_0}$ -val megszorozva ($w = 1$ normálás esetén) éppen a fázissebességek reciprokát kapjuk $1/v'_p$ ill. $1/v''_p$ -et.

Meg kell jegyeznünk azt az észrevételt is, hogy egyáltalános ellipszoidnak két metszősíkja van, amelyen a keresztmetszet *kör alakú*. Ezek normálisvektorát a kristály *optikai tengelyeinek* nevezik. Az ilyen tulajdonságot mutató kristályok anizotrópiáját *kéttengelyű kettőtörésnek* nevezik. Amennyiben az indexellipszoid tengelyszimmetrikus (mondjuk a z-tengely körül), akkor e két kör keresztmetszet egygé fajul, melynek normálisa, azaz az optikai tengely a z irányba mutat. Az ilyen anyagok anizotrópiáját *egytengelyű kettőtörésnek* nevezik.

Kristálytani alapismeretek

A kristályok elemi cellája az a legkisebb térfogategység, amelyet periodikusan ismételve a teljes tér hézagmentesen kitölthető. Matematikailag igazolható, hogy a három dimenziós térben összesen 14-féle elemi cellájú kristályszerkezet létezik. Ezeket Bravais-rácsoknak nevezik.

Kristályrendszer	Főtengelyek x, y, z	Indexellipszoid	Optikai osztály	Optikai példák
Triklin	CCC	általános ellipszoid	kéttengelyű	?
Monoklin	CCF	általános ellipszoid	kéttengelyű	LYSO
Ortorombos	FFF	általános ellipszoid	kéttengelyű	BaSO ₄ , HgCl ₂
Trigonális	FRR	tengelyszimmetrikus	egytengelyű	SiO ₂ , KDP, LiNbO ₃ , Al ₂ O ₃
Tetragonális	FRR	tengelyszimmetrikus	egytengelyű	SiO ₂ , ADP, TeO ₂
Hexagonális	FRR	tengelyszimmetrikus	egytengelyű	SiO ₂ , CaCO ₃
Köbös	RRR	gömb	izotróp	NaCl, CaF ₂ , BGO

C – tengely diszperzióval; F – rögzített irányú tengely; R – szabadon forgó vagy határozatlan tengely (Born-Wolf alapján); Megjegyzés: a kvarc többféle kristálycsoportban is képes kristályosodni

Egytengelyű kettőtörés

Legyen a kristály optikai tengelye a z-tengely. Ekkor $u_x = u_y \equiv u_o$ és $u_z \equiv u_e$, ahol u_o -t ordinárius, u_e -t extraordinárius sebességeknek nevezik. (23)-ból ekkor ez lesz:

$$\frac{\hat{s}_x^2}{u_o^2 - v_p^2} + \frac{\hat{s}_y^2}{u_o^2 - v_p^2} + \frac{\hat{s}_z^2}{u_e^2 - v_p^2} = 0, \quad (34)$$

Szorozzuk meg (34)-et a nevezők szorzatával és vizsgálódjunk az egyszerűség kedvéért csak az x-z síkban ($\hat{s}_y = 0$). Ekkor

$$\hat{s}_x^2(v_p^4 + u_o^2 u_e^2 - v_p^2(u_o^2 + u_e^2)) + \hat{s}_z^2(v_p^4 + u_o^4 - 2v_p^2 u_o^2) = 0, \quad (35)$$

$$v_p^4(\hat{s}_x^2 + \hat{s}_z^2) - v_p^2(\hat{s}_x^2(u_o^2 + u_e^2) + \hat{s}_z^2 2u_o^2) + \hat{s}_x^2(u_o^2 u_e^2) + \hat{s}_z^2(u_o^4) = 0, \quad (36)$$

$$v_p^2 = \frac{\hat{s}_x^2(u_o^2 + u_e^2) + \hat{s}_z^2 2u_o^2 \pm \sqrt{(\hat{s}_x^2(u_o^2 + u_e^2) + \hat{s}_z^2 2u_o^2)^2 - 4(\hat{s}_x^2 + \hat{s}_z^2)(\hat{s}_x^2(u_o^2 u_e^2) + \hat{s}_z^2(u_o^4))}}{2(\hat{s}_x^2 + \hat{s}_z^2)}, \quad (37)$$

