Fizika i, 2023 tavaszi félév, 5. gyakorlat - MEGOLDÁS

Órai munkára javasolt feladatok

F1. A proton tömege $m_\mathrm{p} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, töltése $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C; az elektrom tömege $m_\mathrm{e} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg, töltése $-e$.

A hidrogénatomban, r távolságra lévő elektron és proton közötti gravitációs vonzóerő:

$$F_\text{grav.} = G\frac{m_\mathrm{p} m\mathrm{e}}{r^2},$$

az elektrosztatikus vonzóerő:

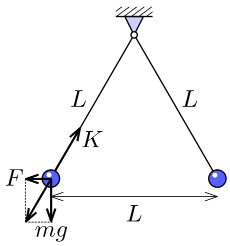
$$F_\text{el.} = k\frac{e^2}{r^2}.$$

A két erő hányadosa:

$$\frac{F_\text{el.}}{F_\text{grav.}} = \frac{ke^2}{Gm_\mathrm{p} m\mathrm{e}} \approx 2 \cdot 10^{39}.$$

A hányados nem függ a két részecske közötti távolságtól.

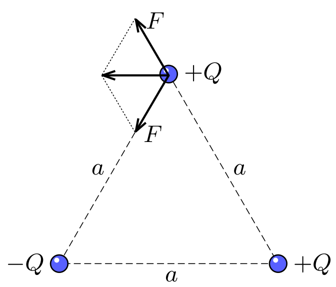
F2. Rajzoljuk be az egyik golyóra ható erőket.



A golyó egyensúlyban van, ezért a rá ható erők eredője nulla. Emiatt a K kötélerő vízszintes, illetve függőleges komponense rendre az $F = kQ^2/L^2$ elektromos taszítóerővel és az mg nehézségi erővel egyezik meg. Másként mondva ezt azt jelenti, hogy F és mg erők eredője kötélirányú. Mivel a háromszög szabályos, ezért a két fonál közötti szög 60°-os. Tehát

$$\frac{F}{mg} = \tan 30° \to m = \frac{F}{g \tan 30°} = \sqrt{3}\frac{kQ^2}{gL^2}.$$

F3. *a*) Az ábrán berajzoltuk az egyik $+Q$ töltésre ható erőket.

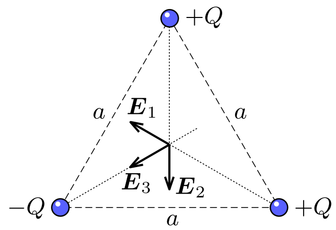


Mindkét erő azonos nagyságú: $F = kQ^2/a^2$, de az egyik vonzó-, a másik taszítóerő. Mivel a két erő azonos, és a kettő által bezárt szög 120°, ezért az eredő erő nagysága is $F = 9 \cdot 10^{-5}$ N. Iránya pedig a $-Q$ és a másik $+Q$ töltést összekötő oldallal párhuzamos, ahogyan az ábra mutatja.

b) Az egyik töltéstől származó elektromos térerősség nagysága

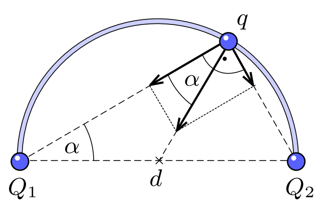
$$E = \frac{kQ}{\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} = 3\frac{kQ}{a^2},$$

hiszen szabályos háromszög esetén a középpont harmadolja a magasságot. A középpontban az egyes töltésektől származó térerősségvektorokat az ábra mutatja ($|\boldsymbol{E}_1| = |\boldsymbol{E}_2| = |\boldsymbol{E}_3| = E$).



Mivel az $\boldsymbol{E}_1$ és $\boldsymbol{E}_2$ vektorok azonos nagyságúak, ezért az eredőjük a $-Q$ töltés irányába mutat, nagysága szintén a fent megadott E. Tehát az eredő térerősségvektor nagysága $2E = 5{,}4 \cdot 10^4$ N/C és a $-Q$ töltés felé mutat.

F4*. Egyensúlyi helyzetben a két töltéstől származó Coulomb-erők eredője sugárirányú kell legyen (a félkörív csak sugárirányú kényszererőt képes kifejteni), különben ha lenne tangenciális komponense, akkor abban az irányba el tudna mozdulni. Vonzóerők esetén az ábra mutatja az egyensúlyi helyzetet. (Taszítóerők esetén kifelé mutat az eredő erő.) Thálesz-tétel miatt a két erő merőleges egymásra.



