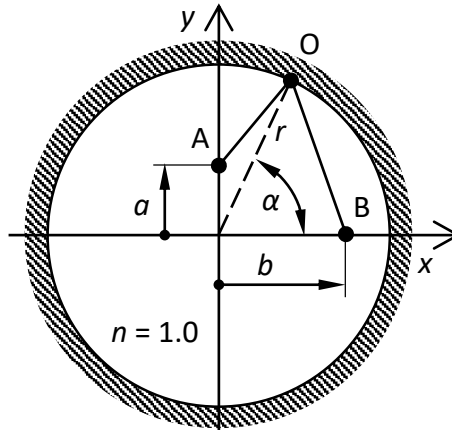


## ZÁRTHELYI DOLGOZAT #1

2019-10-30

### 1. Fermat-elv alkalmazása fényugár pályájának meghatározására

Az ábrán látható, levegővel kitöltött gömbtükörben a Fermat-elv segítségével igazolja, hogy ha  $a = b$ , akkor  $\alpha = 45^\circ$  esetén lesz az AOB szakasz valódi fényugár! **30 p**



$$\begin{aligned}x_o &= r \cos(\alpha) \\y_o &= r \sin(\alpha)\end{aligned}\tag{1}$$

$$AO = \sqrt{r^2 \cos^2(\alpha) + (r \sin(\alpha) - a)^2}\tag{2}$$

$$OB = \sqrt{r^2 \sin^2(\alpha) + (b - r \cos(\alpha))^2}\tag{3}$$

$$OPL = AO + OB\tag{4}$$

$$AO = \sqrt{r^2 \cos^2(\alpha) + r^2 \sin^2(\alpha) - 2ar \sin(\alpha) + a^2} = \sqrt{r^2 - 2ar \sin(\alpha) + a^2}\tag{5}$$

$$OB = \sqrt{r^2 \sin^2(\alpha) + r^2 \cos^2(\alpha) - 2br \cos(\alpha) + b^2} = \sqrt{r^2 - 2br \cos(\alpha) + b^2}\tag{6}$$

$$\frac{dOPL}{d\alpha} = 0\tag{7}$$

$$\frac{1}{2} \frac{-2ar \cos(\alpha)}{\sqrt{r^2 - 2ar \sin(\alpha) + a^2}} + \frac{1}{2} \frac{2br \sin(\alpha)}{\sqrt{r^2 - 2br \cos(\alpha) + b^2}} = 0\tag{8}$$

$$\frac{b \sin(\alpha)}{\sqrt{r^2 - 2br \cos(\alpha) + b^2}} = \frac{a \cos(\alpha)}{\sqrt{r^2 - 2ar \sin(\alpha) + a^2}}\tag{9}$$

$$a = b$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{r^2 - 2ar \cos(\alpha) + a^2}} = \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{r^2 - 2ar \sin(\alpha) + a^2}}\tag{10}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{r^2 - 2ar/\sqrt{2} + a^2}} = \frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{r^2 - 2ar/\sqrt{2} + a^2}}.\tag{11}$$

## 2. Grafit komplex törésmutatójának meghatározása

Essen egy  $\lambda_0 = 550$  nm hullámhosszúságú, lineáris S polarizációjú síkhullám merőlegesen ( $\theta = 0^\circ$ ) levegőből grafit felületre. A felület reflektanciája  $R = 32.16\%$ , a behatolási mélység  $\delta = 58.95$  nm. Mekkora a grafit komplex törésmutatójának valós és képzetes része, azaz  $n = ?$ ,  $\kappa = ?$  A levegő törésmutatóját 1.0-nek tekintjük. Törésmutatóra két érték fog adódni. Döntse el melyik az igazi abból, hogy a visszavert és beeső elektromágneses hullámok közötti fáziskülönbség:  $\Delta\varphi = \arg(\rho) = 160.9^\circ$ . **25 p**

$$\delta = \frac{1}{k_0 \cdot \kappa} = \frac{\lambda_0}{2\pi \cdot \kappa} = \frac{550 \text{ nm}}{2\pi \cdot \kappa} = 58.95 \text{ nm} \rightarrow \kappa = 1.4849 \quad (12)$$

$$\tilde{n} \equiv n - i \cdot \kappa \quad (13)$$

$$R = |\rho|^2 = \left| \frac{1-\tilde{n}}{1+\tilde{n}} \right|^2 = \frac{1-n+i\kappa}{1+n-i\kappa} \cdot \frac{1-n-i\kappa}{1+n+i\kappa} = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2} \quad (14)$$

$$R((n+1)^2 + \kappa^2) = (n-1)^2 + \kappa^2 \quad (15)$$

$$Rn^2 + 2Rn + R + R\kappa^2 = n^2 - 2n + 1 + \kappa^2 \quad (16)$$

$$n^2(R-1) + n(2R+2) + (R-1)(1+\kappa^2) = 0 \quad (17)$$

$$n^2(-0.6784) + n \cdot 2.6432 - 2.1742 = 0 \quad (18)$$

$n_1 = 1.1798$  vagy  $n_2 = 2.7164$ .

