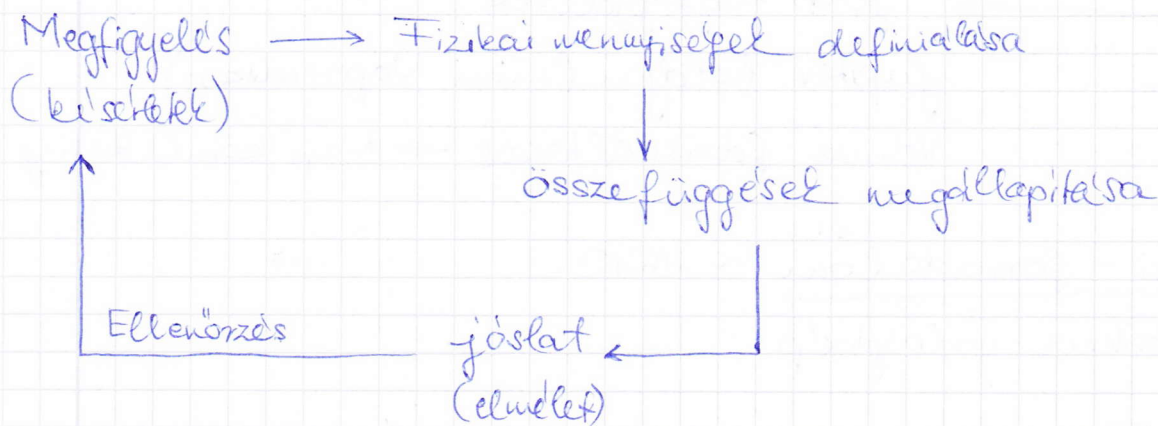


A tudományos megismerés folyamata


sept. 4



- Paradigmaváltások (Thomas Kuhn)
- "nagy ugrás az elméletben"
- Korrespondencia-elv: új elmélet a régi hatareseteket tartalmazza

Példa: tömegvonzás $f \sim e$

Bolygók mozgása → Fiz. menny: év, hónap (szögsebesség)

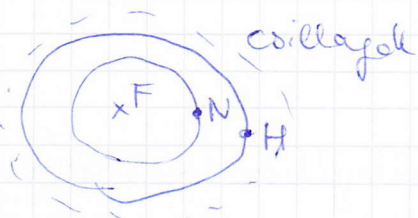

retrográd mozgás

↓

új. Nap, Hold, csillagok
1 nap alatt megkerülik
a Földet

Elmélet

i. e. IV. sz. Ptolemaiosz "Geocentrikus világmép"



Bolygók, pl. Mars



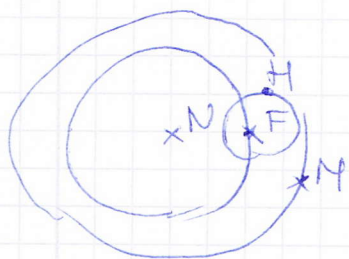
körön mozog
körön mozog

Galilei 1610
televő

→ jobb megfigyelések
Jupiter holdjai (mini Naprendszer)
Venusz fázisváltozás → Nap körül kering

Kopernikuszi - forradalom ~ 1610

Heliocentrikus világmép

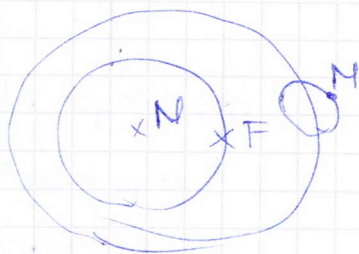


F: forgó a tengellyel körül
Mars: retrográd mozgása kijön

Tycho Brahe 1580-1605

- nagyon pontos megfigyelések
- Mars mozgását nem írja le pontosan a heliocentrikus világmép

↓
Legyen heliocentrikus + körön mozgó kör



Később:
körön mozgó
körön mozgó
kör

Kepler 1609-1616

Brake segédje

Paradigmaváltás: bolygók ellipszis pályákon mozgása

Kepler 10-ek: fenomenológikus öf-ek

↓
Newton 1680: Egyetemes tömegvonzás $t \propto e$: $F \sim \frac{1}{r^2}$

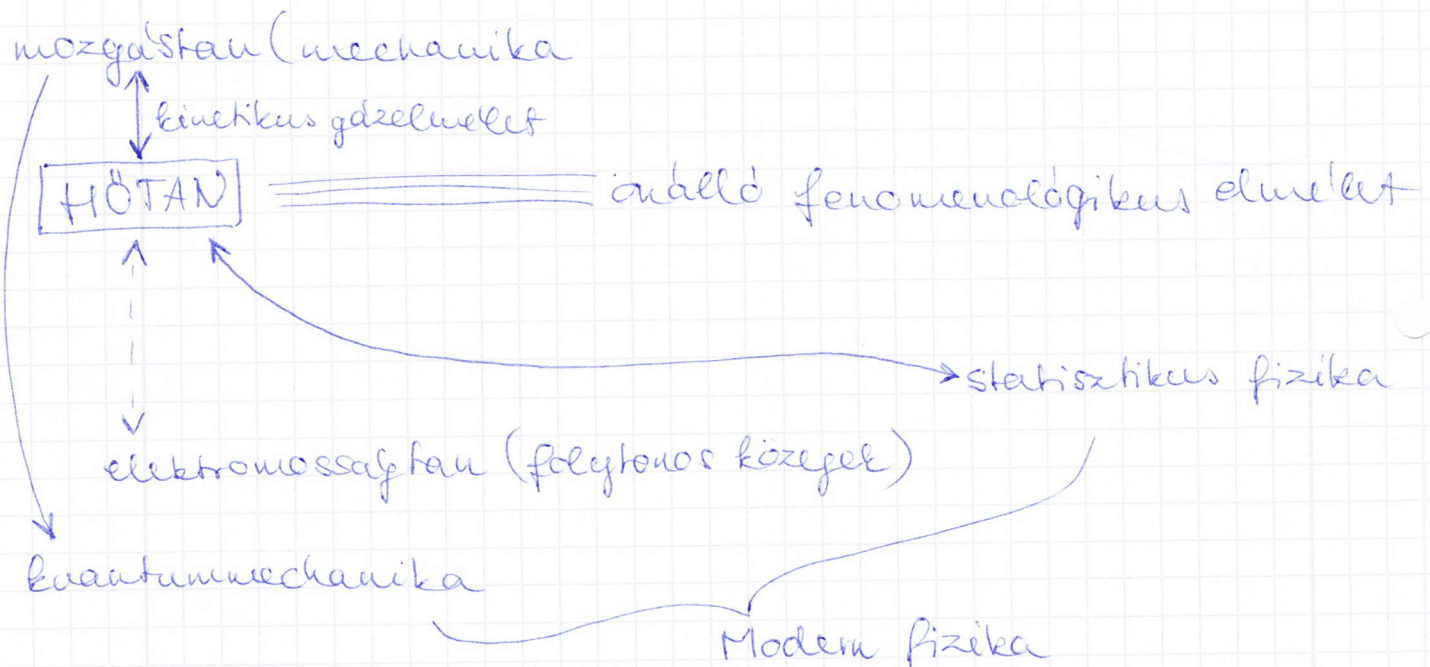
↓
Kepler t -eket visszaadja
korrespondencia-elv!

Hőtan / Termodinamika

Miért tanuljuk:

- fizika fejlődéstörténetében fontos
(pl. energiamegmaradás)
- modern fizikai gondolkodást mutat be
- hétköznapi életben fontos
- kísérleti fizika módszertant bemutatja
- modern koncepciók (entropia)
- műszaki és élettudományokban is visszaköszön
- kellemi fog: statisztikus fizika, szilárdtest fizika

Hőtan helye



Hőtan története

1650. Otto v. Guericke → első vákuumba

↳ cáfolta Arisztotelész (természet inkább a) vákuumtél gondolatát

1656. Robert Boyle: összefüggés a gázok nyomása, térfogata, hőmérséklete között

1679. Denis Papin: kukta (Boyle tanítványa)

1697. Thomas Savery: első gőzgép → kukta biztonsági szelepe mohivalta

1712. Thomas Newcomen: javított gőzgép

1720. Joseph Black: mi a hő? → kalonkum elmélet:

(egyképpen több hibás elmélet)

"a hő egy zérus tömegű anyag"

- fizikai mennyiségek: hőmennyiség, latens hő, fajhő, kalória, hőkapacitás

1798. Count Rumford (I. főtétel felé lépés)

- ágyúcsövek fűrése → hő keletkezik

- mechanikai munka hőt hoz létre

→ kinetikus gázelmélet: hő a részecskék mozgása pontosan: a hő a részecskék mechanikai energiája

(potenciális + mozgási)

1750. J. Watt, J. Black tanítványa

(rossz elmélet → jobb gőzgép)

1824. Sadi Carnot ~~alkotta~~; modern hőtan → II. főtétel

1841. James Joule - Joule kísérlet → I. főtétel

1850. Clausius: kalonkum és kin. gázelmélet ekvivalens,

ha a kalonkum megmaradással az energia megmaradással helyettesítjük

1860. statisztikus fizika

- Maxwell
- Boltzmann (entropia)
- Planck
- Clausius
- Gibbs

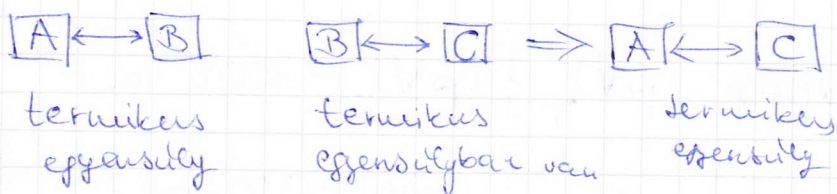
Empirikus hőmérséklet

- hétköznapi fogalom
 - hőmérséklet és hőmennyiség nem azonos
- pl.: meleg melegebb \leftrightarrow meleg vasdarab
"több benne a hő"

Tapasztalatok

- adott környezetben a testek hőmérséklete állandó
- ~~kül~~ érintkező testek hőmérséklete kiegyenlítődik
- testek fizikai jellemzői (hossz, sűrűség, színe) függ a hőmérséklettől

Termikus egyensúly tranzitív Hőtan 0. fejelet



Létezik termikus egyensúly \rightarrow ezért lehet ún. empirikus hőmérsékletet definiálni, és hőmérsékleti skálát megadni

- Ami kell:
- mérendő tulajdonság
 - skála törvény (pl. lineáris mérték)
 - egység
 - nullpont

Pl: Celsius skála - Hg hossza (hőmérőben)

- lineáris skála

- egység: 100°C - szűk gőzzel egyensúlyban lévő víz

$10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$ nyomáson \rightarrow 0°C : olvadó jég víz keverék

↓
 $x(t)$: Hg hossza t hőmérsékleten;

$$t(^{\circ}\text{C}) = \frac{x(t) - x_0}{x_{100} - x_0} \cdot 100 \quad x_0: \text{0}^{\circ}\text{C}-\text{on } x(t)$$

Ideális gázhőmérsékleti skála:

egyszerített gáz.

$$pV = nRT$$

↑
 anyagmenny.

abszolút hőmérséklet (K)

Kelvin

gázállandó $R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{Kmol}}$

• csak ideális gázokra
 (közelítőleg igaz)

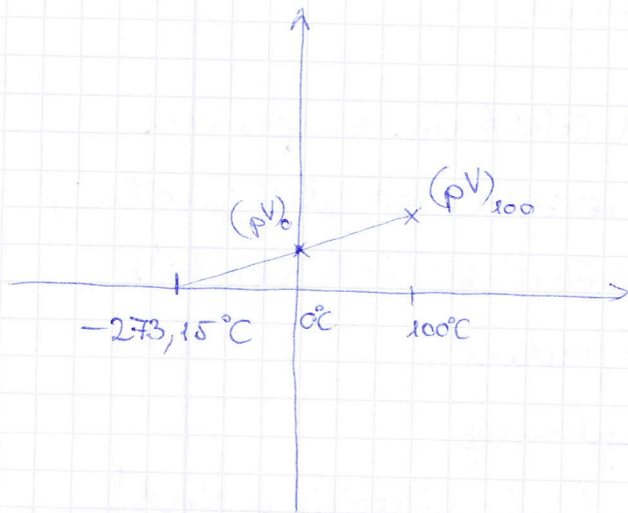
$$R = N_A \cdot k_B$$

↑
 Boltzmann-
 állandó

• szobahőm. körül a légkör közel
 ideális gáz

Legyen a mérhető mennyiség $(pV)_T$; $(pV)_{100}$: 100°C -on

$(pV)_0$: 0°C -on



$$R = \frac{(pV)_{100} - (pV)_0}{100 \cdot n} \text{ mérhető}$$

$$\downarrow$$

$$T_0 = \frac{(pV)_0}{nR}, \quad T_{100} = \frac{(pV)_{100}}{nR}$$

||

$$0^{\circ}\text{C} = 273,15\text{K}; \quad 100^{\circ}\text{C} = 373,15\text{K}$$

átrendezve:

$$T_0 = \frac{(pV)_0}{(pV)_{100} - (pV)_0} \cdot 100 \quad \text{csak mért mennyiségekkel}$$

$$T(\text{K}) = t(^{\circ}\text{C}) + 273,15$$

Diszkusszió: - ideális gáztörvény csak közelítés

- 273,16 K : víz hármasponti hőmérséklete
($p \approx 606 \text{ Pa}$)

- ún. termodinamikai hőmérsékleti skála (II. fokozat)

Szept. 11

Kinetikus közelület

A mérhető (fennmenologikus) mennyiségeket visszavezeti részecskék mozgására.

