

A 15.) feladat

Adott egy egy szabadságfokú rendszer, amelynek a kanonikus változói „q” és „p”. Tekintse a következő transzformációt, ahol az új változókat „Q” és „P” jelöli!

$$Q = \arctg \left\{ \alpha \frac{q}{p} \right\} \quad P = \frac{\alpha q^2}{2} + \frac{p^2}{2\alpha} \quad (, \alpha \text{ ” egy skalár paraméter)}$$

- a.) Írja fel a megadott transzformációra jellemző $\underline{\underline{M}}$ Jacobi determinánst!
- b.) Képezze az $\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{J}}$ szorzatot, ahol a szokásos módon $\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- c.) Képezze az $\underline{\underline{M}}$ mátrix transzponáltját!
- d.) Az eddigiek felhasználásával mutassa meg, hogy a szóban forgó transzformáció kanonikus!

A 16.) feladat

Adott egy egy szabadságfokú rendszer, amelynek a kanonikus változói „q” és „p”. Tekintse a következő transzformációt, ahol az új változókat „Q” és „P” jelöli!

$$Q = \alpha \frac{P}{q} \quad P = \beta q^2$$

- e.) Írja fel a megadott transzformációra jellemző $\underline{\underline{M}}$ Jacobi determinánst!
- f.) Képezze az $\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{J}}$ szorzatot, ahol a szokásos módon $\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- g.) Képezze az $\underline{\underline{M}}$ mátrix transzponáltját!
- h.) Az eddigiek felhasználásával keresse meg, hogy adott „ α ” esetén milyen „ β ”-t kell választani ahhoz, hogy a transzformáció kanonikus legyen?
- g.) **EXTRA gyakorlásra:** Alkalmazza a transzformációt egy harmonikus, lineáris oszcillátorra! Oldja meg a mozgásegyenletet „Q”-változóra! Mutassa meg, hogy a „Q” és „P” ismeretében a q(t) a várt, helyes eredményt adja!

B 22.) feladat

Adott egy két szabadságfokú rendszer, amelynek a kanonikus változói „ q_1, q_2, p_1 és p_2 ”. Tekintse a következő transzformációt, ahol az új változókat „ Q_1, Q_2, P_1 és P_2 ” jelöli!

$$Q_1 = q_1 q_2$$

$$Q_2 = q_1 + q_2$$

$$P_1 = \frac{p_1 - p_2}{q_2 - q_1} + 1$$

$$P_2 = \frac{q_2 p_2 - q_1 p_1}{q_2 - q_1} - (q_1 + q_2)$$

- Írja fel a megadott transzformációra jellemző $\underline{\underline{M}}$ Jacobi determinánst!
- Képezze az $\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{J}}$ szorzatot!
- Képezze az $\underline{\underline{M}}$ mátrix transzponáltját!
- Az eddigiek felhasználásával mutassa meg, hogy a szóban forgó transzformáció kanonikus!

B 23.) feladat

Adott egy egy szabadságfokú rendszer, amelynek a kanonikus változói „ q ” és „ p ”. Tekintse a következő transzformációt, ahol az új változókat „ Q ” és „ P ” jelöli!

$$Q = p + i\alpha q \quad P = \frac{p - i\alpha q}{2i\alpha}$$

Az „ α ” egy skalár paraméter és „ i ” a komplex egység.

- Mutassa meg, hogy a fenti lineáris transzformáció determinánsa „1”!
- Írja fel a megadott transzformációra jellemző $\underline{\underline{M}}$ Jacobi determinánst!
- Képezze az $\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{J}}$ szorzatot!
- Képezze az $\underline{\underline{M}}$ mátrix transzponáltját!
- Az eddigiek felhasználásával mutassa meg, hogy a szóban forgó transzformáció kanonikus!
- EXTRA gyakorlásra:** Alkalmazza a transzformációt egy harmonikus, lineáris oszcillátorra! Oldja meg a mozgásegyenletet! Mutassa meg, hogy a „ Q ” és „ P ” ismeretében a $q(t)$ a várt, helyes eredményt adja!

B 24.) feladat

Adott egy három szabadságfokú rendszer. Az általános koordinátákat és impulzusokat Descartes rendszereben adtuk meg, azaz rendre $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ és $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$.

A rendszer Hamilton függvénye legyen:

$$H = |\mathbf{p}|^n - \frac{\alpha}{|\mathbf{r}|^n} \quad (\text{ahol } \alpha \text{ és } n \text{ valós paraméterek})$$

Valamint adott a következő dinamikai mennyiség:

$$D = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{n} - H \cdot t$$

- a.) Képezze a „D” –nek a $\frac{dD}{dt}$ „teljes időderiváltját”!
- b.) Mutassa meg, hogy „D” a szóban forgó dinamikai rendszer egy mozgásállandója!
-