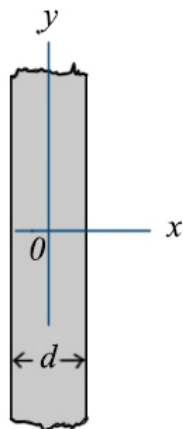


2. gyakorlat

2.1. Feladat: (HN 25B-7) Egy d vastagságú lemezben egyenletes ρ térfogatmenti töltés van. A lemez a $\pm y$ és $\pm z$ irányokban gyakorlatilag végtelen (9. ábra); az x tengely zéruspontját úgy választottuk meg, hogy az a lemez d szélességének a felénél legyen. Számítsuk ki az elektromos térerősség nagyságát x pozitív értékeire az a) $0 < x < d/2$; b) $x > d/2$ esetekre.



9. ábra. A 25B-7 feladathoz

Megoldás: Az elektrosztatikus térerősség forrásai a töltések, ezért: 1) a szimmetria miatt a térerősségnek csak x komponense van, 2) pozitív töltéssűrűség esetén pozitív x -ekre pozitív, negatív x -ekre negatív irányú, emiatt 3) a lemez szélességének felező síkjában nulla.

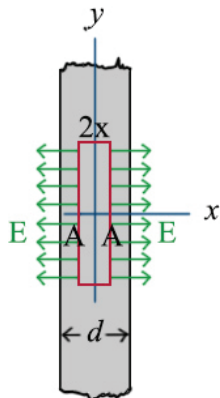
A Gauss törvény szerint

$$\varepsilon_0 E \text{ fluxusa egy zárt } A \text{ felületre} = \text{Az összes töltés a felületen belüli térfogatban}$$
$$\int_A \varepsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{A} = \int_{V(A)} \rho dV \quad (2.1.1)$$

Vegyünk fel a lemez belsejében egy olyan, $2x$ magasságú hengerszerű testet, pl. egyenes hasábot, amelynek két egymással és a lemez felületével párhuzamos A nagyságú felülete van és amely magasságát a lemez középpárhuzamos síkja felezi (ld. 10. ábra). Erre felírva a (2.1.1) Gauss törvényt és felhasználva, hogy a lemez belsejében ρ állandó, illetve \mathbf{E} a hasáb mindkét A felületére merőleges és kifelé mutat, továbbá, hogy a hasáb oldallapjaival/palástjával \mathbf{E} párhuzamos, tehát azokra fluxusa 0:

$$\varepsilon_0 E 2A = \rho \cdot A 2x$$
$$E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} x \quad |x| \leq \frac{d}{2} \quad (2.1.2)$$

10. ábra. Térerősség egy egyenletesen töltött szigetelő lemezben



A lemezen kívül ($|x| > d/2$) a térerősség állandó³ és értéke (2.1.2) maximuma, azaz

$$E = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \quad (2.1.3)$$

Vegyük észre, hogy a lemezen kívül a tér pontosan ugyanolyan, mint egy végtelen σ töltéssűrűségű 2D lemez esetén, mivel $\sigma = \rho d$.

2.2. Feladat: (HN 25B-12) Egy nagyon hosszú, R sugarú fémrúdon σ egyenletes felületmenti töltéssűrűség van.

(a) Elhanyagolva a rúd végeinek hatását, számítsuk ki az \mathbf{E} térerősséget a henger felszínétől R távolságban.

(b) Számítsuk ki azt a v sebességet, amellyel egy elektron a rúd körül R távolságban stacionárius körpályán mozog.

Megoldás:

(a) Az, hogy a fémrúd nagyon hosszú azt jelenti, hogy (első közelítésben) végtelennek tekinthetjük. Szimmetria okokból a térerősség merőleges kell legyen az egyenletesen feltöltött henger felületére, ezért nagysága csak a távolságtól függ. A Gauss törvény használatához egy, a fémrúddal koaxiális henger alakú, r sugarú és l hosszúságú felületet vegyünk fel. Mivel a térerősség ennek a hengernek a palástjára mindenütt merőleges és állandó nagyságú a határoló körök síkjával pedig párhuzamos, erre a teljes zárt felületre vett fluxus megegyezik az r sugarú hengerpalástra vett fluxussal. Az ezen a felületen belüli összes töltés pedig a σ töltéssűrűség és a fémrúd l hosszúságú szakasza felületének szorzata. A Gauss törvény szerint tehát a térerősség a vezetőkön kívül

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 2r\pi l E &= 2R\pi l \sigma \\ E(r) &= \frac{R\sigma}{\varepsilon_0 r} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

³Ez szimmetria okokból is következik.