Feltételei:

- részecskék kis gömbök

átmértő: d , szabad úthossz: l , és $d \ll l$

↓
két ütközés között megtett átlagos út

- minden ütközés rugalmas (mikrorészecskékre rugalmatlan
↳ gerjesztődés)

- nincs megkülönböztetett irány (ter izotrop)

- mozgás rendezetlen

Matematikai kitekötés, részecskék leírása

- 6 dimenziós fázis tér (hely, impulzus vektor)
 \underline{r} \underline{v} (sebesség)
- fázis tér elemi térfogata

$$d\tau \Rightarrow \begin{matrix} [x, x+dx] & [v_x, v_x+dv_x] \\ [y, y+dy] & [v_y, v_y+dv_y] \\ [z, z+dz] & [v_z, v_z+dv_z] \end{matrix}$$

N db részecske van, $d\tau$ -ban dN van

Def: $\frac{dN}{N} = f(\underline{r}, \underline{v}, t) d\tau$ } adott helyen, adott sebességgel
fázis térbeli sűrűség fun. } hány részecske rendelkezik

f kulajdossága:

~~kulajdossága~~

$$\int_{\text{helyes térre}} f(\underline{r}, \underline{v}, t) d\tau = 1$$

helyes térre elemi térfogat

Adott fizikai mennyiség várható értéke, fizikai mennyiség $q(\underline{v}, \underline{r}, t)$ (pl. impulzus $\underline{v}, \underline{r}$)
(átlag értéke)

$$\bar{q} = \int_{\text{teljes}} f(\underline{r}, \underline{v}, t) q(\underline{r}, \underline{v}, t) d\tau$$

pl. $q(\underline{r}, \underline{v}, t) = x$ (x koordináta)

$$\bar{X} = \int f(\underline{r}, \underline{v}, t) x \cdot d\tau$$



↓
átlag (várható érték)

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x \, dx$$

Függő görbe: Gauss: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$

↓
σ: szigma

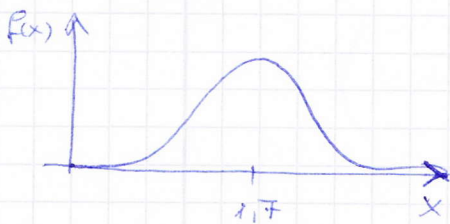
$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x \, dx \quad \text{OK}$$

ú. szórásnégyzet

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x^2 \, dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x \, dx \right]^2$$

Gauss f.:



F(x) eloszlás f.:



$F(x)$: x -nél alacsonyabb felület valószínűsége / N

szórás, szórásnégyzet

pl.: fej vagy irás

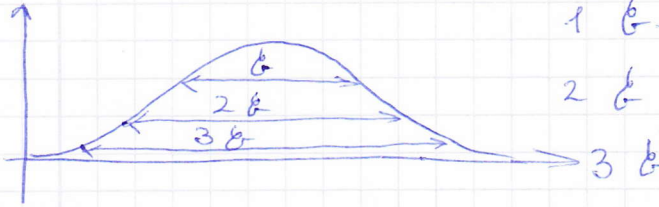
$$x = 0, 1; \quad p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$$

$$\langle x \rangle = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \downarrow$$

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

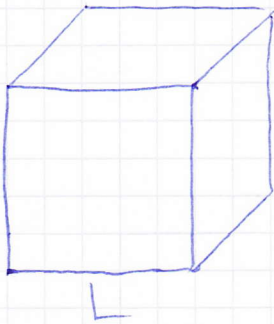
σ jelentése: minélgyorsabban közelít a játék eredménye a statisztikai várakozás (várható érték)

Folytonosnál



1 σ -n belül	~66%
2 σ	95%
3 σ	99%

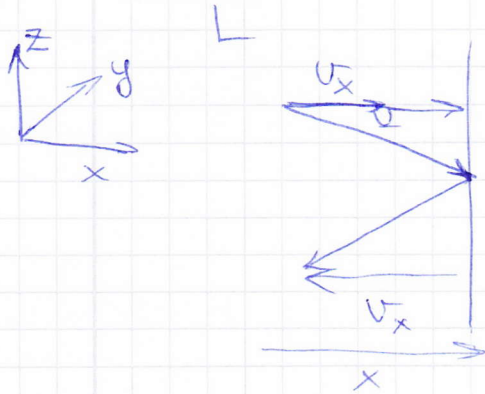
Nyomás értelmezése kinetikus gázelméletben



Érteke $V = L^3$; m_0 : tömegű részecskék

negatív irányú falal;

Δt időintervallum $\Delta t = \frac{2L}{v_x}$, x irányúba eső falal



$$\Delta p_x = 2m_0 v_x$$

falra való erő

$$F_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{2m_0 v_x^2}{2L} = \frac{m_0 v_x^2}{L}$$

csalás
ideje a repülés
időintervallum
közéért
közéért
közéért

impulzusátadás
idejét a repülési
idővel helyettesítjük

Teljes falra való erő:

$$\frac{Nm_0 v_x^2}{L} = N \cdot F$$

nyomás: $p = \frac{NF}{A} = \frac{N}{V} m_0 \overline{v_x^2}$; mozgás izotrop $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$
 mert $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$

$p = \frac{N}{V} \cdot \frac{1}{3} m_0 \overline{v^2}$ átlag v. várható érték

Bevetve $n_V = \frac{N}{V}$ → $p = n_V \cdot \frac{1}{3} m_0 \overline{v^2}$ és egy részecske átlagos mozgás
 részecskezártalom sűrűsége

energiaja:

$\overline{\mathcal{E}_m} = \frac{1}{2} m_0 \overline{v^2}$

Ezzel $p = n_V \cdot \frac{2}{3} \overline{\mathcal{E}_m}$

makroszkopikus mennyiség

mikroszkopikus mennyiség ("első bizonyíték atomokra")

Dalton-törvény és kinetikus gázelmélet
 (parciális nyomások additívak)

$p = \sum p_i = \frac{2}{3} \sum_i n_{V,i} \overline{\mathcal{E}_{m,i}}$

i-edik gázra

Hőmérséklet értelmezése
kinetikus gázelméletben

(ideális gáz)

$$pV = nRT = Nk_B T \quad \text{ahol } k_B: \text{ Boltzmann állandó}$$
$$k_B \approx 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

↑
függ a mértékegység választásától

$$n = \frac{N}{N_A}; \quad N_A \approx 6 \cdot 10^{23} \frac{\text{db}}{\text{mol}}$$

$$[pV] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2 \text{m}^2} \cdot \text{m}^3 = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{J}$$

$$p = \frac{N}{V} \cdot k_B T = n_V \cdot k_B T$$

V.ö. (vesd össze): $p = n_V \cdot \frac{2}{3} \bar{E}_m$

$$\boxed{\bar{E}_m = \frac{3}{2} k_B T}$$

Ekipartíció tetele:

Az egy szabadsági fokra jutó átlagos energia

nagysága: $\boxed{\frac{1}{2} k_B T}$

- Megj: - csak magas hőmérsékleten igaz
- statisztikus fizikából le lesz vezetve
- energia egyenlően oszlik el a szabadsági fokok között
- $\bar{E}_m = \frac{3}{2} k_B T$ kapcsolat mikro- és makroszkopikus között

pl.: Levegőben N_2 molekula sebessége

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{3}{2} k_B T; \quad T = 300 \text{ K}$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{10^{-20} \text{ J}}$$

$$m_0 \approx 3 \cdot 10^{-26}$$

$$v \approx 10^3 \text{ m/s}, \quad \text{pontosabban } \sqrt{v^2} = 520 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



$$\sqrt{\frac{v^2}{v^2}} = 1500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

He-ra

(Azért töltik el a He a légkörrel, mert a naptól kelfűjjük, nem azért mert a mozgási sebessége nagyobb, mint a brük's. sebesség)

Leveret'sben 3-as faktor:

$$\bar{v}^2 = \bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2$$

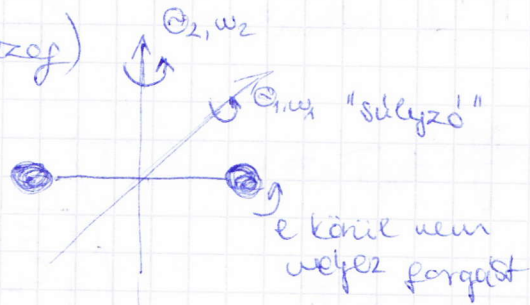
3 irányú transzlációból ered, szabadsági fok $f = 3$

Ezzel ekv. partíció tétel: $\bar{E}_m = \frac{3}{2} k_B T$

pl: egyatomos gáz (pl: He)

2 atomos gáz (foroghat, nem rezeg)

$$E_{\text{forg}} = \frac{1}{2} \Theta \omega_1^2 + \frac{1}{2} \Theta \omega_2^2$$



$$f = 5$$



szabadsági fok a részecské mechanikai energia kifejezésében megjelenő négyzetes tagok száma

Klasszikus gondolat:

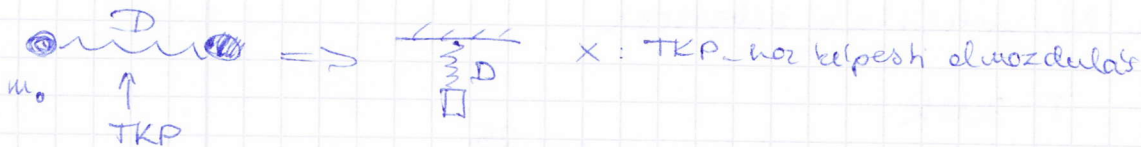
- erre a tengelyre kicsi a Θ (nem tartozik hozzá energia)

Kvantumos állítás

- molekula erre a tengelyre forgás-invariáns

2 atomos gáz: transzláció, rotáció, rezeg $f = 7 = 3 + 2 + 2$

$$E_{\text{rezg}} = \frac{1}{2} D x^2 + \frac{1}{2} \mu v_x^2 \quad \mu: \text{redukált tömeg}$$



transzláció: 1 részecské 3 irányú $f = 3$

2 atomos 2 részecské $6 - 1 \rightarrow f = 5$



↓
 N atomos molekula: $3 \times N$ - kelvezselek + Normálrezgések
 mozgási szabadsági fokok



Belső energia ideális gátra

$$\bar{\epsilon}_{\text{m}} = \frac{f}{2} k_B T ; \text{ teljes energia v. belső energia:}$$

↓
 mechanikai

$$U = N \cdot \bar{\epsilon}_{\text{m}} = N \cdot \frac{f}{2} k_B T$$

Fontos:

$$U = U(T) \text{ csak } T\text{-től függ}$$

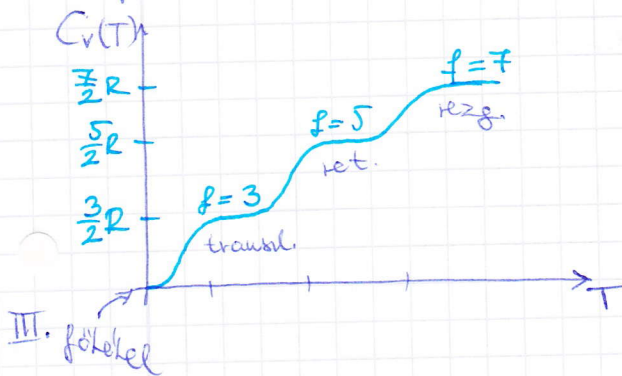
(ideális gáz definíciója)

Fajhőlepcsők:

Uj fogalom ideális gáz molhője: $\frac{1}{n} \cdot \frac{dU(T)}{dT} = C_V =$

2 atomos gázra

$$= N_A \cdot \frac{f}{2} k_B = \frac{f}{2} R$$



pl:

$$C_V(N_2, 300K) = 3,2 R$$

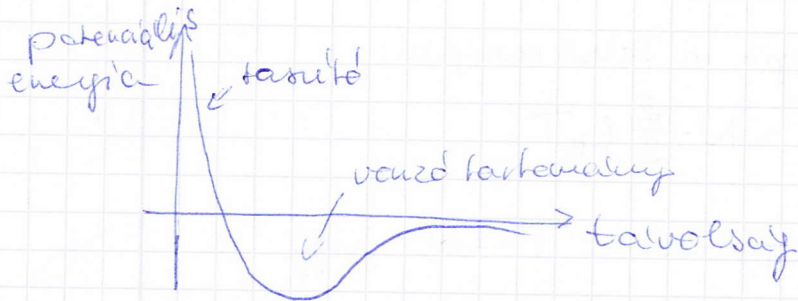
~ transzl. + forg.,
 nem teljesen aktivált a rezgés

Reális gázok, van der Waals gáz (gáz közelítő modell)

vdW 1873, 1910 Nobel

vdW: ideális + 2 empirikus paraméter

- részecskék kiterjedése véges \rightarrow kizárt térfogat
- részecskék között van közh. von. \rightarrow kohézió

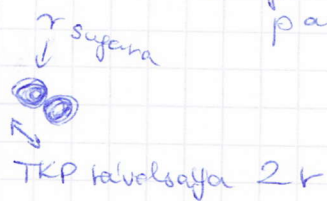


ideális gáz $p = \frac{nRT}{V}$

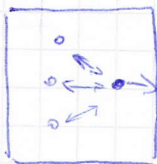
kizárt térfogat $V \rightarrow V - nb$

\uparrow
empirikus paraméter

$$b \approx \frac{(2r)^3 \cdot \frac{4}{3}\pi}{1 \text{ mol}}$$



Igy $p = \frac{nRT}{V - nb}$



kohézió $p = \frac{nRT}{V - nb} - p_{\text{coh}}$

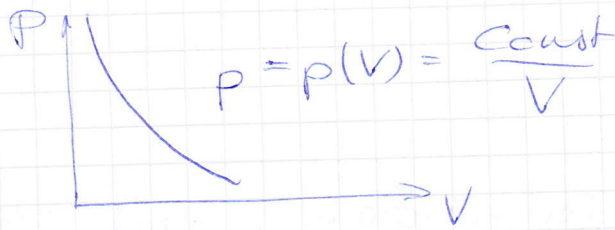
allítás $p_{\text{coh}} = \frac{an^2}{V^2}$; a : empirikus paraméter

$\left(\frac{n}{V}\right)^2$; párkölcsönhatások

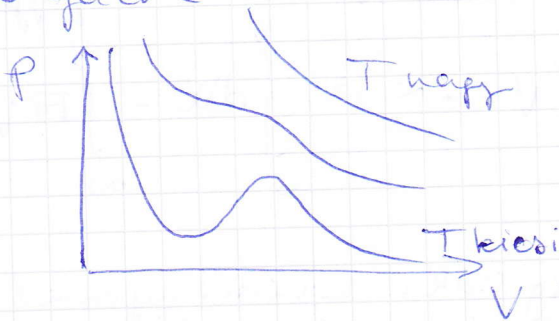
Igy vdW gázok állapotegyenlete:

$$\left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{kohézió}}}{p + \frac{an^2}{V^2}} \right) (V - nb) = nRT$$

