MECHANIKA 2	B) HF 07.

B 19.) feladat

Az egyik legegyszerűbb nem-kvadratikus térelmélet az ún. Φ^4 elmélet, melynek Lagrange-sűrűsége a tér, idő és a mező megfelelő átskálázása után az alábbi alakot ölti:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_t \Phi\right)^2 - \mathcal{V}\left(\Phi, \partial_x \Phi\right),$$

ahol a potenciális energia sűrűsége (az ún. szimmetriasértett fázisban) az alábbi alakot ölti:

$$\mathcal{V}\left(\Phi, \partial_x \Phi\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_x \Phi\right)^2 - \frac{1}{2}\Phi^2 + \frac{1}{4}\Phi^4.$$

Ez az elmélet nem csak az egyszerűsége miatt fontos, de pl. az egytengelyű mágnesek leírásánál is használható.

a.) Keressen olyan $\Phi(x,t) = const.$, időben és térben állandó konfigurációkat, melyekre a $V[\Phi] = \int dx \mathcal{V}$ potenciális energia minimális. Ha jól számolt, a megoldás nem egyértelmű.

b.) Most tekintsen időben állandó, de térben változó stacionárius $\Phi(x)$ megoldásokat. Adja meg az egyensúlyi egyenleteket a $V[\Phi]$ funkcionál variálásával!

c.) Észreveheti, hogy a b.) feladat analóg egy tömegpont egydimenziós mozgásegyenletének Lagrange-féle levezetésével, ha az *x*-et tekinti az időnek. Mivel azonban a potenciális energia sűrűsége nem függ explicit módon az *x*-től, így az energiamegmaradásnak megfelelő „megmaradási tétel" írható fel. Ezen gondolatmenet alapján mutassa meg, hogy időben állandó konfigurációk esetén:

$$\frac{1}{2}\left(\partial_x \Phi\right)^2 + \frac{1}{2}\Phi^2 - \frac{1}{4}\Phi^4 = const..$$

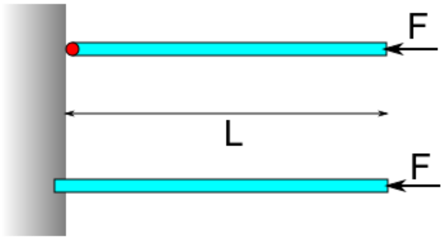
d.) Szeretnénk olyan megoldást kapni, amely az a.) feladat egyik konstans értékéből átvisz a másikba, azaz $\Phi(x \to -\infty) = \Phi_1$ és $\Phi(x \to +\infty) = \Phi_2$. (Ez egy ún. doménfal megoldás.) Egy ilyen megoldás esetén a c.) feladatban szereplő konstans 1/4 kell legyen. (Miért is?) Integrálja az egyenletet azzal a feltétellel, hogy $\Phi(x_0) = 0$, és mutassa meg, hogy a megoldás:

$$\Phi(x) = \tanh\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{2}}\right)$$

alakú.

e.) EXTRA! Hasonlóan az előző feladatsorban szereplő B 18.) feladathoz, az $\mathcal{L}$-ből számolt (most már időfüggő) mozgásegyenletek Lorentz-invariánsak ($c = 1$). Ezért az „álló" doménfal megoldásból megkapható a „mozgó" doménfal (vagy kink) megoldás egyszerű Lorentz-transzformációval. Adja meg egy $v < c$ sebességgel haladó kink-re a $\Phi(x,t)$ megoldást!

B 20.) feladat



Adott két azonos „L" hosszúságú rúd. Az egyiket egy falhoz szerelt könnyen elforduló csuklóhoz rögzítettünk, a másikat pedig befalaztuk. A rudak vízszintesek, tömegük elhanyagolható, a végüket „F" erővel nyomjuk vízszintesen a fal felé.
Egy ilyen elrendezésnél azt várjuk, ha a nyomóerő egy kritikus értéknél nagyobb, a rúd kihajlik. Ezt a jelenséget nevezik Euler-féle instabilitásnak, és egy tartószerkezet méretezésénél erre is figyelniük kell a mérnököknek.
A rúd anyagának Young-modulusa „E", a keresztmetszeti tényező „I". A vízszintes tengely legyen a „z" tengely, a rúd kitérését jelölje „u(z)"! A feladatban a rúd egyensúlyi alakját keressük.

a.) A rúd energiája az alábbi funkcionállal fejezhető ki:

$$V[u]=\frac{IE}{2}\int_0^L dz\left(\partial_z^2 u\right)^2 - F\int_0^L dz\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\partial_z u\right)^2}}\right).$$

Az első tag a rúd meghajlásából származó járulék, a második tag írja le a rúd „z" irányú megrövidülését, ha kihajlik.
A második tagot közelítse kis kihajlás esetére, a $\partial_z u$ -ban legalacsonyabb rendig!

b.) A funkcionál közelített alakjának variálásával adja meg a rúd egyensúlyi alakját meghatározó (negyedrendű) differenciálegyenletet! Mutassa meg, hogy az egyenlet megoldása szinuszos alakú. Mekkora a függvény periódusa?

c.) Mik az egyenlet peremfeltételei a „csuklós" ill. a befalazott esetben? (A nyomóerő helyén az „u = 0" pozíciót biztosítjuk, de a rúd elfordulhat.)

d.) Legalább mekkora erővel kell nyomni a rudakat az egyes esetekben, hogy legyen kihajlás? (A rúd hosszába a „hullámhossznak" valahányszor (hányszor?) bele kell férnie.)

B 21.) feladat

Tekintsen egy olyan mezőt, ami az „x" tengely minden pontjához egy $\mathbf{n}(x)$ egységvektort rendel, ahol az egységvektor a háromdimenziós tér bármely irányába mutathat. A mezőkonfiguráció energiáját az alábbi funkcionállal adjuk meg:

$$E=\frac{c}{2}\int(\partial_x\mathbf{n})^2$$

A célunk az egyensúlyi konfigurációk keresése. Ezt az energia-funkcionál minimalizálásával érhetjük el, azonban vigyáznunk kell: az egységvektorok hosszát nem variálhatjuk.

a.) Lássa be, hogy a mező variációját $\delta\mathbf{n}=\mathbf{n}\times\delta\boldsymbol{\sigma}$ alakban keresve az **n** hossza ($\delta\boldsymbol{\sigma}$ -ban elsőrendben) nem változik, ahol $\delta\boldsymbol{\sigma}$ tetszőleges, infinitezimális vektormező.

b.) Írja fel az energia δE variációját, ha a $\delta\boldsymbol{\sigma}$ -ban csak a lineáris tagokat tartja meg.

c.) A hármas szorzat ciklikus tulajdonságát (**a**(**b**×**c**) = **b**(**c**×**a**)), és parciális integrálást felhasználva mutassa meg, hogy:

$$\delta E=-c\int dx\,\delta\boldsymbol{\sigma}(x)\cdot\left(\partial_x^2\mathbf{n}(x)\times\mathbf{n}(x)\right)$$

alakú.

d.) Ez alapján olvassa le az egyensúlyi egyenletet. Mutassa meg, hogy ennek tetszőleges olyan függvény megoldása, amire:
$\partial_x^2 \mathbf{n} = a(x)\mathbf{n}$, ahol *a(x)* tetszőleges függvény.