Innen a térerősség a fémrúdtól R távolságban ($r = 2R$)

$$E(R) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (2.2.2)$$

(b) Ha egy elektron kering ezen az $r = 2R$ sugarú körpályán, akkor

$$-eE = -\frac{m_e v^2}{r} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eER}{m_e}} = \sqrt{\frac{e\sigma R}{\varepsilon_0 m_e}}. \quad (2.2.3)$$

2.3. Feladat: (HN 25C-18) Egy R sugarú gömbben az \mathbf{E} elektromos térerősség kifelé mutat, és értéke mindenütt konstans, E_o . Így, $E = E_o \hat{\mathbf{r}}$, ahol $\hat{\mathbf{r}}$ a kifelé mutató sugárirányú egységvektor.

(a) Felhasználva Gauss törvényét vezessük le hogy hogyan függ a $\rho(r)$ térfogatmenti töltéssűrűség az r sugártól. (Útmutatás: az integrálszámítás alaptétele szerint⁴ ha

$$g(x) = \int_o^x f(t)dt, \text{ akkor } \frac{dg}{dx} = f(x))$$

(b) A gömb középpontjával kapcsolatban milyen nehézség adódik?

Megoldás: Legyen a gömbben a töltéssűrűség ρ . Mivel \mathbf{E} \mathbf{r} irányú a tér gömszimmetrikus, ezért ρ csak a távolságtól függ, az iránytól nem. $\rho = \rho(r)$. A (2.1.1) Gauss törvény alkalmazásához vegyünk fel egy r sugarú koncentrikus A gömbfelületet. Erre a felületre \mathbf{E} mindenhol merőleges, így a Gauss törvény szerint

$$\varepsilon_0 E(r) 4\pi r^2 = \int_{V(r')} \rho(r) dV' \quad (2.3.1)$$

A jobboldal integrál kiszámításához vegyük figyelembe, hogy $\rho = \rho(r)$ csak r nagyságától függ, ezért a térfogatra való integrálást elvégezhetjük úgy is, hogy térfogatelemeknek r' sugarú és dr' vastagságú gömbhéjakat választunk⁵. Egy ilyen gömbhéj dV' térfogata $dV' = 4\pi r'^2 dr'$, töltése $dQ = \rho(r') dV' = 4\pi \rho r'^2 dr'$, azaz a Gauss törvény szerint:

$$\varepsilon_0 E(r) 4\pi r^2 = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad (2.3.2)$$

$$\varepsilon_0 E_o r^2 = \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad (2.3.3)$$

⁴Az integrálási változó neve bármi lehet, amit nem keverhetünk össze az integrálás határával. Itt a t -t választottuk.

⁵Vagyis az A felület által határolt térfogatot felosztjuk koncentrikus, dr' vastag $dV'_G = dA' \cdot dr' G(r')$ gömbhéjakra, amelyekben ρ jó közelítéssel állandó, tehát az integrál ezekre egyszerűen kiszámítható, majd az így kapott függvényt integráljuk 0 és R között:

$$\begin{aligned} \int_{V(r)} \rho(r') dV' &= \int_0^r \int_{G(r')} \rho(r') dV'_G = \int_0^r \left(\rho(r') \int_{G(r')} dA'_G \right) dr' \\ &= \int_0^r (\rho(r') 4\pi r'^2) dr' = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \end{aligned}$$

Az integrálszámítás alaptétele

$$\text{ha } g(r) = \int_0^r f(r') dr' \quad \text{akkor} \quad (2.3.4)$$

$$f(r) = \frac{dg(r)}{dr} \quad (2.3.5)$$

A mi esetünkben

$$f(r) \equiv \rho(r) r^2 \quad (2.3.6)$$

$$g(r) \equiv \varepsilon_o E_o r^2 \quad (2.3.7)$$

Tehát

$$\begin{aligned} \rho(r) r^2 &= 2 \varepsilon_o E_o r \\ \rho(r) &= 2 \varepsilon_o E_o \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

b) Látható, hogy ha $r \rightarrow 0$, akkor $\rho(r) \rightarrow \infty$.

2.4. Feladat: (HN 26B-9) A tér egy tartományában a *volt* egységekben kifejezett V potenciált a

$$V = \left(3 \left[\frac{V}{m^2}\right]\right)x^2 + \left(0,2 \left[\frac{V}{m}\right]\right)y$$

függvény adja meg, ahol x és y méterekben megadott távolságok. Számítsuk ki az $x = 10$ cm, $y = 15$ cm koordinátájú helyen levő elektronra ható erő nagyságát és irányát.