Izotermiaik $T = \text{all.}$ $pV = \text{all.}$
 ideális gázra



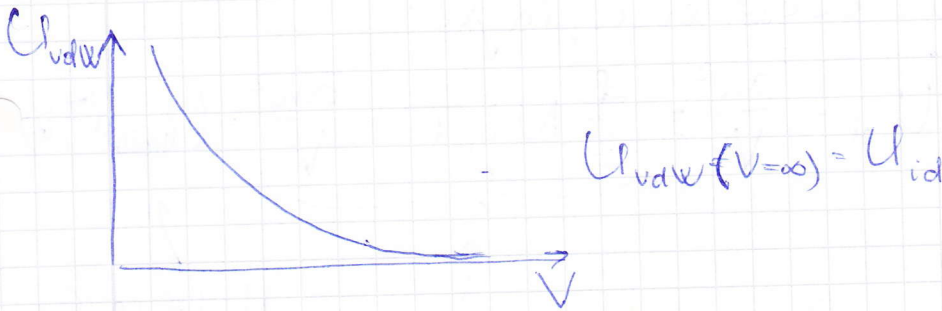
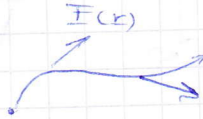
v-dW gázra



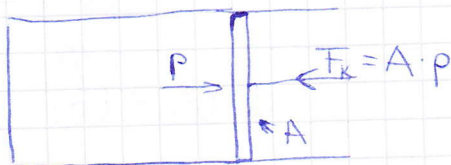
v-dW gáz belső energiája

Munkafélel:

$$W = \int_{\text{út}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



$$U_{\text{vdW}}(V) - U_{\text{vdW}}(V=\infty) = \int_{\infty}^V F(V) \cdot dr$$



$$dW = -F_k \cdot ds = -A \cdot p \cdot ds = -p dV$$

↑
 ideális, súrlódásmentes dugattyú
 $\frac{ds}{\rightarrow}$ pozitív

$dW < 0$, ha
 hűtül $dV > 0$
 $dW > 0$, ha
 összenyomjuk
 $dV < 0$

véges állapotváltozása



$$W = \int_A^B F(x) dx$$



vdW gáz belső energiája, tudjuk ideális gázza $U = U(T)$, V -től nem függ

$$U_{vdW}(V) - U_{vdW}(V \rightarrow \infty) = \int_{\infty}^V dW = \int_{\infty}^V F(V') dV'$$

$U_{vdW}(V \rightarrow \infty) = U_{ideális}$, elég csak a kohéziós nyomás által végzett munkát tekinteni

$$U_{vdW}(V) - U_{id} = - \int_{\infty}^V p_{koh}(V') dV' = \quad p_{koh} = - \frac{an^2}{V^2}$$

$$= -an^2 \int_{\infty}^V \frac{1}{V'^2} dV' = an^2 \cdot \left[-\frac{1}{V'} \right]_{\infty}^V = -\frac{an^2}{V}$$

innen a vdW gáz belső energiája:

$$U_{vdW}(V) = U_{id} - \frac{an^2}{V} = \frac{f}{2} N k_B T - \frac{an^2}{V} = U_{vdW}(T, V)$$

jön: $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V, \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$
 ↑ ↓
 állandó változó

V -től is függ

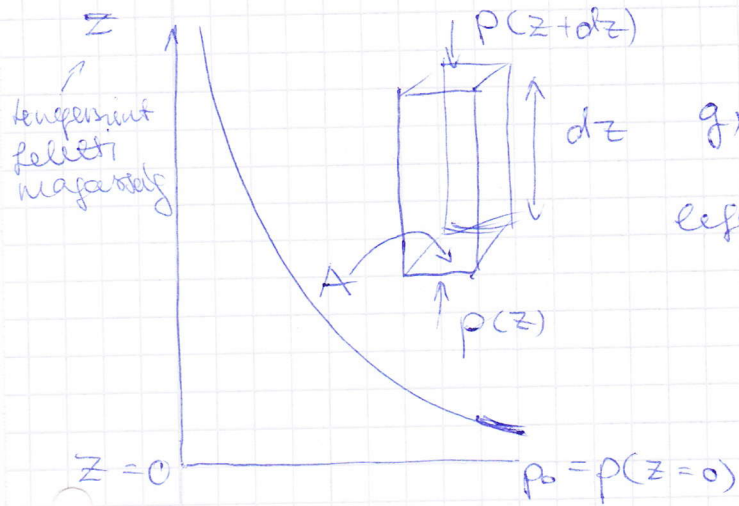
laktól is függ spontán "összeugrik"

feloldás: entropia
 ↓
 rendezetlenség

Barometrikus magasságformula

Szept. 18

- Az atmoszféra izoterm, $T = \text{all.}$ (1 km-ig igaz) duván
- A levegő ideális gáz $pV = \frac{R}{M} T = N k_B T$



$g, g = \frac{m_0 \cdot N}{V}$; m_0 részecskékre N db van V térfogatban
 efelől pontból

$$A \cdot p(z+dz) - A p(z) + A \cdot dz \cdot g \cdot g = 0$$

$$p(z+dz) - p(z) = -dz \cdot g \cdot g$$

$$p(z+dz) = p(z) + dz \cdot \frac{dp}{dz} + o(dz^2)$$

$$dz \cdot \frac{dp}{dz} = -dz \cdot g \cdot g \Rightarrow \frac{dp}{dz} = -g \cdot g$$

$$\left(\frac{\text{kg m}^{-3}}{\text{s}^2 \text{m}^3} = \frac{\text{kg m}^{-3} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

$$g = \text{konst.}; g = \frac{m_0 N}{V} = \frac{m_0 p}{k_B T} \text{ innen } \left\{ \frac{dp}{dz} = - \frac{g m_0}{k_B T} \cdot p \right.$$

$$\frac{N}{V} = \frac{p}{k_B T}$$

$$p(z) = p(z=0) \cdot e^{-\frac{m_0 g z}{k_B T}}$$

Konkrétan $e^{-\frac{m_0 g z}{k_B T}} = \frac{1}{e}$ mikor len?

$$10^{-25} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot z = 10^{-20} \text{ J}$$

$$z = 10^3 \text{ m}$$

↑
barometrikus magasságformula

Vesd össze:
jön ki.

Maxwell-Boltzmann eloszlásnak

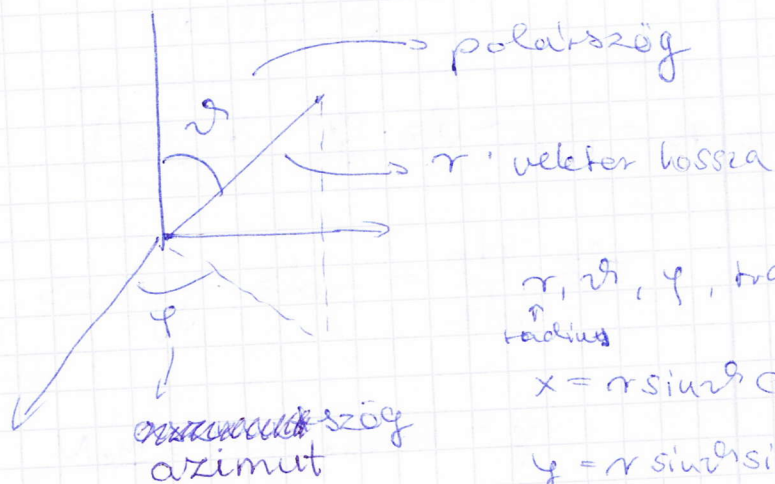
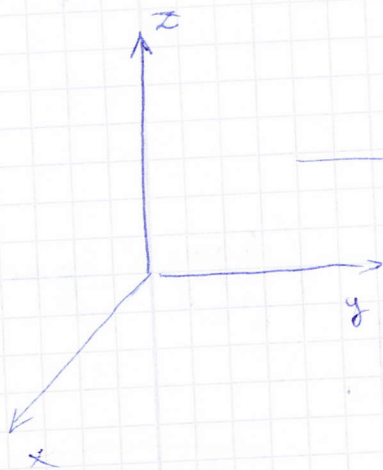
Sűrűség

$$n_v = \frac{p}{k_B T}$$
$$\frac{n}{V}$$

$$n(z) = n(z=0) \cdot e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$$

Részecske áram sűrűsége

Matematikai kitérő:



r, θ, φ , transformáció
↑
radius

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

elemi térfogat:

$$d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

elemi felület $dA = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$

elemi térfogat $dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$

$$\int dx \int dy \int dz = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

R sugarú
gömbön belül

PR:

R sugarú gömb felszíne

$$\int dA = R^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4R^2\pi$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_2 \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{2\pi}$

R sugarú gömbre

gömb térfogata

$$\int dV = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4}{3} R^3 \pi$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{R^3}{3}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_2 \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{2\pi}$

R sugarú gömb

Re'szecke áram sűrűsége:

vektor jelöléssel

$$\vec{j} = \frac{1}{4} n v \cdot \vec{v}$$

$f(v)$: sebesség eloszlás sűrűségfüggvénye

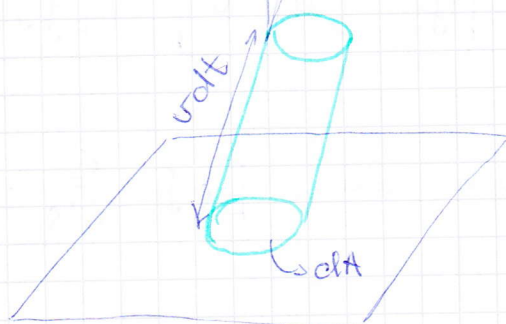
$$dN_{dV, v, v, \varphi} = \frac{dV}{V} \cdot dN_v \cdot \frac{d\Omega_{\theta, \varphi}}{4\pi}$$

olyan részecskék száma, melyek dV térfogatban vannak, adott v sebességgel (intervallumban) mozognak, adott θ, φ irányba mozognak ($d\theta, d\varphi$)

$$dN_v = N \cdot f(v) \cdot dv$$

↑
elemi sebesség-térfogat

↓
olyan részecskék száma, melyekre sebesség $\in [v, v+dv]$



Mennyi részecskét halad át dA -n dt idő alatt?

függőfennel és síggel az adott v-vel hosszúságú körben lévő részecskék száma, melyek θ szöggel jellemzett irányba haladnak



henger térfogata: $dV = dA \cdot v \cdot dt \cdot \cos \alpha$

(*)
$$dN_{dA, dt} = \int dN_{dV, v, \alpha, \rho} \stackrel{\text{def}}{=} j \cdot dA \cdot dt$$

dA felületen
 dt idő alatt
 áthaladó részecskék
 száma

feltétele
 (csak felső
 feliratra)

↑
 def

↑
 a részecskék számát

írjuk be $dN_{dV, v, \alpha, \rho} = \frac{dA \cdot dt \cdot v \cdot \cos \alpha}{V} \cdot N \cdot f(v) dv \cdot \frac{\sin \alpha \cdot d\alpha \cdot d\varphi}{4\pi} =$

$\frac{dV}{V}$ dN_v $\frac{d\Omega_{v, \alpha, \varphi}}{4\pi}$

csoportosítsuk a tagokat

$$= dA \cdot dt \cdot \frac{N}{V} \cdot \underbrace{f(v) \cdot v \cdot dv}_{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} \cdot \frac{1}{4\pi} \underbrace{\cos \alpha \sin \alpha \cdot d\alpha \cdot d\varphi}_{\frac{1}{2} \sin 2\alpha}$$

Beírva (*)

$$dA \cdot dt \cdot \frac{N}{V} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(v) \cdot v \cdot dv \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot d\alpha \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{1}{4\pi} = j \cdot dA \cdot dt$$

n_v \bar{v} $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4\pi}$ $\frac{1}{2}$

↑
 feltétel

↑
 minden
 seleségre

↑
 $\frac{1}{4} \cos 2\alpha \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$

↑
 $\frac{1}{2}$

innen
$$j = \frac{1}{4} n_v \cdot \bar{v}$$
 $[j] = \frac{db}{m^3} \cdot \frac{m}{s} = \frac{db}{m^2 s}$

elektromos áram
$$[j] = \frac{C}{m^2 s} = \frac{A}{m^2}$$

Transzport folyamatok

- Fizikai mennyiségek térbeli eloszlása (inhomogenitása) van,
pl. koncentráció \rightarrow részecskeáramlás (diffúzió)
hőmérséklet \rightarrow hőáramlás
potenciál \rightarrow töltésáram (áram)
Ekkor áramlások lennek

Részecskék mozgása:

2 ütközés között megtett átlagos távolság:
átlagos szabad úthossz: \bar{l}

Részecskék \odot d átmérőjű gömbök



mozgás "esőben" lennie, addig nem ütközik,
amíg $2d$ átmérőjű eső szabadon van.

Ha d t időnként ütközik, kitöltött térfogat = részecskék

$$dV = d^2 \pi \cdot \bar{v} dt \triangleq \underbrace{\sigma}_{\text{haték keresztmetszet}} \bar{v} dt \quad (\text{szigma } \sigma)$$

Ebben a modellben $\sigma = d^2 \pi$ $[\sigma] = m^2$

másfelől a részecskék rendelkezése állandó térf.:
 $dV = \underbrace{\sigma \bar{v} dt}_{\text{mikroszemlély}} = \frac{V}{N} = \frac{f}{n_V}$

ideális gázra $pV = Nk_B T$

$$\frac{V}{N} = \frac{k_B T}{p} \quad \text{tehát}$$

$$\boxed{\sigma \bar{v} dt = \frac{k_B T}{p}}$$

↓ ahova

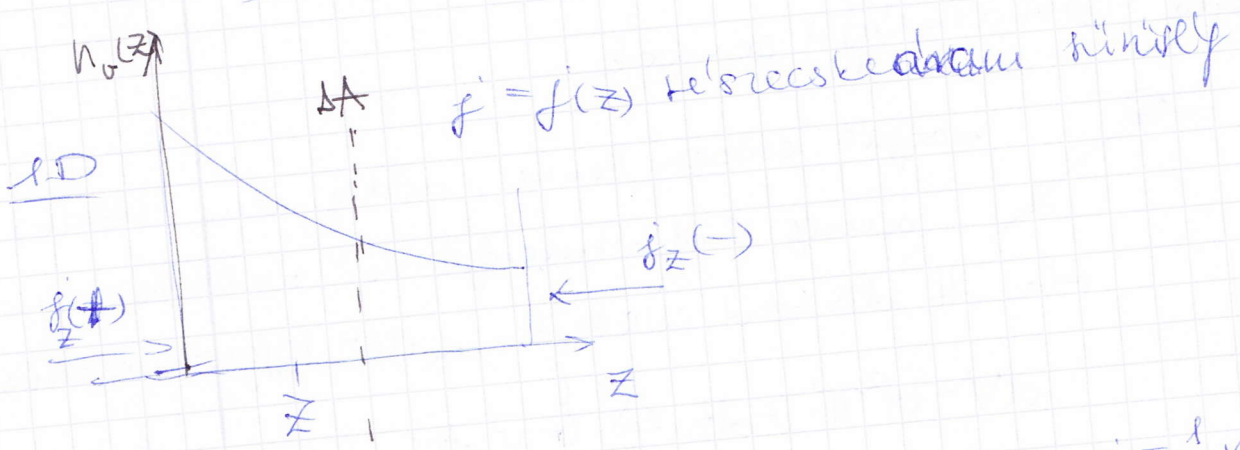
$$\ell \bar{v} = \frac{k_B T}{p} \rightarrow \bar{v} = \frac{k_B T}{p \ell}$$

