

Mozgás leírása nem-inerciarendszerekben. Tehetetlenségi „erők“.

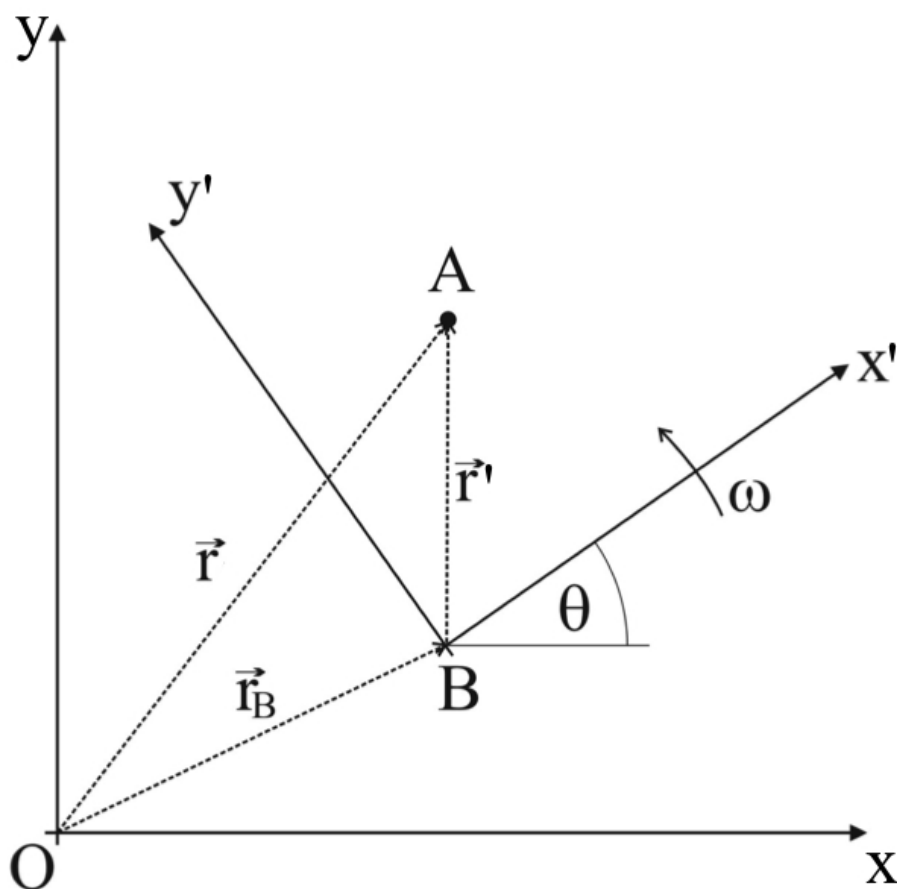
Bokor Nándor, BME, 2013

(x,y) : inerciarendszer.

(x',y') : gyorsuló vonatkoztatási rendszer. Ez nem inerciarendszer, mert:

(1) az origója, B, *transzlációs gyorsulást végez* az (x,y) inerciarendszerhez képest,

(2) az (x',y') koordinátatengelyek *forognak* a B origó körül.



A tömegpont, amelynek a mozgását le akarjuk írni, éppen az A pontban tartózkodik. Az (x,y) inerciarendszerben mért helyvektorát így írhatjuk:

$$\vec{r} = \vec{r}_B + \vec{r}' = \vec{r}_B + (x' \vec{i}' + y' \vec{j}'), \quad (1)$$

ahol \vec{r}' az (x',y') gyorsuló vonatkoztatási rendszerben mért helyvektor, \vec{i}' és \vec{j}' pedig a gyorsuló vonatkoztatási rendszer x' - és y' -irányú egységvektorai.

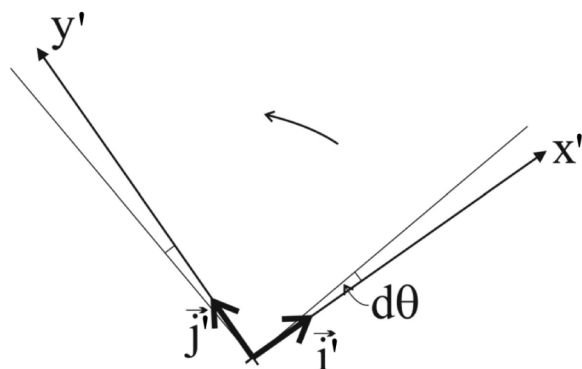
Amint az alábbi ábra mutatja, ezeknek az egységvektoroknak az idő szerinti deriváltja (változási gyorsasága) így írható:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \frac{d\theta \cdot \vec{j}'}{dt} = \omega \cdot \vec{j}' \quad (2)$$

illetve

$$\frac{d\vec{j}'}{dt} = -\frac{d\theta \cdot \vec{i}'}{dt} = -\omega \cdot \vec{i}', \quad (3)$$

ahol $\omega = \dot{\theta}$ az (x',y') tengelyek szögsebessége.