Megoldás: A potenciál és a térerősség közötti kapcsolat

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -gradV(\mathbf{r}) \quad (2.4.1) \\ E_x &= -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z}, \end{aligned}$$

Esetünkben $V(x, y, x) = V(x, y) = Ax^2 + By$

$$\begin{aligned} E_x &= -2Ax, & E_y &= -B, & E_z &= 0 \\ F_x &= 2eAx, & F_y &= eB \\ F &= e \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = e \sqrt{4A^2x^2 + B^2} \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Az erő iránya az x tengellyel α szöget zár be, ahol $\text{tg } \alpha = \frac{B}{2Ax}$, $B = 0,2 \left[\frac{V}{m}\right]$,

$A = 3 \left[\frac{V}{m^2}\right]$ és $2Ax = 0,6 \left[\frac{V}{m}\right]$ Behelyettesítve a számértékeket

$$\begin{aligned} F_x &= 6 \cdot 0,1 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 9,6 \cdot 10^{-20} \text{N} & F_y &= 0,2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 3,2 \cdot 10^{-20} \text{N} \\ F &= \sqrt{9,6^2 + 3,2^2} \cdot 10^{-20} = 1,0119 \cdot 10^{-19} \text{N} \\ \text{tg } \alpha &= 0,2/0,6 = 0,33 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 18,4^\circ. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

2.5. Feladat: (HN 26B-12) Két egyforma kicsiny fémgömb töltése q_1 illetve q_2 . Egymást 1 m távolságból $9 \times 10^{-3} N$ erővel vonzzák. A gömböket összeérintjük, majd újból egymástól 1 m távolságra helyezzük el. Ekkor úgy találjuk, hogy $2 \times 10^{-3} N$ erővel taszítják egymást. Számítsuk ki a q_1 és q_2 töltéseket.

Megoldás: Összeérintés előtt a gömböknek különböző előjelű töltése volt ezért vonzótták egymást. Összeérintés után a töltéseik kiegyenlítődték és mindkettő töltése azonos előjelűvé és $q = \frac{q_1 + q_2}{2}$ nagyságúvá vált, ezért taszítják egymást⁶ Az egyenleteket felírva

$$\begin{aligned} |F_1| &= K \frac{|q_1 q_2|}{r^2} = 9 \cdot 10^9 q_1 q_2 = 9 \cdot 10^{-3} N \\ |F_2| &= K \frac{q^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 q^2 = 2 \cdot 10^{-3} N \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

innen, mivel vagy q_1 , vagy q_2 negatív kell legyen

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 &= -9 \cdot 10^{-3} / 9 \cdot 10^9 = -10^{-12} C^2 \\ \left(\frac{q_1 + q_2}{2} \right)^2 &= 2 \cdot 10^{-3} / 9 \cdot 10^9 = 2,22 \cdot 10^{-13} C^2; \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{q_1 + q_2}{2} &= \pm \sqrt{2,22 \cdot 10^{-13}} C \\ q_1 + q_2 &= \pm 2 \cdot \sqrt{2,22 \cdot 10^{-13}} = \pm 9,4234 \cdot 10^{-7} C \\ q_2 &= -10^{-12} \frac{1}{q_1} \\ q_1 - 10^{-12} \frac{1}{q_1} &= \pm 9,4234 \cdot 10^{-7} C \\ q_1^2 \mp 9,4234 \cdot 10^{-7} \cdot q_1 - 10^{-12} &= 0. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

A két egyenletet felírva

$$q_1^2 - 9,4234 \cdot 10^{-7} \cdot q_1 - 10^{-12} = 0 \quad (2.5.4)$$

$$q_1^2 + 9,4234 \cdot 10^{-7} \cdot q_1 - 10^{-12} = 0. \quad (2.5.5)$$

Jelöljük a négyzetgyök előjelét felső indexben

$$q_{1,\pm}^+ = \frac{9,4234 \cdot 10^{-7} \pm \sqrt{3,5555 \cdot 10^{-12} + 4 \cdot 10^{-12}}}{2} \quad (2.5.6)$$

$$= \frac{9,4234 \cdot 10^{-7} \pm 2,7487 \cdot 10^{-6}}{2} \quad (2.5.7)$$

$$q_{1,\pm}^- = \frac{-9,4234 \cdot 10^{-7} \pm \sqrt{3,5555 \cdot 10^{-12} + 4 \cdot 10^{-12}}}{2} \quad (2.5.8)$$

$$= \frac{-9,4234 \cdot 10^{-7} \pm 2,7487 \cdot 10^{-6}}{2} \quad (2.5.9)$$

⁶ Ez arra utal, hogy kezdetben nem volt azonos nagyságú a töltésük.