PE: He-ra, $d = 31 \text{ pm}$

↓
 $\ell \approx 10^{-21} \text{ m}^2$; $p = 1 \text{ mbar} \rightarrow \bar{v} = 1 \text{ mm}$
 ballisztikus mozgás

Diffúzió

szabad úthossz közelítésben



$$j_z^{\text{diff}} = j_z(+)-j_z(-); \text{ tudjuk } j = \frac{1}{4} n_v \bar{v}$$

↑
diffúzió

Belwa

$$j_z^{\text{diff}} = j_z(+)-j_z(-) = \frac{1}{4} \bar{v} [n_v(+)-n_v(-)]$$

innen $n_v(+)$ ~~széles~~ $n_v(+)$ $= n_v(z-\bar{\ell})$ és $n_v(-) = n_v(z+\bar{\ell})$

$$n_v(+)=n_v(z-\bar{\ell})=n_v(z)-\bar{\ell} \frac{dn_v}{dz} + o(\bar{\ell}^2)$$

$$n_v(-)=n_v(z+\bar{\ell})=n_v(z)+\bar{\ell} \frac{dn_v}{dz} + o(\bar{\ell}^2)$$

Fizikai mennyiségek
 $\bar{\ell}$ -nel kisebb méretű skálák
 nem tudnak folytonos
 változani;
 ↑
 szabad úthossz közelítés

↓
innen

$$j_z^{\text{diff}} = \frac{f}{4} \bar{v} \cdot \bar{e} \cdot (-2) \cdot \frac{dn_v}{dz} = - \frac{f}{2} \bar{e} \bar{v} \frac{dn_v}{dz}$$

3D-ban:

$$j_z^{\text{diff}} = - \frac{f}{2} \bar{e} \bar{v} \cdot \nabla n_v$$

diff. mennyiség $D = \frac{f}{2} \bar{v} \bar{e}$ (faktor dimenzió függő)
↑
diffúziós állandó

$$D = \frac{f}{2} \bar{v}^2 \tau$$

Ezzel $j_z^{\text{diff}} = -D \nabla n_v$ Fick-törvény

Használat:

$$\bar{E}_m = \frac{f}{2} m \bar{v}^2 ; \frac{f}{2} k_B T = \bar{E}_m$$

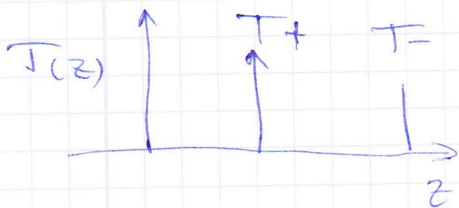
Adott hőmérsékleten \bar{v} függ a részecske tömegétől.

↑
D függ a tömegtől.

↓
Ezt használják ^{235}U és ^{238}U szétválasztására

Hővezetés:

$$\bar{e} = \frac{3}{2} k_B T ; \left(\frac{f}{2} k_B T \right)$$



kijön $\rightarrow j_z^{\text{hő}} = \frac{f \cdot k_B}{8} \cdot n_v \bar{v} (T_+ - T_-) = -2 \bar{e} \frac{dT}{dz}$

$$= - \frac{f k_B}{4} n_v \bar{v} \bar{e} \frac{dT}{dz} \rightarrow j_z^{\text{hő}} = -\lambda \frac{dT}{dz}$$

λ = hővezetési együttható

↓
 anal $\lambda = \frac{fk_B}{\hbar} n_V \bar{v} \ell$

all. 3D-beu

$\boxed{j^{\text{hő}} = -\lambda \nabla T}$ Fourier-formula

Ha minden részecske mozg.

$$\lambda = \frac{fk_B}{G} n_V \bar{v} \ell$$

Elektronok áram:

$$\underline{j} = \sigma \underline{E} = -\sigma \nabla \phi ; \sigma = \frac{ne^2 \tau}{m}$$

dimenzió

$$[j^{\text{diff}}] = \frac{J}{m^2 s} ; [j^{\text{hő}}] = \frac{J}{m^2 s} ; \frac{J}{K} \cdot \frac{1}{m^3} \cdot \frac{m^2}{s} \cdot \frac{K}{m} = \frac{J}{m^2 s} \checkmark$$

$$[j^{\text{el-áram}}] = \frac{C}{m^2 s} = \frac{A}{m^2}$$

szabvány: amit visz!

Maxwell-féle sebességeloszlás

$$\vec{v} = \int f(\vec{v}) \vec{v} d\vec{v}; \quad f(\vec{v}) = ? \text{ Maxwell gondolatmenete alapján}$$

↳ sebességeloszlás sűrűség függvénye

$$f(\vec{v}) = f_1(v_x) \cdot f_2(v_y) \cdot f_3(v_z) = f_1^3 \leftarrow \text{függetlenek a sebességkomponensek egymástól}$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Maxwell feltevése:

f ne v_x -től, hanem v_x^2 -től függjön.

Próba-fv. az $f(v_x) = A e^{-\alpha v_x^2} \leftarrow$ Gauss-fv.

Centrális
Körponti határeloszlás tétele:
Sok véletlen folyamat
összegeként kapott
valószínűségi eloszlás
Gauss-eloszlást követ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}, \quad N(0,1)$$

↓
normal eloszlás
↑
 $\bar{x}=0$ $\sigma=1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1; \quad \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \right]^2$$

Maxwell feltevése:

$$f(\vec{v}) = A^3 e^{-\alpha(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}$$

A és α meghatározása

a def. szerint

$$\overline{v_x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 A e^{-\alpha v_x^2} dx$$

akkor igaz,

$$\text{ha } A = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{v_x^2}} \text{ és}$$

$$\alpha = \frac{\rho}{2} \frac{\rho}{v_x^2}$$

29

Tudjuk: $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \sigma^2 = \overline{x^2}$

enne $\bar{x} = 0$

Innen a helyes $f_1(v_x)$ -re: $f_1(v_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{m_0}{2k_B T}}} e^{-\frac{1}{2} \frac{v_x^2}{\frac{m_0}{2k_B T}}}$

Ekipartíció $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$ és $\overline{E_m} = \frac{1}{2} m_0 \overline{v^2} = \frac{3}{2} k_B T \rightarrow \overline{v_x^2} = \frac{k_B T}{m_0}$

↑
izotrop mozgás

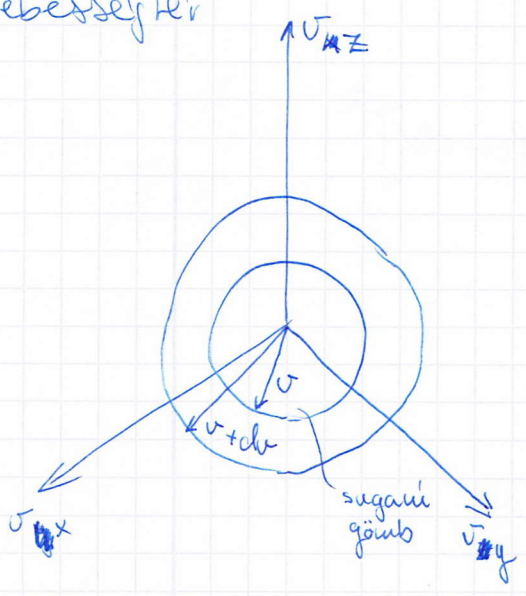
összefoglalva:

$$f(v) = f_1^3(v_x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{m_0}{k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{v^2 m_0}{k_B T}} = \left(\frac{m_0}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2k_B T}}$$

Y.ö.: barom. maxwell-forma
 $p = p_0 \cdot e^{-\frac{mgh}{k_B T}}$
 $e^{-\frac{E_m}{k_B T}}$

$f(v)$ sűrűségfüggvény ismertük!

sebességfelület



Hány részecské van egy $[v, v+dv]$ intervalumban?

Gömbfelület feljegyzése: $4\pi v^2 \cdot dv$

Ebben lévő részecskék száma: $N \cdot 4\pi v^2 \cdot dv$ bevetjük

$dN = N \cdot 4\pi v^2 \cdot dv \cdot f(v) = N F(v) dv$

ahol

$$F(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$$

$F(v)$ tulajdonságai:

$$\bar{v} = \langle v \rangle = \int_0^{\infty} v F(v) dv = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_0}}$$



$$\downarrow \\ \overline{v^2} = \langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 F(v) dv = \frac{3k_B T}{m_0}$$

Gyakorlatok: - sebességeloszlás mérése
(Stem kísérlet, Lammert kísérlet)

Diskusszió:

átlagssebesség $\sim \sqrt{T}$ } Két külön helyen
átlagból való értékesítés $\sim \sqrt{T}$ } is T jelenik meg

szept. 25

Fenomenológikus termodinamika

(leíró követés)

Fizikai mennyiségek:

Extenzív: • függ a rendszer méretétől

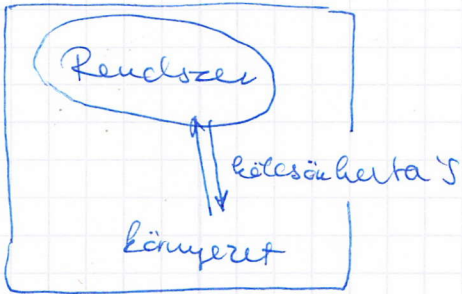
(alrendszerek összeadásakor összeadódik - additív)

• pl.: V, n, S
↑ anyagm. ↖ entropia

Intenzív: • nem függenek a rendszer méretétől

(alrendszerek összeadásakor kiegyenlítődnek)

• pl.: p, μ, T
↑ kémiai potenciál



Egyensúly: a rendszerre jellemző fizikai mennyiségek

térben és időben állandóak

↓ ↓
homogén stacionárius

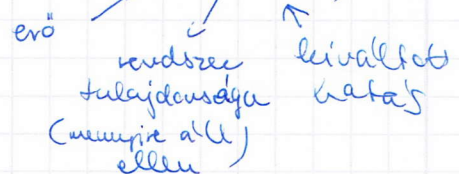
A O. főtétel: a rendszert magára hagyva eléri az egyensúlyt \Leftrightarrow létezik egyensúly

Allapotjelzők: az egyensúlyt jellemző fizikai mennyiségek

Kölcsönhatás: az intenzív mennyiségek különbözősége hajtja az extenzív mennyiség megváltozását

(analógia: "termodinamikai erő" $F = ma$)

pl.: mechanikai kcsk.:



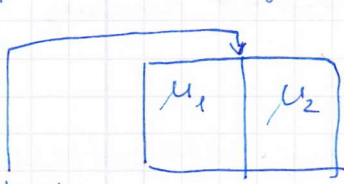
$V_1 \rightarrow V_1'$
 $V_2 \rightarrow V_2'$ } megváltoztak

pl: termikus kcsk.



$h\ddot{o}$ (entropia) ment át

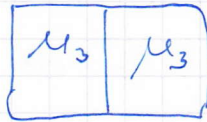
pl. anyagi kcsk:



kelési potenciál

$\mu \sim$ anyagja - koncentráció (sejtek)

membrán,
visszatérő
áramlathatóság



közben részecskeáramlás volt

kölcsönhatás	intenzív	extenzív	szigetelés (a kcsk. ellen)
mechanikai	p	V	merev fal
termikus	T	S ($\frac{J}{K}$)	hőszigetelő fal
anyagi	μ	n	anyagáramlást gátló fal
elektrosztatikus	U el-potenciál	q töltés	elektrosztatikus kcsk. - + akadályozó fal
elektromos dipól	E el-tervesség	p dipólmomentum	elektromosan szigetelő fal
mágneses dipól kcsk.	B mágneses indukció	mágneses dipólus momentum	mágnesesen átható fal
dimenziók:			

$$1. \frac{kgm}{s^2m^2} \cdot m^3 = \frac{kgm^2}{s^2} = J$$

$$2. J, [S] = \frac{J}{K}$$

$$3. \frac{J}{mol} = \frac{J}{mol}; [u] = udc \rightarrow [un] = J$$

$$4. V \cdot A \cdot s = J$$

$$5. [E] = \frac{V}{m} \quad [p] = A \cdot s \cdot m \rightarrow [E \cdot p] = J$$

$$6. [B] = \frac{Vs}{m^2};$$

mágneserősség

$$M = \frac{E_0 u}{V}; B = \mu_0 (H + M)$$

$$pc.: \frac{S}{n} = S_M: \text{molekulás entropia} \\ (\text{1 mol anyag entropia})$$

$$V_M = \frac{V}{n}$$

Alapfogalmak:

- Zárt rendszer: nem van közt kcsk-ban
- Allotás: általában kcsk-ban van közt egy rendszer, annyi isor 2 állapotjelzője lehet.

A tapasztalat szerint elég ismeri annyi extenziót ahogy kcsk. van + 1 db intenziót!

pl: termikus + mechanikai \rightarrow 3db független állapotjelző létezik

Túlhatalozott a probléma \rightarrow lesz összefüggés az állapotjelzők között!

pl: $pV = \text{all.}$

pl: mechanikai + termikus:

egyesített gáztörvény: $pV = \underbrace{nRT}_{\text{konstans, ha } n = \text{all.}}$

Általában léteznek ún. állapotegyenletek állapotjelzők közötti öf.