$$\rho = \frac{1-\tilde{n}}{1+\tilde{n}} = \frac{1-n+i\kappa}{1+n-i\kappa} \quad (19)$$

$$\rho_1 = \frac{-0.1798+i \cdot 1.4849}{2.1798-i \cdot 1.4849} \rightarrow \Delta\varphi_1 = 131.2^\circ \quad (20)$$

$$\rho_2 = \frac{-1.7164+i \cdot 1.4849}{3.7164-i \cdot 1.4849} \rightarrow \Delta\varphi_2 = 160.9^\circ \quad (21)$$

Tehát a valódi törésmutató:  $n = 2.7164$ .

## 3. Szabadtéri optikai adó-vevő sugárzásának modellezése Gauss-nyalábbal

Egy  $\lambda_0 = 1550$  nm-es hullámhosszúságú telekommunikációs adó-vevő szabadtérben terjedő sugárzását Gauss-nyalábbal közelítjük. A nyaláb sugara  $z = 10$  km távolságban lévő mérési pontnál  $w = 0.5$  m. Mekkora a nyaláb divergenciája ( $\theta_d$ )? Mekkora a nyalábsugár ( $w_0$ ) a nyak pozíciójában (tehát a műszernél)? Mekkora a Rayleigh-tartomány ( $z_R$ )? A számolásoknál kihasználjuk, hogy  $z \gg z_R$ . Az értékek ismeretében jogos ez a közelítés? Az optikai tengelyen mérve hányad részére csökken a nyaláb intenzitása az adóvevő és a mérési pont között, ha a légköri abszorpciótól és szóródástól eltekintünk? **20 p**

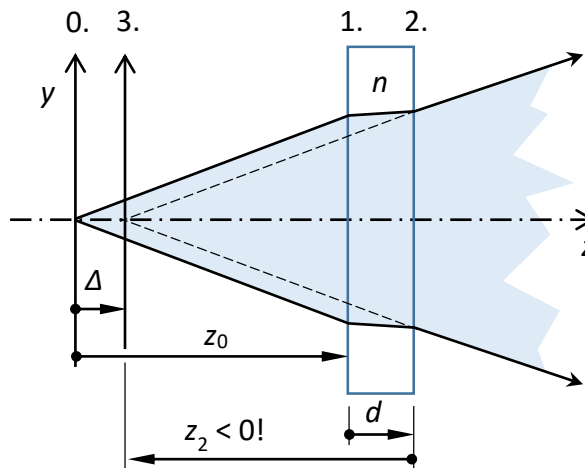
$$\theta_d = \frac{\lambda_0}{\pi w_0} \approx \frac{w}{z} = 0.05 \text{ mrad} \rightarrow w_0 = \frac{\lambda_0}{\pi \theta_d} = \frac{1550 \cdot 10^{-6} \text{ mm}}{\pi \cdot 0.05 \cdot 10^{-3}} = 9.87 \text{ mm} \quad (22)$$

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda_0} = 197.4 \text{ m} \quad (23)$$

$$\frac{I(0)}{I(z)} = \left( \frac{w}{w_0} \right)^2 = 2566. \quad (24)$$

#### 4. Plánparallel üveglemez modellezése paraxiális közelítésben

Egy levegőben lévő ( $n_0 = n_2 = 1.0$ ) plánparallel üveglapot vizsgálunk a geometriai optika paraxiális közelítésében. A 0. sorszámú síkon elhelyezünk egy tárgyat (pl. pontforrást), amit az üveglemezen való kétszeres fénytörés miatt az üveglemez után kissé arrébb,  $\Delta$ -val eltolva érzékelünk. Fejezze ki  $\Delta$  értékét a  $z_0$ ,  $z_2$  és a  $d$  távolságok segítségével! Írja fel az átviteli mátrixot a 0.-ról a 3. felületre. Kihasználva, hogy e két felület között leképezés van, állapítsa meg a képeltolódás mértékét  $n$  és  $d$  függvényében:  $\Delta(n, d) = ?$  Ne felejtse el, hogy a távolságok előjeles mennyiségek! Egy 10 mm vastag, 1.5 törésmutatójú üveglap esetén mekkora  $\Delta$ ? **25 p**



$$\Delta = z_0 + d + z_2 \quad (25)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & z_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & z_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z_0 + d/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & z_0 + \frac{d}{n} + z_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$z_0 + \frac{d}{n} + z_2 = 0 \quad (29)$$

$$\Delta - d + \frac{d}{n} = 0 \quad (30)$$

$$\Delta = d \frac{n-1}{n} = 3.33 \text{ mm} . \quad (31)$$