$$q_1^+ = \begin{cases} 1,5767 \cdot 10^{-6} \text{ C} \\ -6,3425 \cdot 10^{-7} \text{ C} \end{cases} \quad (2.5.10)$$

$$q_2^+ = \begin{cases} -6,3425 \cdot 10^{-7} \text{ C} \\ 1,5767 \cdot 10^{-6} \text{ C} \end{cases} \quad (2.5.11)$$

$$q_1^- = \begin{cases} -1,5767 \cdot 10^{-6} \text{ C} \\ 6,3425 \cdot 10^{-7} \text{ C} \end{cases} \quad (2.5.12)$$

$$q_2^- = \begin{cases} 6,3425 \cdot 10^{-7} \text{ C} \\ -1,5767 \cdot 10^{-6} \text{ C} \end{cases} \quad (2.5.13)$$

Innen látható, hogy elég lett volna a négyzetgyökvonásnál a pozitív előjelet használni amivel megkaptuk volna a az első két megoldást, majd utána felcserélni az előjeleket a második két megoldáshoz. Visszahelyettesítve pl. ez első két megoldást és elhagyva a felső indexet

$$K \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1,5767 \cdot 10^{-6} \cdot 0,63425 \cdot 10^{-6}}{1} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ N}, \quad (2.5.14)$$

$$K \frac{\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1,5767 \cdot 10^{-6} + 0,63425 \cdot 10^{-6})^2}{4} = 2,00 \cdot 10^{-3} \text{ N}. \quad (2.5.15)$$

2.6. Feladat: (HN 26C-17) Egy R sugarú gömb belsejében a töltéssűrűség a közép-ponttól való r távolsággal arányos, azaz $\rho(r) = Ar$, ha $(0 < r < R)$, ahol A egy állandó.

- Mi A SI egysége?
- Mekkora a gömb teljes Q töltése A -val és R -rel kifejezve?
- Gauss törvényét felhasználva számítsuk ki a gömb belsejében és kívül, a közép-ponttól r távolságra az E télerősséget.
- Számítsuk ki a V potenciált r függvényében a gömbön belül is, kívül is. (Legyen $V = 0$ a végtelenben.)

Megoldás:

(a) Az A paraméter mértékegysége C/m^4 .

(b) A gömb teljes töltése:

$$Q = \int_0^R \rho(r) 4r^2 \pi dr = \int_0^R A 4r^3 \pi dr = AR^4 \pi. \quad (2.6.1)$$

(c) A télerősség kiszámolásához

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (2.6.2)$$

a Gauss-törvényt használjuk. A gömbön belüli térrészre alkalmazva

$$E 4r^2 \pi = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r \rho(r) 4r^2 \pi dr = \frac{1}{\varepsilon_0} A r^4 \pi, \quad (2.6.3)$$

amelyből

$$E = \frac{A}{4\varepsilon_0} r^2 \quad (0 < r < R). \quad (2.6.4)$$

A gömbön kívüli térrészre az

$$E4r^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0} AR^4\pi \quad (2.6.5)$$

írható, amelyből

$$E = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (R < r). \quad (2.6.6)$$

(d) Az elektromos potenciál meghatározása a gömbön kívül ($R < r$) az

$$U(r) - U(\infty) = - \int_{\infty}^r \frac{AR^4}{4\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r \quad (2.6.7)$$

integrál kiszámolásával történik. Innen a végtelenbeli zérus potenciálhoz viszonyítva az r -beli potenciál:

$$U(r) = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0} \frac{1}{r} \quad (R < r). \quad (2.6.8)$$

A potenciál a gömb felszínén ugyancsak a végtelenbeli zérus potenciálhoz viszonyítva:

$$U(r) = \frac{AR^3}{4\varepsilon_0} \quad (r = R). \quad (2.6.9)$$

A felületről a gömb belseje felé haladva a potenciálkülönbség

$$U(r) - U(R) = - \int_R^r \frac{A}{4\varepsilon_0} r^2 dr = - \frac{A}{12\varepsilon_0} [r^3]_R^r = - \frac{A}{12\varepsilon_0} r^3 + \frac{A}{12\varepsilon_0} R^3. \quad (2.6.10)$$

Így a gömb belsejében lévő r pontban a potenciál a végtelenhez viszonyítva:

$$U(r) = \frac{AR^3}{4\varepsilon_0} - \frac{A}{12\varepsilon_0} r^3 + \frac{A}{12\varepsilon_0} R^3 = - \frac{A}{12\varepsilon_0} r^3 + \frac{A}{3\varepsilon_0} R^3 \quad (0 < r < R). \quad (2.6.11)$$

Házi feladat (gyakorlásra):

25/ 1, 5, 10, 15, 16, 19, 20

26/ 3, 7, 8, 9, 21, 24, 27, 33, 37, 41