$\Rightarrow f(p, V, T, S, n, \dots) = 0$ pl: $\boxed{pV - nRT = 0}$
2db állapotegyenlet

• Folyamat: állapotjelzők megváltozása

\rightarrow kvázistatikus folyamat: egyensúlyi állapotokon keresztül zajlik
(lassan)

\downarrow
ekkor lehet állapotjelzőkkel jellemezni,

pl: $p-V$ diagram

\rightarrow reverzibilis folyamat: a külső hatásokat megfordítva a rendszer

kiinduló állapotba jut vissza

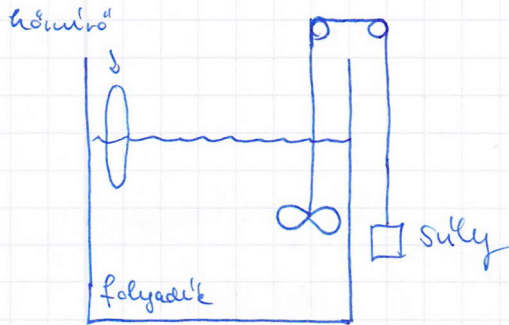
(jd közelítés, valóságban nem létezik)

Hőtan I. főtétele

A tapasztalat szerint a mechanikai munka hővé alakul.
(Fordítva nem! ← II. főtétele)

Energiamegmaradás tétele (mechanikai és termikus kölcsönös)

Joule - kísérlet



mozgás → forgatja a propellert
a "hőmég munkát végez" (grav. tér)
→ hőmérséklet megváltozik

pl: 1 kg víz, $h = 1 \text{ m}$ elmozdulás,
1 kg test, $mgh = 10 \text{ J} = \Delta E_{\text{pot}} = W_{\text{grav}}$
 $c_{\text{v2}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \rightarrow \Delta T = \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{m \cdot c_{\text{v2}}} = 2 \text{ mK}$

A rendszer 2 állapota közti átmenethez mindig ugyanannyi mechanikai munkát kell végezni, analóg a nyomatékkal.

Az analógia alapján definiálható az ún. belső energia

(= előbb = termodinamikai potenciál)

jelle: U , ez is állapotjelző (extenzív)

$\Delta U_{AB} = U_B - U_A$ ez független a többi áll. jelzőtől $U = U(T, V, p, n, \dots)$

pl: id. gázra $U = U(T)$

vdW' $U = U(T, V)$

A tapasztalat szerint a belső energiát hőközléssel is megváltoztathatjuk. (Valójában ez is mechanikai kölcsönös)



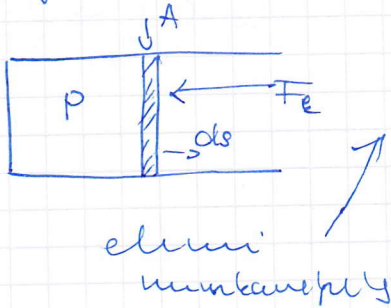
További inwa:

$$dU = \delta W + \delta Q \rightarrow \delta Q = dU - \delta W$$

in. adiabatikus
(izentropikus)
folyamat: $\delta Q = 0$
 $dU = \delta W$

Munkavégzés foglaltai:

mechanikai



$$\delta W = -F_e \cdot ds = -p A ds = -p dV$$

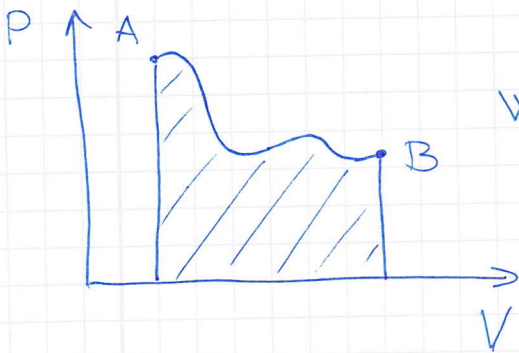
(< 0 ha $dV > 0 \rightarrow$ tágul a gáz)

ha gáz tágul $\delta W < 0 \rightarrow$ gáz végez munkát

ha gáz összenyomódik $\delta W > 0$

\hookrightarrow mi végeztük munkát

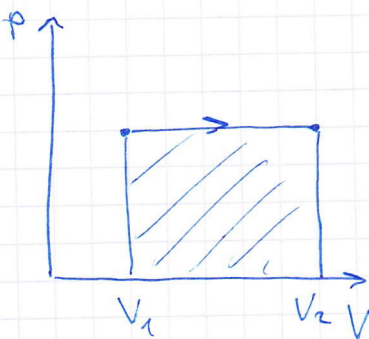
Macroscopikus folyamatra



$$W = \int_A^B \delta W = - \int_A^B p(V) dV \leftarrow \text{görbe alatti előjeles terület} \cdot (-1)$$

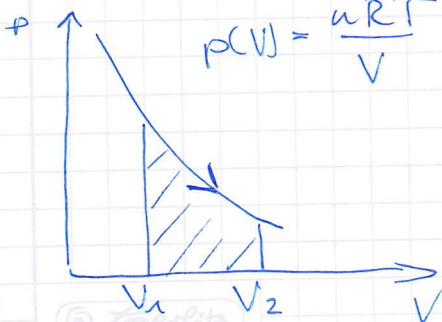
pl:

izoterm



$$W = -p(V_2 - V_1) < 0 \text{ ha } V_2 > V_1$$

pl: izoterm



$$p(V) = \frac{nRT}{V}$$

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \frac{V_2}{V_1};$$

ha $V_2 > V_1 \rightarrow W < 0 \rightarrow$ tágul

ha $V_2 < V_1 \rightarrow W > 0$

\uparrow
összenyomódik

általánosított munkavégzés:

pl. anyag

$$\delta W = \underbrace{\mu}_{\text{int}} d\underbrace{n}_{\text{ext}}$$

vagy elektrosztat

$$\delta W = \underbrace{\varphi}_{Q=C\varphi} dq$$

$$Q = C\varphi \rightarrow \frac{1}{2} C\varphi^2$$

általában

$$\delta W = \underbrace{X}_{\text{intenzív}} \cdot d\underbrace{\xi}_{\text{extenzív}}$$

10.02.

$$dU = \delta W + \delta Q$$

Egyszerű lupis kísérlet:

1. $\delta W \rightarrow U$ megnöveked (T nagyobb)

2. valamilyen $-\delta Q$ - hő ad le

3. kiderítve \rightarrow munkát végez $-\delta W$

$\hookrightarrow U$ lecsökken! $\rightarrow T$ csökken

(a munkavégzéshez szükséges energiát nem tudja a környezetből elvenni \rightarrow akkor hirtelen gyors a folyamat - így a belső energiából veszi el az energiát)

Térfogati munka:

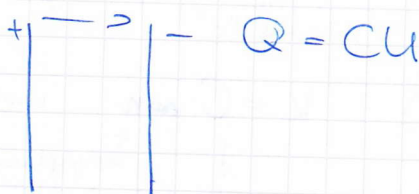
$$\delta W = -p dV$$

Anyagi munka:

$$\delta W = \mu dn$$

Elektrosztatikus:

$$\delta W = \varphi dq$$



Általánosított munkavégzés:

$$\delta W = X_i d\xi_i \quad (i\text{-edik})$$

↑ intenzív ↑ extenzív

összegezve:
$$\delta W = \sum_i X_i d\xi_i$$

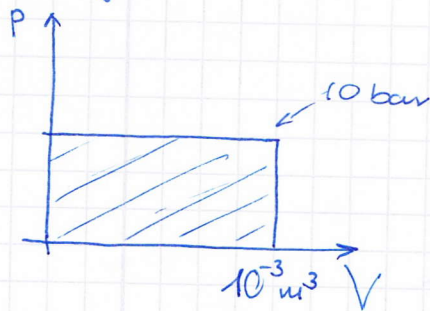
Első főtétel:
$$dU = \delta Q + \sum_i X_i d\xi_i$$

pl:
$$dU = \delta Q - p dV + \mu dn + \varphi dq + B dm + \dots$$

$\frac{Vs}{m^2} \cdot \Delta m^2$ ↑ dipólusok
terme

Gyakorlati példa

térfogati munka:



$$W = 10 \text{ bar} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 10^3 \text{ J} \\ 10^6 \text{ Pa}$$

1 fordulat alatt

$$f = 50 \text{ Hz} \rightarrow \text{teljesítmény} = 50 \text{ kW} \approx 70 \text{ LE}$$

Tapasztalati hő

Tapasztalat szerint egy testtel közötti hő arányos a test hőmérséklet-változással. (J Black).

$$\underbrace{\delta Q}_{\text{közötti hő}} = K dT \quad ; \quad K = c \cdot m \quad \text{ez a fajhő} \quad [c] = \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$$

↑
hőkapacitás
(adott testre)

↓
kis "c"
↑
test tömege

$$K = C \cdot n \quad \text{molhő} \quad [C] = \frac{\text{J}}{\text{molK}}$$

↓
nagy "C"
↑
anyagmenny.

C-k folyamatfüggőek, mert δQ is!

izobár $\delta Q_p \rightarrow C_p$

izochor $\delta Q_v \rightarrow C_v$

1. $V = \text{dill.}$ I. főtétel: $dU = dQ - p dV \rightarrow \delta W = 0 \rightarrow dU = \delta Q = n C_v dT$

$$\rightarrow dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV$$

↑
külve
(U(T,V))

↑
ez is itt!

innen $C_v = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \leftarrow$ (1. tanult) mérhető fizikai mennyiség

↓
 Legyen $V = V(p, T)$ felírtem, miért p és T fo-e!

$$dV = \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T}_{\text{izobár}} dp + \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}_{\text{izoterm}} dT$$

↑
 maték

$$\rightarrow dV_p = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT; \quad dV \leftrightarrow dT \text{ kapcsolata}$$

$$\text{Innen } (C_p - C_v) dT = \frac{1}{n} \left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \right] \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \cdot dT$$

$$\boxed{C_p - C_v = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \right]}$$

Új fizikai mennyiség:

$$\beta_p = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \text{ izobár hőtágulási együttható}$$

$$\text{Jön még: } \kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \text{ izoterm kompresszibilitás}$$

↑
 kappa

Ezzel

$$C_p - C_v = \frac{1}{n} \cdot \beta_p \cdot V \cdot \left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \right]$$

↑
 jön és $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ is jön!

Ideális gázra

$$pV = nRT \text{ és } U = U(T) = \frac{f}{2} nRT$$

$$\left. \begin{aligned} dU_v &= nC_v dT \\ dU_p &= nC_p dT - p dV \end{aligned} \right\} C_v = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v = \frac{f}{2} R$$

ha a ki't állapotváltozásban dT azonos,

akkor $dU_p = dU_v$. Innen:

$$nC_v dT = nC_p dT - p dV = nC_p dT - nR dT$$

$$dV = \frac{nR dT}{p}$$

↑
 $na \ p = dk.$



$$\boxed{C_p - C_v = R} \rightarrow \text{innen } \boxed{C_p = \frac{f+2}{2} R}$$

Az általános képletből:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0 \text{ mert csak } U = U(T)!$$

$$\beta_p = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \rightarrow \text{all. állapot. } V = \frac{nRT}{p} \rightarrow \beta_p = \frac{p}{nRT} \cdot \frac{nR}{p} = \frac{1}{T}$$

$$\text{innen: } \boxed{C_p - C_v = \frac{1}{n} \cdot \frac{p}{T} \cdot V \cdot p = \frac{pV}{nT} = R}$$

fajhő - hatványadós
egyjitható

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} > 1 \text{ ideális gázra } \gamma = \frac{f+2}{f}$$

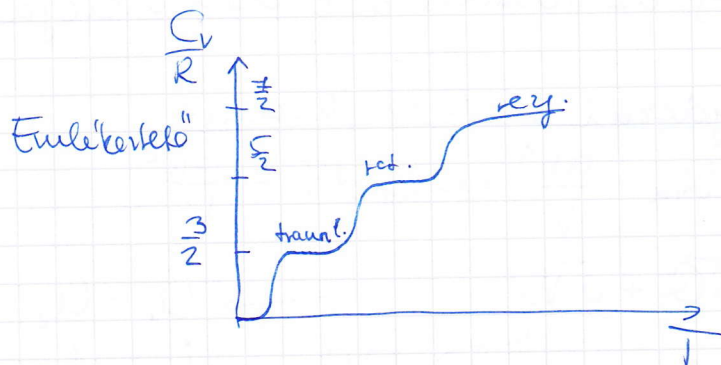
Pe:

	$\frac{C_v}{R}$	$\frac{C_p}{R}$
H ₂	2,43	3,46
CO	2,43	
N ₂	2,39	3,5
Br ₂	3,39	

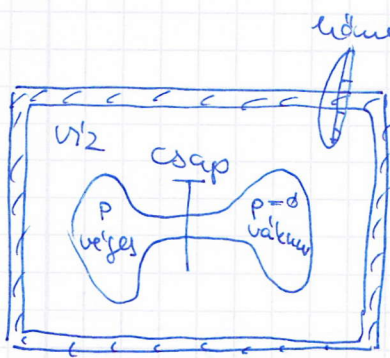
← időbaki.

$$\frac{C_v}{R} = \frac{f}{2}; \text{ H}_2 \text{ forgó, nem rezeg!}$$

Br₂ forgó és rezeg is!



Gay-Lussac kísérlet



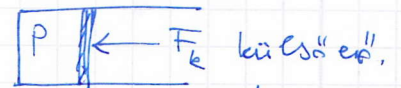
hőszigetelő edény

1. csapot kinyitjuk
2. tapasztalat szerint fürdő hőmérséklete nem változik

$$dU = \delta Q + \delta W$$

↙
hőközlés
nincs

↓
munkavégzés
nincs



↓
Ma vákumba
hajul: nincs
munkavégzés

Teljesít $dU = 0$: $U = \text{állandó DE!}$

↓
 p, V változik, $T = \text{áll}$



U csak T -től függ! $U = U(T)$

Ez az ideális gáz koncepciójához alapja. Pontosabban elvegezve a kísérletet nem igaz. Ez "szerencsés mérési hiba", mert a víz hőkapacitása nagy, ezért ΔT kicsi.

$U = U(T)$ az ideális gáz definíciója

Valódi gázzal a G-L kísérlet

$$U_{\text{vdW}} = U_{\text{id}} - \frac{an^2}{V} = nC_V dT - \frac{an^2}{V}$$

$$dU = \delta Q + \delta W$$

↓
nincs hőközlés
gyorsan hajul (ld. "lufi")
adiabathikus folyamat

↘ $\delta W = 0$

→ $U_1 = U_2$ közben $V_1 \rightarrow V_2$ -re hajul

↑
nyomás
előtt

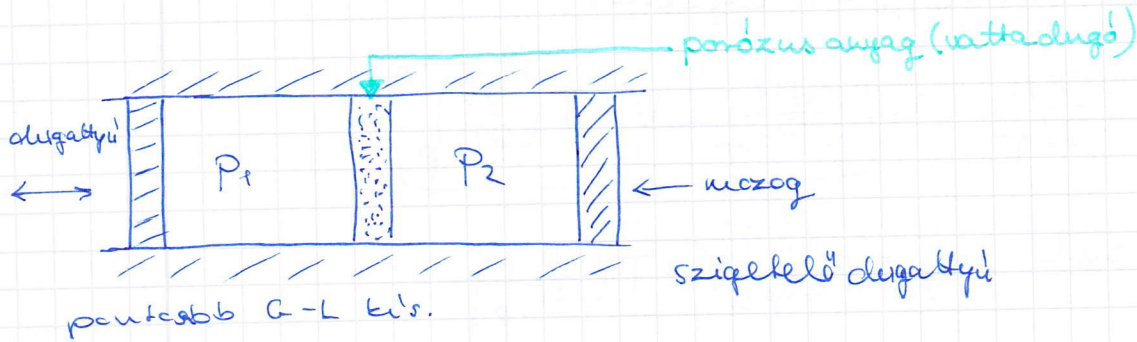
$$nC_V T_1 - \frac{an^2}{V_1} = nC_V T_2 - \frac{an^2}{V_2}$$

$$T_2 - T_1 = \frac{an^2}{nC_V} \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) < 0 \Rightarrow T_2 < T_1$$

lehit!