Az **F2.**-es feladat megoldásának megfelelően:

$$\tan\alpha = \frac{\frac{kqQ_2}{(d\sin\alpha)^2}}{\frac{kqQ_1}{(d\cos\alpha)^2}} = \frac{Q_2}{Q_1}\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2,$$

vagyis egyensúlyi helyzetben

$$\tan^3\alpha = \frac{Q_2}{Q_1} \to \alpha \approx 38{,}4°.$$

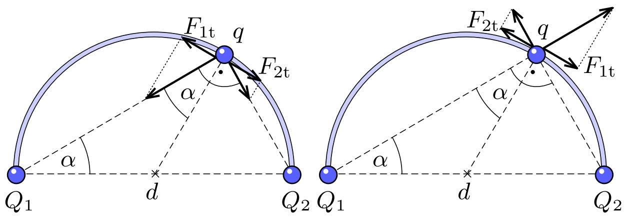
Az egyensúlyi helyzet stabil, ha a q töltést onnan kissé kitérítve, visszakerül az egyensúlyi állapotba, és instabil, ha nem tér vissza. A kitérítés után lesz nemeltűnő tangenciális komponense is az eredő erőnek (a sugárirányban a test nem tud elmozdulni). Mozdítsuk ki a q töltést „felfelé", azaz növeljük az α szöget. A Q_1 töltéstől származó erő érintőirányú komponense:

$$F_{1\mathrm{t}} = \frac{kqQ_1}{(d\cos\alpha)^2}\sin\alpha = \frac{kqQ_1}{d^2}\cdot\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}.$$

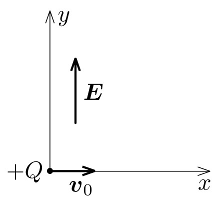
Ez növekszik, ha α helyére az egyensúlyi 38,4°-os szögnél nagyobbat írunk be. A Q_2 töltéstől származó érintőirányú erőkomponens:

$$F_{2\mathrm{t}} = \frac{kqQ_2}{(d\sin\alpha)^2}\cos\alpha = \frac{kqQ_2}{d^2}\cdot\frac{1}{\sin\alpha\tan\alpha},$$

ami viszont csökken, ha $\alpha > 38{,}4°$. Egyensúlyi helyzetben ez a két komponens azonos. Tehát, ha a $q < 0$, akkor kimozdítva a töltést, az eltávolodik az egyensúlyi helyzettől, azaz instabil, ha viszont $q > 0$, akkor visszatér, azaz stabil az egyensúlyi helyzet. Ezeket mutatja az alábbi ábra.



F5*. Az ábrán láthajuk a feladatban leírt elrendezést.



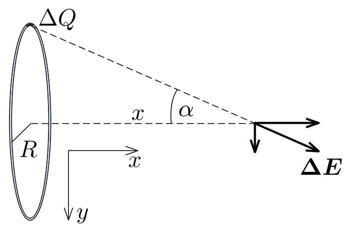
A töltésre csak y-irányú erő hat, aminek nagysága $QE =$ áll., azaz gyorsulása ebben az irányban $a = QE/m$. Mivel nincs x-irányú erő, ezért ebben az irányban nincs gyorsulás, vagyis a töltés ilyen irányú sebessége állandó, azaz v_0. Tehát a vízszintes hajításnak megfelelő mozgást tapasztalunk, azaz a pálya *parabola* lesz:

$$x(t) = v_0 t,$$
$$y(t) = \frac{a}{2}t^2 = \frac{QE}{2m}t^2.$$

Az idő kiküszöbölésével a pálya egyenlete:

$$y(x) = \frac{QE}{2mv_0^2}x^2$$

F6*. *a*) Osszuk fel a gyűrűt ΔQ töltésű kicsiny darabokra. Egy darabkától származó $\boldsymbol{\Delta E}$ térerősségvektort a gyűrű tengelyén, a közepétől x távolságra lévő pontban az ábra mutatja. A teljes térerősséget ezen darabok járulékainak vektori összege adja. Látható, hogy az y-irányú komponensek összege nullát ad, a teljes vektor csak az x-irányú komponensekből származnak, tehát az eredő vektor is ilyen irányú.