A gyökjel alatt:

$$\hat{s}_x^4 \cdot (u_o^2 - u_e^2)^2, \quad (38)$$

$$v_p^2 = \frac{\hat{s}_x^2(u_o^2 + u_e^2) + \hat{s}_z^2 2u_o^2 \pm \hat{s}_x^2 \cdot (u_o^2 - u_e^2)}{2(\hat{s}_x^2 + \hat{s}_z^2)}, \quad (39)$$

$$v_p'^2 = u_o^2, \quad (40)$$

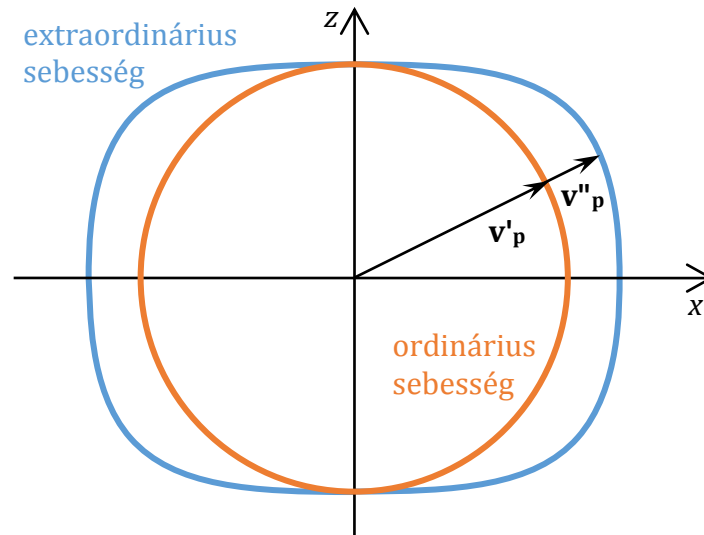
Mivel ez minden irányra konstans sebességet ad, egy körként (3D-ben gömb) ábrázolható.

$$v_p^{n2} = \frac{\hat{s}_x^2 u_e^2 + \hat{s}_z^2 u_o^2}{\hat{s}_x^2 + \hat{s}_z^2}, \quad (41)$$

Mivel $\hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2 = 1$

$$v_p^{n2} = \hat{s}_x^2 u_e^2 + \hat{s}_z^2 u_o^2. \quad (42)$$

Ez pedig egy negyedrendű görbe, az ún. ovális (3D-ben ovaloid) egyenlete.

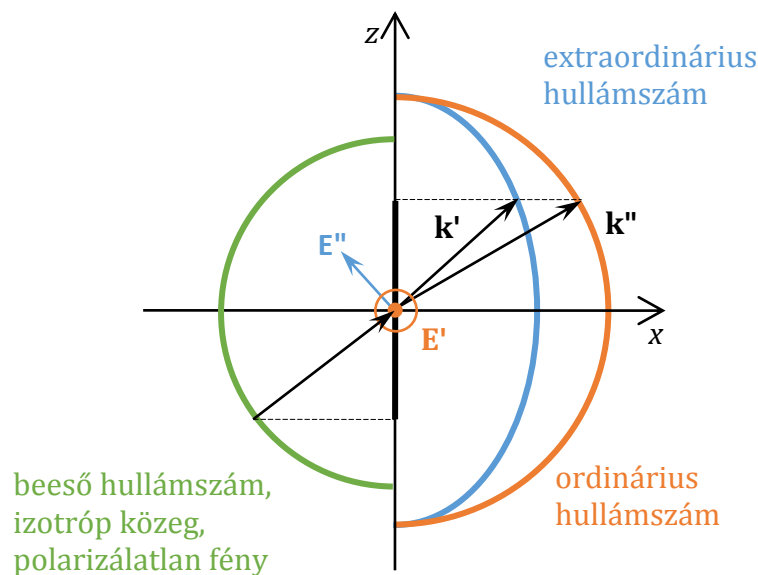


Fázisfelületek egytengelyű kettőtörés esetén.

Ha $u_o > u_e$, akkor pozitív, ellenkező esetben negatív kettőtörésről beszélünk (ld. ábra). (42)-be a sebességek helyére a $n = c/v_p$ alapján a megfelelő törésmutatókat beírva, c-vel egyszerűsítve:

$$\frac{1}{n^{n^2}} = \frac{\hat{s}_x^2}{n_e^2} + \frac{\hat{s}_z^2}{n_o^2}. \quad (43)$$

Ezzel egy ellipszis egyenletéhez jutottunk. $(2\pi)^2$ -vel beszorozva pedig a hullámszámvektor-hosszát kapjuk meg adott irányú hullámfrontnormális esetén.



Fénytörés izotróp/anizotróp közeg határán

Fáziskésleltető lemezek

...

További anizotróp jelenségek

Dikroizmus

Optikai aktivitás

Mechanikai feszültség által indukált kettőtörés