Joule-Thomson kísérlet/effektus

(Lord Kelvin)



J-T kísérlet: dugattyút lassan mozogtat: p_1 és $p_2 = \text{all.}$
és $p_1 \neq p_2$

Nincs átközlés $dU_1 = -p_1 dV_1$ (baloldal)

A: kezdeti állapot

B: végállapot

$$U_B - U_A = - \int_{V_1}^0 p_1 dV - \int_0^{V_2} p_2 dV = p_1 V_1 - p_2 V_2 = \Delta U$$

balold. $V_1 \rightarrow 0$

jobbold. $0 \rightarrow V_2$

belső energia megvált.
nem ϕ

átrendezve:

$$\underbrace{U_{\text{veg}} + p_2 V_2}_{H_{\text{veg}}} = \underbrace{U_{\text{kezdeti}} + p_1 V_1}_{H_{\text{kezdeti}}} \quad \text{de } U_{\text{nem!}}$$

Legyen $H = H(p, T)$ és $dH = \phi$

$$dH = \phi = \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p}_{\text{"nagyk"} \quad nC_p} dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp$$

Joule-Thomson együttható

$$\mu_{J-T} \stackrel{\text{def.}}{\Delta} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H \quad \text{és} \quad nC_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp = \phi \quad \text{ha } H = \text{all.}$$

$$\mu_{J-T} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = - \frac{1}{nC_p} \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T$$

jelentése:

$\mu_{J-T} > 0 \rightarrow$ ha p csökke.
T is csökke.

$\mu_{J-T} < 0 \rightarrow$ ha p csökke
T nő



Idealis gázra:

$$U = U(T) \text{ és } H = H(T) \rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = 0 \rightarrow \mu_{JT} = 0;$$

Idealis gázra nincs J-T effektus!

Azonosság (jön) $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ jön. $\boxed{\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}$

ezzel $\mu_{JT} = -\frac{1}{nC_p} \left[V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \right]$

vdW gázra!

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

implicit deriválás
 $\frac{\partial}{\partial T}$ és $p = \text{all.}$

$$\underbrace{\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)}_{\frac{nRT}{V-nb}} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - \frac{2an^2}{V^3} \underbrace{(V-nb)}_{\frac{nRT}{p + \frac{an^2}{V^2}}} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = nR$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{nR}{\frac{nRT}{V-nb} - \frac{2an^2}{V^3} (V-nb)} = \frac{nRV^3(V-nb)}{nRTV^3 - 2an^2(V-nb)^2}$$

sorfejtés

$$= \frac{nRV^3(V-nb)}{nRTV^3 \left(1 - \frac{2an^2(V-nb)^2}{nRTV^3}\right)} \approx \frac{(V-nb)}{T} \left(1 + \frac{2an^2(V-nb)^2}{nRTV^3}\right) \approx$$

na $V \gg nb$

vezető tag
amiben
b ott van

$$\approx \frac{V-nb}{T} \left(1 + \frac{2an^2}{nRTV}\right)$$



$$\frac{2au^2(V-ub)^2}{uRTV^3} = \frac{2au^2}{uRTV} = 2 \cdot \frac{au^2}{\sqrt{2}} \cdot V \cdot \frac{1}{uRT}$$

↑
ha $V \gg ub$

$$2 \cdot p_{\text{ekh}} \cdot V \gtrsim uRT$$

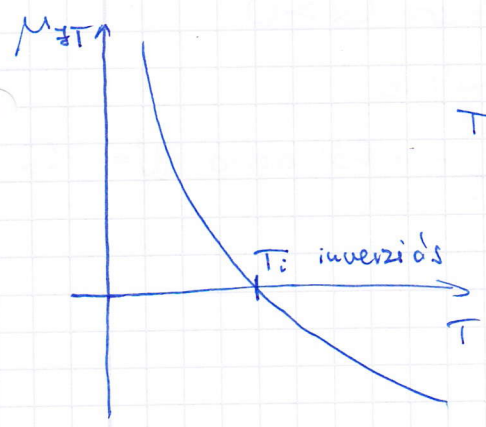
Legyen p_{ekh} ha tényleg kicsi;
 ez a tag $\frac{2au^2}{uRT} \ll 1$

akkor $\frac{1}{1-x} \approx 1+x$, $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}$

$$\mu_{JT} = -\frac{1}{u C_p} \left[V - (V-ub) - \frac{(V-ub)}{V} \cdot \frac{2au^2}{uRT} \right]$$

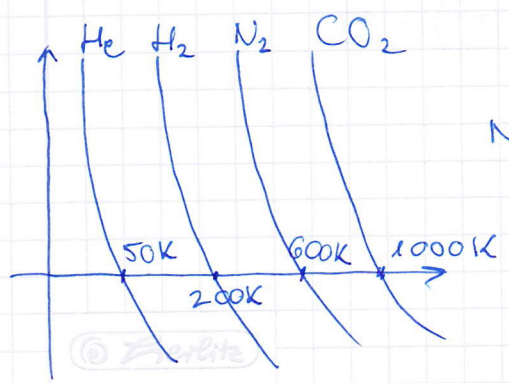
$$\mu_{JT} = -\frac{1}{C_p} \left[b - \frac{2a}{RT} \right] = \frac{1}{C_p} \left[\frac{2a}{RT} - b \right]$$

változó gáz JT-egütthatója



$T > T_i \rightarrow \mu_{JT} < 0$
 \rightarrow melegszik

$T < T_i \rightarrow \mu_{JT} > 0$
 \rightarrow hűl fel
 pl. hűtőgép



N_2 -t a JT-vel lehet hűteni
 $\rightarrow N_2$ cseppfolyósítás

10.09

Idealis gáz állapotváltozásai

folyamatok:

- kvázisztatikusak (p és V lassan változik)
 - reverzibilis
- } idealizáltak

① Izoterm

$T = \text{all.}$ $pV = nRT = \text{const} \rightarrow p(V) = \frac{nRT}{V}$

$U = \frac{f}{2} nRT = \text{all.}$

$V_1 \rightarrow V_2$ -re tagul

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_{V_1}^{V_2} p(V') dV' = -nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V'} dV' =$$

$$= -nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT \ln \frac{V_1}{V_2}$$

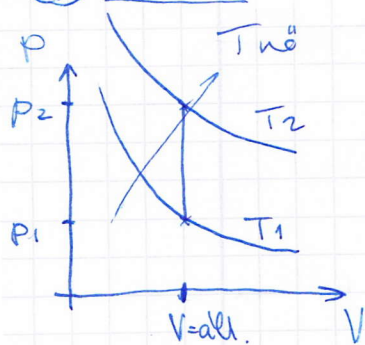
ha $V_2 > V_1 \rightarrow W < 0$ gáz végez munkát

I. főtétele: $0 = \Delta U = Q + W \rightarrow$ taguláskor $Q > 0$

hőt vesz fel \rightarrow tagul

vagy összenyomjuk \rightarrow hőt ad le $W = -Q$

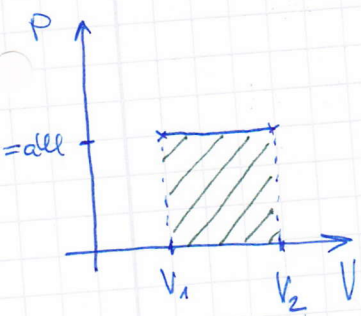
② Izochor



$T_2 > T_1, \Delta U = Q$

$W = 0, \Delta U = nC_V(T_2 - T_1) = Q$

③ Izobar



$$\Delta U = Q + W = Q - p(V_2 - V_1) = U_2 - U_1 \quad *$$

$$Q = n C_p (T_2 - T_1) ; \text{ pl. } T_2 > T_1 \rightarrow Q > 0$$

* -t áhívva:

$$Q = \underbrace{U_2 + pV_2}_{H_2} - \underbrace{[U_1 + pV_1]}_{H_1} = \Delta H$$

↓
V.ö.: izocher $Q = \Delta U$

④ Adiabatikus folyamat $Q = \emptyset$
(izentropikus)

adiabata egyenlete, elemi folyamatra $\int \delta Q = 0$
 $dU = -pdV \leftarrow$ adiabata

$$nC_v dT = -pdV, \text{ els } p = \frac{nRT}{V}$$

$$nC_v dT + \frac{nRT dV}{V} = 0$$

$$C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} = 0$$

$$C_p - C_v = R \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

$$\frac{C_p - C_v}{C_v} = \frac{R}{C_v} = \gamma - 1$$

$$\boxed{\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0}$$

"integrálva"
 $\ln T + \ln V^{\gamma-1} = \text{const}$

"Ansatz": megalkodom a referenciaképpel,
ami az egyenletet kielégíti
Biz: deriválással

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}_2 \leftarrow \text{adiabata egyenlete}$$

↓
 Ellenőrzés: $T = \text{const}_2 V^{1-\gamma}$

$$\frac{dT}{dV} = \text{const}_2 \cdot (1-\gamma) V^{-\gamma} \quad \text{a'Hiva}$$

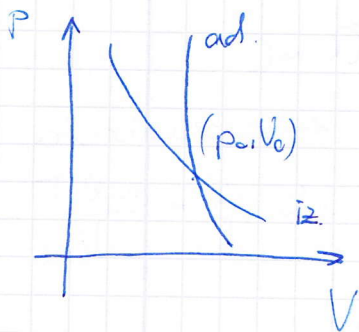
$$\frac{dT}{dV} = (1-\gamma) \frac{T}{V} \quad \text{„csalás”}$$

$$\frac{dT}{T} + (\gamma-1) \frac{dV}{V} = 0 \quad \checkmark$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}$$

$$pV = nRT \rightarrow pV = nR V^{1-\gamma} \rightarrow \underline{pV^\gamma = \text{const}}$$

Adiabata meredekebb, mint izoterma



$$\text{ad: } p_{\text{ad}}(V) = C_1 \cdot V^{-\gamma}$$

$$\text{iz: } p_{\text{iz}}(V) = C_2 \cdot V^{-1}$$

$$\frac{dp_{\text{ad}}}{dV} = C_1 (-\gamma) \cdot V^{-\gamma-1} = -\gamma \frac{p}{V}$$

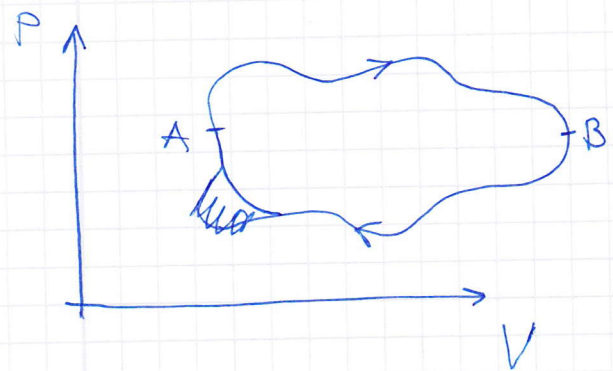
$$\frac{dp_{\text{iz}}}{dV} = C_2 (-1) V^{-2} = (-1) \frac{p}{V}$$

A (p_0, V_0) pontban meredekebb,

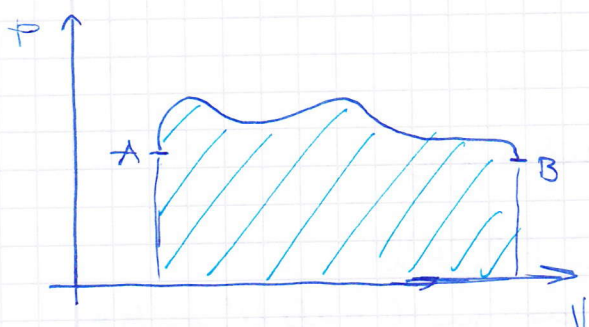
ad: iz

$$-\gamma \frac{p_0}{V_0} \quad (-1) \frac{p_0}{V_0} \rightarrow \text{adiabata meredekebb} \\ \text{mest } \gamma > 1$$

KÖRFOLYAMATOK

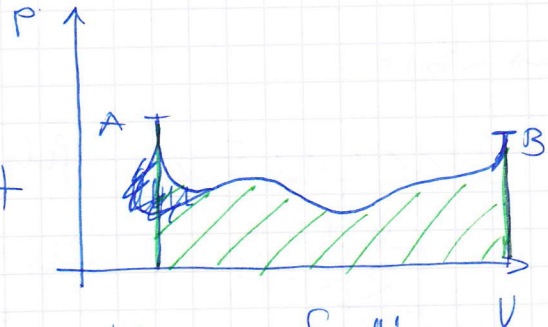


$$\Delta U_{\text{köf}} = 0$$

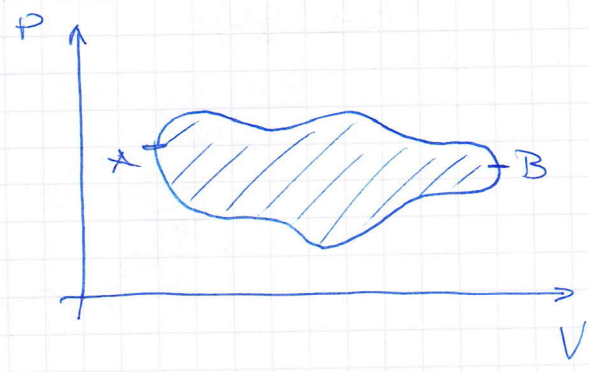


$$W_{A \rightarrow B} = - \int p dV < 0$$

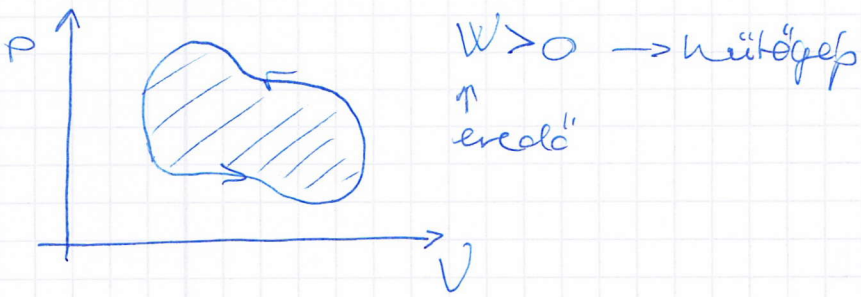
+



$$W_{B \rightarrow A} = - \int p dV > 0$$



* görbe által bezárt terület az
eredő munka, esetleg $W < 0$
hőerőgép!
gáz végző munkát