Egy darabkától származó térerősségvektor x komponense:

$$\Delta E_x = \frac{k\Delta Q}{x^2+R^2}\cos\alpha = \frac{k\Delta Q x}{(x^2+R^2)^{3/2}},$$

ahol felhasználtuk, hogy $\cos\alpha = x/\sqrt{x^2+R^2}$. A teljes térerősség meghatározásához egyszerűen csak a darabkák töltését kell összeadni, a kifejezés többi tényezője ugyanaz mindegyik darabkára, tehát

$$E(x) = \frac{kQx}{(x^2+R^2)^{3/2}}.$$

b) Ahol a térerősség kifejezésének szélsőértéke van, ott a deriváltja eltűnik:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = 0 \to (x^2+R^2)^{3/2} - x\cdot\frac{3}{2}(x^2+R^2)^{1/2}\cdot 2x = 0.$$

Egyszerűsítések után az $x = R/\sqrt{2}$ megoldást kapjuk. Itt valóban maximális a térerősség, hiszen $x = 0$-ban és $x \to \infty$-re $E = 0$, és máshol nincs lehetséges szélsőérték.

F7*. *a*) Keressük meg az egyensúlyi helyzetet. Jelölje φ_0 az inga fonalának a függőlegessel bezárt szögét ebben a helyzetben. Az **F2.** feladatnak megfelelően:

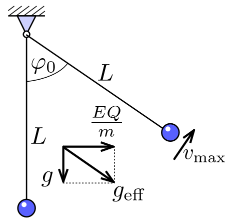
$$\tan\varphi_0 = \frac{EQ}{mg}.$$

Az indulási helyzettől mérve a fonál kitétérése $\varphi_{\max} = 2\varphi_0 \approx 53{,}1°$.

b) A test a legnagyobb sebességét akkor éri el, amikor az egyensúlyi helyzetén halad át. A mozgást úgy is fel lehet fogni, mintha a test az ábrán látható

$$g_{\mathrm{eff}} = \sqrt{g^2 + \left(\frac{EQ}{m}\right)^2}$$

effektív nehézségi gyorsulású térben mozogna.



Ebben felírva a mechanikai energiamegmaradást:

$$mg_{\mathrm{eff}}L(1-\cos\varphi_0) = \frac{1}{2}mv_{\max}^2.$$

Innen a maximális sebesség:

$$v_{\max} = \sqrt{2g_{\mathrm{eff}}L(1-\cos\varphi_0)} \approx 0{,}69\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

F8****.** *a*) Egyensúlyi helyzetben a felső testre:

$$mg = \frac{kQ_1Q_2}{h^2} \to h = \sqrt{\frac{kQ_1Q_2}{mg}}.$$

b) Térítsük ki a felső testet az egyensúlyi helyzetéből felfelé egy kicsiny Δh távolsággal. Mivel az elektromos taszítóerő lecsökken, de a nehézségi erő állandó marad, így a felső gyöngyre visszatérítő erő hat, valóban rezgés alakul ki. A periódusidőt a mozgásegyenlet megadásával kaphatjuk meg. Az eredő erő:

$$\sum F = mg - \frac{kQ_1Q_2}{(h+\Delta h)^2} = mg - \frac{kQ_1Q_2}{h^2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{\Delta h}{h}\right)^2}.$$

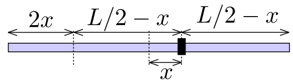
Felhasználva, hogy kicsiny x-re $(1+x)^n \approx 1+nx$

$$\sum F \approx mg - \frac{kQ_1Q_2}{h^2} \cdot \left(1 - 2\frac{\Delta h}{h}\right) = \frac{2kQ_1Q_2}{h^3}\Delta h.$$

Mivel a visszatérítő erő nagysága arányos a kitérés nagyságával, ezért a kialakuló rezgés harmonikus (az arányossági tényező a „rugóállandó"). Tehát a periódusidő:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mh^3}{2kQ_1Q_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{2g}\sqrt{\frac{kQ_1Q_2}{mg}}}.$$

F9****.** Térítsük ki a gyöngyöt kicsiny x távolsággal. Ekkor a gyöngytől jobbra és balra eső $L/2-x$ hosszú részektől származó vonzóerő ugyanakkora és ellentétes irányú, tehát kioltják egymást. A rúd végén fennmaradó $2x$ hosszúságú rész által kifejtett vonzóerő az egyensúlyi helyzetbe igyekszik visszavinni a gyöngyöt.



A visszatérítőerő:

$$F = \frac{kQq}{\left(\frac{L}{2}-x\right)^2},$$

ahol kihasználtuk, hogy x kicsi, ezért a $2x$ hosszúságú rész pontszerűnek tekinthető. Ennek a résznek a töltése $q = 2x\lambda$. Továbbá $x \ll L/2$, így

$$F \approx \frac{kQ \cdot 2\lambda x}{L^2/4} = \frac{8kQ\lambda}{L^2} \cdot x.$$

Az erő arányos a kitéréssel, ezért a periódusidő:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2}{8kQ\lambda}}.$$