Ez a szögsebesség vektoriális alakban a következőképpen írható fel:

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}', \quad (4)$$

ahol \vec{k}' a z' -irányú egységvektor (amely az ábra síkjából kifelé mutat). Az $\vec{\omega}$ iránya tehát az ún. „jobbcsavar-szabályt“ követi.

A (4) alapján könnyen beláthatóak az alábbi összefüggések:

$$\vec{\omega} \times \vec{i}' = \omega \cdot \vec{j}' \quad (5)$$

és

$$\vec{\omega} \times \vec{j}' = -\omega \cdot \vec{i}'. \quad (6)$$

A (2)-t az (5)-tel, és a (3)-at a (6)-tal összevetve az

$$\dot{\vec{i}}' = \vec{\omega} \times \vec{i}' \quad (7)$$

és

$$\dot{\vec{j}}' = \vec{\omega} \times \vec{j}' \quad (8)$$

összefüggésekhez jutunk.

A tömegpont (x,y) rendszerbeli sebességét úgy kapjuk meg, hogy az (1) egyenletet idő szerint deriváljuk:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_B + \frac{d}{dt}(x'\vec{i}' + y'\vec{j}') = \dot{\vec{r}}_B + (x'\dot{\vec{i}}' + y'\dot{\vec{j}}') + (\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}'). \quad (9)$$

A (9) jobb oldalán szereplő második tagot (7) és (8) felhasználásával átírhatjuk:

$$x'\dot{\vec{i}}' + y'\dot{\vec{j}}' = \vec{\omega} \times (x'\vec{i}' + y'\vec{j}') = \vec{\omega} \times \vec{r}', \quad (10)$$

a (9) jobb oldalán szereplő harmadik tag pedig a tömegpontnak a *nem-inerciarendszerben mért* sebességét adja meg:

$$\vec{v}' = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}'. \quad (11)$$

(10)-et és (11)-et a (9)-be behelyettesítve a tömegpont sebességére a

$$\vec{v} = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}' \quad (12)$$

összefüggés adódik, ahol \vec{v}_B az a sebesség amellyel a B origó mozog az inerciarendszerben mérve.

Az A pontban levő tömegpont (inerciarendszerben mért) gyorsulása a (12) idő szerinti deriválásából kapható meg:

$$\vec{a} = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \dot{\vec{v}}'. \quad (13)$$

A fenti összefüggéseket használva a (13) jobb oldalán szereplő harmadik tag átírható a következő alakba:

$$\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}') = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\omega} \times \vec{v}', \quad (14)$$

a (13) jobb oldalán szereplő negyedik tag pedig ebbe az alakba:

$$\dot{\vec{v}}' = \frac{d}{dt}(\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}') = \ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \dot{x}'\dot{\vec{i}}' + \dot{y}'\dot{\vec{j}}' = \vec{\omega} \times (\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}') + \vec{a}' = \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{a}', \quad (15)$$

ahol \vec{a}' a tömegpont gyorsulása *a nem-inerciarendszerben mérve*.

Tehát

$$\vec{a} = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{a}'. \quad (16)$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt a tömegpont m tömegével, és rendezzük át az egyenletet, hogy *úgy nézzen ki*, mint Newton 2. törvénye (amit a gyorsuló megfigyelő nézőpontjából írtunk fel):

$$m\vec{a}' = \vec{F}_e - m\vec{a}_B + m\vec{r}' \times \dot{\vec{\omega}} + m\vec{\omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\omega}) + 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}, \quad (17)$$

ahol $m\vec{a}'$ helyett az eredő erőt, \vec{F}_e -t írhattuk be, Newton 2. törvénye szerint (amely inerciarendszerekben érvényes).

Összefoglalva: ahhoz, hogy a Newton2-höz hasonló egyenletet használhasson, a nem-inerciarendszerbeli megfigyelő kénytelen további „erőket“ bevezetni az egyenlet jobb oldalán (az *igazi, fizikai kölcsönhatásokból származó \vec{F}_e* eredő erő mellé). Ezeket a további tagokat „tehetetlenségi erőknek“ nevezzük. Ezek nem írnak le semmilyen fizikai kölcsönhatást. Csupán matematikai kifejezések, amelyekre a gyorsuló megfigyelőnek azért van szüksége, mert szeretne Newton 2. törvényéhez hasonló kinézetű egyenletet használni.

A (17) jobb oldalán szereplő tehetetlenségi „erők“ elnevezése:

$-m\vec{a}_B$: translációs tehetetlenségi „erő“

$m\vec{r}' \times \dot{\vec{\omega}}$: Euler-„erő“

$m\vec{\omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\omega})$: centrifugális „erő“

$2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$: Coriolis-„erő“