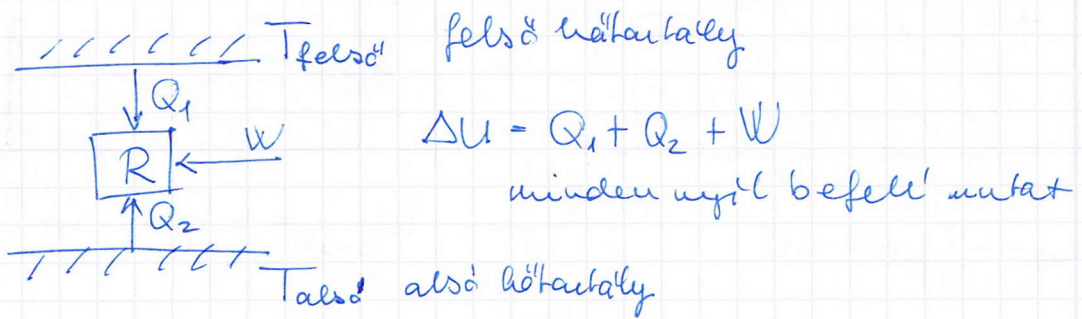
Körfolyamatokra $\Delta U = 0$

$$\Rightarrow \sum Q + \sum W = 0$$

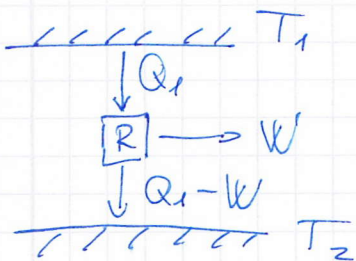
↑ teljes hővesztés

↑ teljes munkavégzés

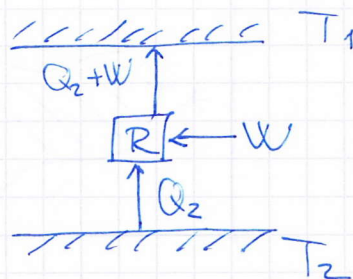
Sematikus ábra:



Hőerőgép

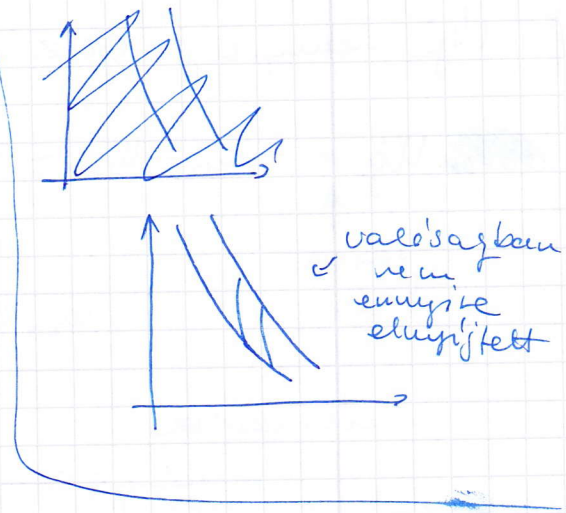
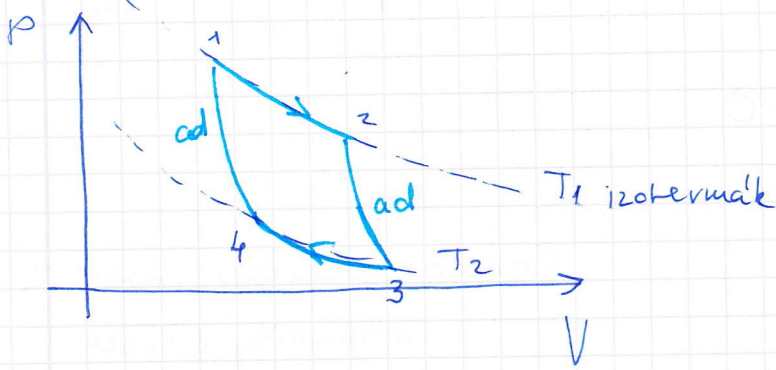


Hűtőgép



V.ö: inverztes klíma
nyilakkal nettó előjelű összeg \neq

Carnot - körfolyamat



1 → 2 folyamat

$T_1 > T_2$ $Q_1 = Q_{1 \rightarrow 2} = -W_{12} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} > 0$ izoterm hűtés
 $Q > 0$
 $W < 0$

2 → 3

ad. $Q = 0$ kis hűtés $W < 0$
 $\Delta U < 0$

$Q_{23} = 0, W_{23} = U_3 - U_2 = nC_V(T_2 - T_1) < 0$

3 → 4

izoterm összenyomás

~~Q > 0~~ $W > 0$, $Q > 0$

$Q_2 = Q_{3 \rightarrow 4} = nRT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -W_{34} < 0$

4 → 1

$Q_{41} = 0$, összenyomás $W > 0$, $\Delta U > 0$

$W_{41} = \Delta U = U_1 - U_4 = nC_V(T_1 - T_2) > 0$

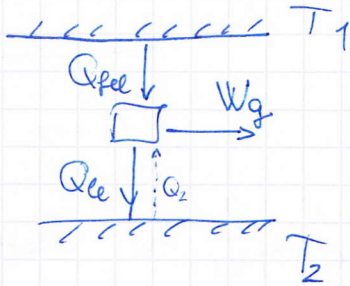
Új mennyiség: gáz által végzett munka $W_g = -W$

$$W_g = -W_{12} - W_{23} - W_{34} - W_{41} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + nRT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} > 0$$

↑
teljes
köf.

$$W_{23} + W_{41} = 0$$

ábrázolva:



Carnot: speciális, mert 2
hőforrás között
működik
"Kumpeli" nem

$$Q_{fel} = Q_1 \quad (1 \rightarrow 2)$$

$$Q_{ee} = |Q_2| \quad (3 \rightarrow 4)$$

A teljes felvett - leadott hő
munkává alakul:

$$Q_{fel} - Q_{ee} = W_g > 0$$

mert

$$Q_{fel} > Q_{ee}$$

Hatásfok (def.!) :

$$\eta \triangleq \frac{W_g}{Q_{fel}} = \frac{Q_{fel} - Q_{ee}}{Q_{fel}} = 1 - \frac{Q_{ee}}{Q_{fel}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$\frac{Q_{ee}}{Q_{fel}} = \frac{nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_2}{T_1}$$

Teljesít

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}} < 1$$

mert $T_2 > 0$
és $T_2 < T_1$

$$\downarrow$$

$$0 < \eta < 1$$

$1 \rightarrow 2$ ad. $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}$

$2 \rightarrow 3$ ad. $T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$

innen

$$\left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

All.: Carnot körf. hataárfoka a legnagyobb!

pl. belsőérfelű motorok

$$\left. \begin{array}{l} T_1 \approx 600\text{K} \\ T_2 \approx 400\text{K} \end{array} \right\} \eta = 30\%$$

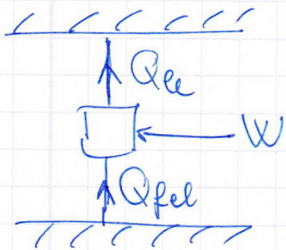
pl.: Paks nyomottvízes reaktor
(125 bar, -300°C víz)

$$\left. \begin{array}{l} T_1 \approx 600\text{K} \\ T_2 \approx 300\text{K} \end{array} \right\} \eta \approx 50\% \quad \left(\begin{array}{l} \text{valóságban technikai} \\ \text{okok miatt kicsit kisebb} \end{array} \right)$$

Carnot-hatás ez mellett föl
Analógia: vízimalom
a víz rácsik a kútkere
és meghajtja, de aztán
nem tud a sebességgel
földet érvé
(=> nem tudja minden
energiaját átadni)

~ mindig
adunk le hőt
azt az
hőforrásal

Hőszivattyú, hűtőgép (inverz Carnot)



$$Q_{\text{cel}} = Q_{\text{fel}} + W; \quad k_{sz} = \frac{Q_{\text{cel}}}{W} > 1 \quad \text{és} \quad k_{sz} = \frac{1}{\eta} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

↑
hőszivattyú
jól szafi. telulező

inverz hőerő, pl.: $W = 1 \text{ kW}$

3 kW-os hőteljesítmény

alából 3 kW-t vesz fel,
felül 4 kW-ot ad le

Carnot - körfolyamatra

$$\frac{Q_{\text{cel}}}{Q_{\text{fel}}} = \frac{T_2}{T_1} = -\frac{Q_2}{Q_1} \rightarrow \text{átrendezve}$$

$$\frac{Q_1}{T_1} = -\frac{Q_2}{T_2}$$

$$\boxed{\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = \phi}$$

55

redukált hő összege ϕ

$\frac{\delta Q}{T}$ redukált hő elemi foly- ban

okt. 16

Hőtan I. főtétele

Megfigyelések:

- meleg tárgy kihűl a környezet hőmérsékletére
- meleg + hidegebb tárgy összerakva \rightarrow meleg kihűl, hideg felmelegszik (spontán folyamat) (I. főtétel nem tiltja meg a fordítottját)
- csepp kúta vízben szétoszlik
- leesett tárgyak szétörnek, fordítva nem zajlik

\Rightarrow egyik fordítottja sem mond ellent az I. főtételnek, mégsem figyeljük meg soha

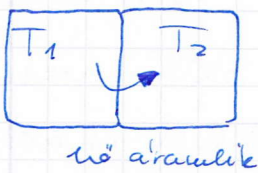
pl:

mechanikai mozgás során, asztalon pattogó golyó \rightarrow megáll
 \rightarrow az asztal melegszik, mechanikai energia „szétszóródik”

\Rightarrow Folyamatok időbeni iránya adott, nem lehet
 „időben” fordítva lejátszott film”

Kísérlet

melegebb + hidegebb test



$T_1 > T_2$

redukált hő összege

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = \underbrace{-\frac{Q}{T_1}}_{\substack{\uparrow \\ \text{nem elmi} \\ \text{folyamat}}} + \frac{Q}{T_2} = \underbrace{Q \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)}_{\downarrow \emptyset} > \emptyset$$

egyértelmű előjele van!

elmi folyamatra:

$$\underbrace{\left(\frac{dQ}{T} \right)_1}_{\substack{\uparrow \\ \text{1-esre}}} + \underbrace{\left(\frac{dQ}{T} \right)_2}_{\substack{\uparrow \\ \text{2-esre}}} = dQ \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$$

II. főtétel megfogalmazásai

(4 ekvivalens megfogalmazás)

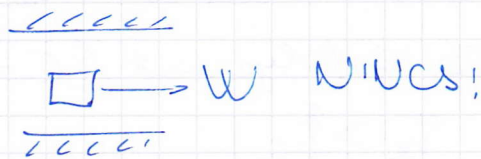
1. Carnot:

Nem lehet egy testtel úgy hőt közölni, hogy teljesen munkává alakítsa.



2. Thomson (Lord Kelvin):

Nincs olyan, hogy egy rendszer energiája csökken, és ez teljesen munkává alakul.



3. Clausius:

Nincs olyan spontán folyamat, ami abból áll, hogy hő meleg helyről hidegebbre.

4. Planck:

$\eta < 1$ hőerőgépként működő folyamat hatásfoka kisebb, mint 1.

\Leftrightarrow Nem létezik ún. másodfajú perpetuum mobile
(elsőfajú p-m: $\eta > 1$ lenne)

Megjegyzések:

I. főtétel: megmondja, hogy egyáltalán milyen folyamatok lehetnek végbe (nem sérül az energiamegmaradás)

II. főtétel: mely folyamat megy valójában is végbe

Carnot tétel:

reverzibilis

- 2 hőtartály közt működő hőerőgép határfoka maximális, és anyagi minőségtől és a folyamat részleteitől nem függ
- Minden 2 azonos hőtartály közt működő reverzibilis hőerőgép határfoka egyenlő, és független az anyagi minőségtől és a folyamat részleteitől (reverzibilis folyamat ezáltal nem létezik)

Állítás: Carnot körfolyamat is ilyen, maximális határfokú reverzibilis körfolyamat.

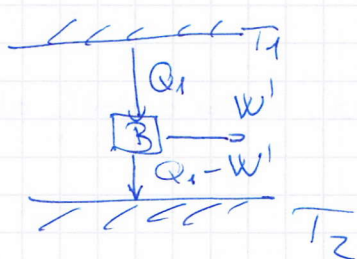
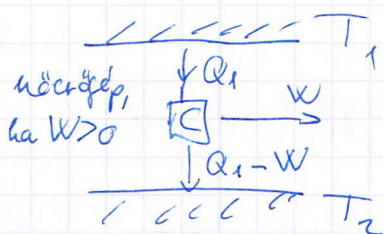
Biz: Indirekt (reductio ad absurdum)

Tíh. létezik B körfolyamat (C - Carnot)

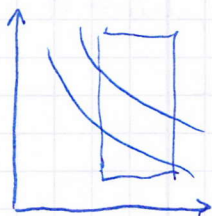
$$\eta_B > \eta_C$$

$$\eta_C = \frac{W}{Q_1}; \quad \eta_B = \frac{W'}{Q_1} \quad \text{és}$$

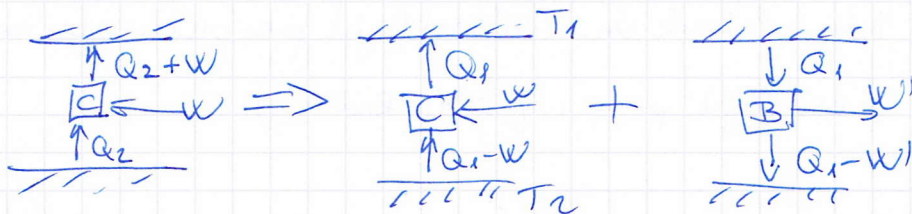
$$\eta_B > \eta_C \rightarrow W' > W$$



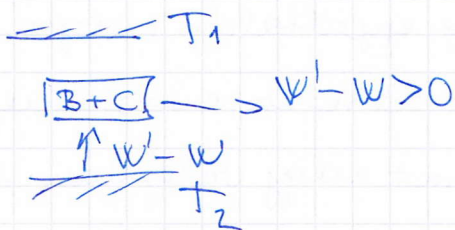
megj:



összekötve: Carnot hőszivattyú



Eredő gép:



Nem létezik II. főtétele miatt

Ellentmond II. főtételenek

\Rightarrow nem létezik B, amelyre $\eta_B > \eta_C$

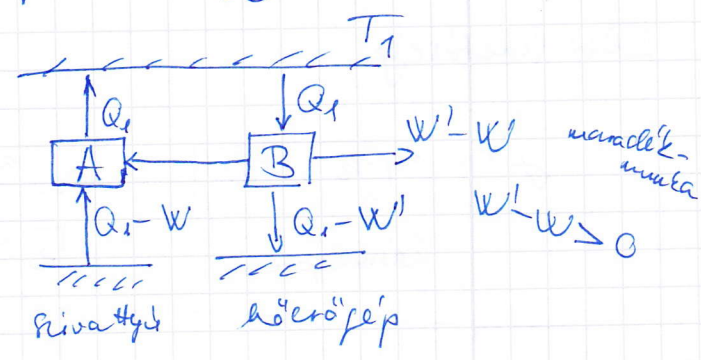
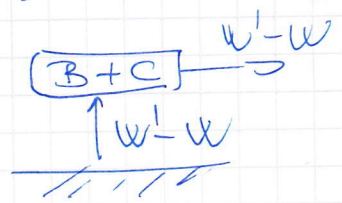
Állítás: A Carnot körfolyamat hatásfoka anyagi minőségtől független (nem csak ideális gátra).

Biz: Tekintsünk két Carnot folyamatot azonos T_1 és T_2 között.

A: id. gáz $\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ és ekkor $\eta_B > \eta_c$

B: "varias" η_B

erőgép



A II. főtételel szerint $W'-W \geq 0 \Rightarrow \eta_B = \eta_c$

A Carnot folyamat maximális hatásfokú, anyagi minőségétől független η -jú $\Rightarrow \eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

Termodinamikai hőmérséklet-skála

η_c : hőm.-függő

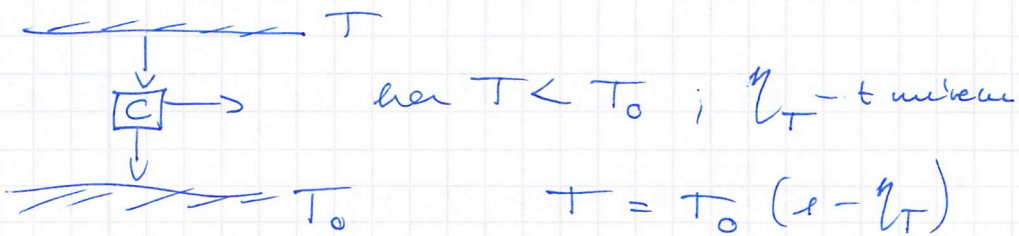
$\eta_{\text{Carnot}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$; "recept": Vegyünk Carnot-ot
 T_0 : olvadó víz-jég } (NYOMÁS!)
 T_f : forráskan lévő víz }

Ikt mérjük $\eta_0 = \frac{T_f - T_0}{T_f}$ és $T_f - T_0 = 100$

$\eta_0 = 0,268$ additív kísérletből

$T_0 = 273,15 \text{ K}$
 $T_f = 373,15 \text{ K}$

↓
Ismeretlen T mérete $T > T_0$



Elvi lehetőség

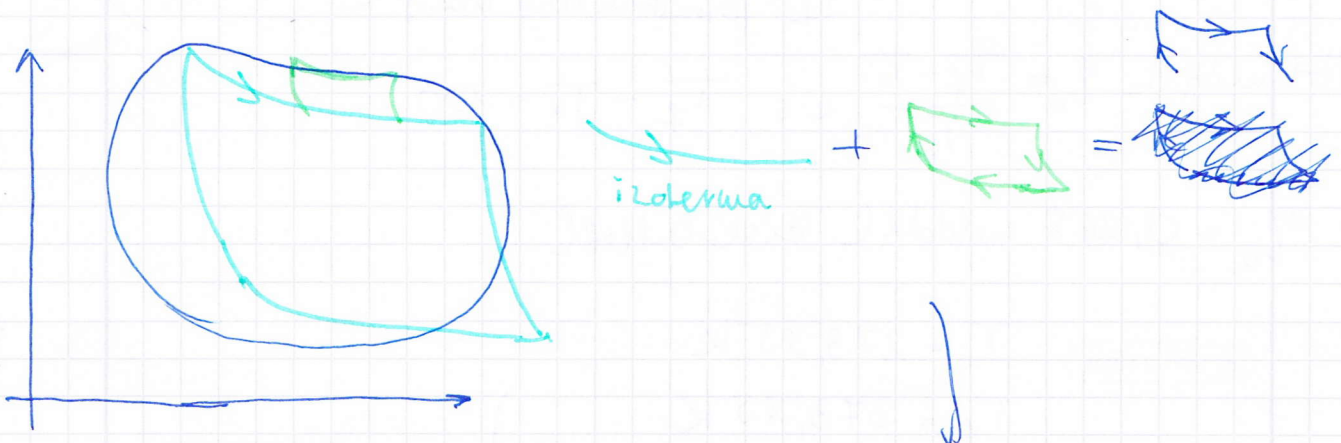
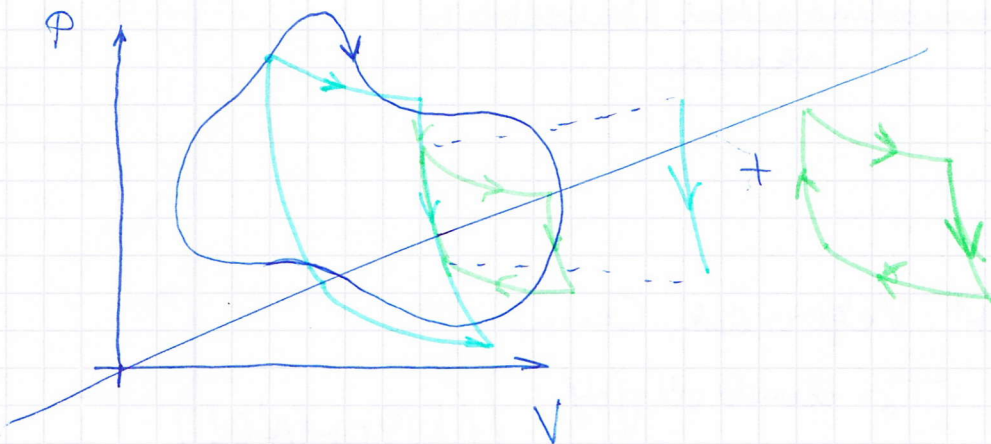
$p_a = p_a, T_a$
↑
hármaspont

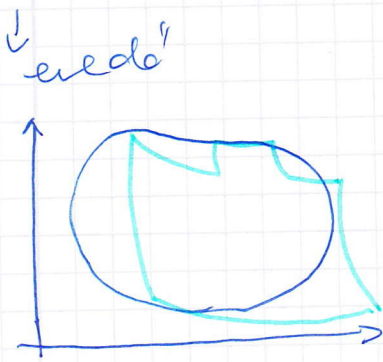
$p_a \approx 606 \text{ Pa}$
 $T_a = 273,16 \text{ K}$

Az Entropia

Carnot - körfolyamat $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$

Tekintsünk egy általános reverzibilis körfolyamatot:





belső izotermakon felvett/leadott
hők kiesnek!

* redukált hők összege a "krumpli"-ra is 0

$$\oint \frac{\delta Q_{rev}}{T} = 0$$

Analogia:
 \rightarrow elektromos
 $\oint \underline{E} \cdot d\underline{r} = 0$

$$\oint \underline{F}_{grav} \cdot d\underline{r} = 0$$

Létezik potenciál

pl: $\underline{E} = -\underline{\nabla} \varphi$

$$\varphi_B - \varphi_A = \int_A^B \underline{E} \cdot d\underline{r}$$

Clausius:

... a redukált hő reverzibilis folyamatban
egy állapot fo. teljes differenciálja

\Rightarrow ez az ún. entropia

$$dS \stackrel{\text{def.}}{\Delta} \frac{\delta Q_{rev}}{T}$$

Inverzibilis folyamatok

és az entropia

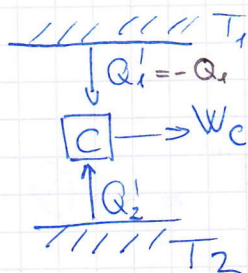
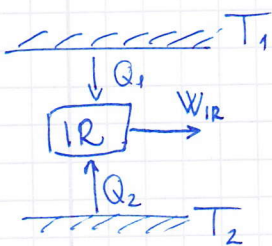
Reverzibilis folyamatban S csak hőcserével változhat

Fázisátalakulások:

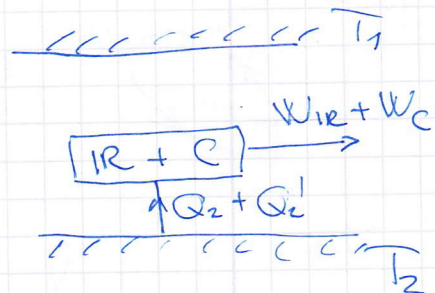
$$\Delta S_f = \frac{\Delta Q_f}{T}$$

← latens hő
← fix

Tevékeny inverzibilis + rev (Carnot) folyamatot



összekapcsolva \Rightarrow



II. főtétele szerint

$$W_{IR} + W_C \leq 0$$

↓

R-re: $W_{R} = Q_1 + Q_2$

C-re: $W_C = Q_1' + Q_2'$ és $\frac{Q_1'}{T_1} + \frac{Q_2'}{T_2} = 0$

↑
mert
Carnot

innen: $Q_2' = -T_2 \frac{Q_1'}{T_1}$

Eredő munka:

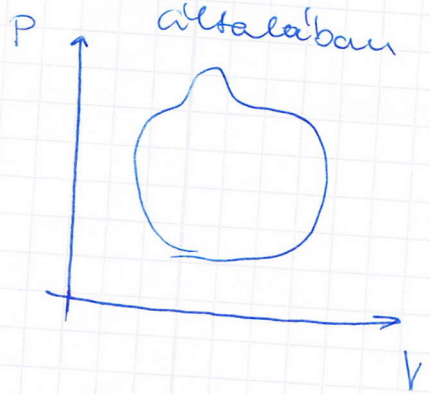
$W_R + W_C = Q_1 + Q_2 + Q_1' + Q_2' = Q_2 + Q_1 \frac{T_2}{T_1} \leq 0$

áthelyezve: $\frac{T_2}{T_1} \left(\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} \right) \leq 0$
↑
pozitív

Ezért általános irreverzibilis körfolyamatra a leadott hők összege < 0

= akkor van, ha reverzibilis folyamat

általában



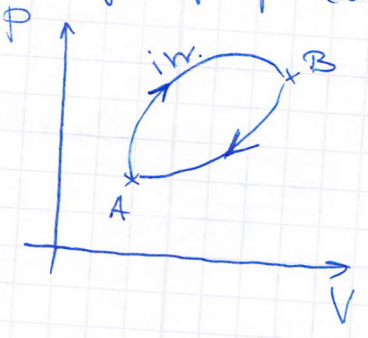
irreverzibilis körfolyamatra

$$\oint \frac{\delta Q}{T} < 0$$

Legáltalánosabb

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

Véges folyamatra



$$\int \frac{\delta Q}{T} < 0$$

$$\int_A^B \frac{\delta Q}{T} + \int_B^A \frac{\delta Q}{T} < 0$$

$$S_A - S_B$$

↓ altreuderne:

$$\int_A^B \frac{\delta Q^{irr}}{T} < S_B - S_A$$

Clausius egyenlőtlenségek:

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad \oint \frac{\delta Q}{T} &\leq 0 \\ (2) \quad \int_A^B \frac{\delta Q}{T} &\leq S_B - S_A \\ (3) \quad \frac{\delta Q}{T} &\leq dS \end{aligned} \right\} \text{II. főtétel matematikai alakja}$$

Entropia produkció

→ inv. folyamatban $\delta Q^{irr} < T dS$ → $dS^{prod} > 0$ leírják

Ezzel a II. főtétel $dS = dS^{prod} + \frac{\delta Q}{T}$ rev. $dS^{prod} = 0$
inv. $dS^{prod} > 0$

zárt rendszer:

$$\delta Q = 0 \rightarrow dS = dS^{prod}$$

velges folyamatra:

$$S_B - S_A > \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = 0 \rightarrow S_B - S_A \geq 0$$

↑ ha ez 0

entropia spontán folyamatban nem csökkenhet.

Entropianövekedés tétel:

folyamatok iránya egyértelmű

→ entropia nem csökkenhet, mindig nő

(a természetben csak az ilyen folyamatok mennek végbe)



Diszkusszió:

- zárt rendszer egyensúlyban $S = \max$
 $dS = 0$
- Univerzum: "hőhalál" \rightarrow minden energia egyenletesen oszlik el
 \updownarrow
nem lehet végtelen ideje (hiszen akkor már eljutott volna ideig)
most energiagradiensek vannak
 - \rightarrow Nap - magreakciók \rightarrow termikus sugárzás
 - \rightarrow energia szétszóródik
- Univerzum jövője: $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow$ végtelen ideig tart
 \rightarrow Nagy Reces \rightarrow nem születhet újja

Érdekesek

- fekete lyukaknak van entropiája \rightarrow van hőmérséklete
 \rightarrow kibocsátják ún. Hawking sugárzást
- reversible computing

Landauer: információs entropia:

1 bit információ törléséhez $k_B T \ln 2$ energia kell

$$dQ = T dS \rightarrow \text{inf. entropia } k_B \ln 2$$

\rightarrow reversible computing: "számolás információ törlése nélkül"

Példa:

mai gép hatékonysága:

$$10 \text{ W teljesítményű proc. } 10 \text{ W} = 10 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

$$\text{Landauer } 4 \cdot 10^{10} \frac{\text{bit}}{\text{s}}$$

1 db bit/s
művelet

$$\updownarrow 4 \cdot 10^{10} \frac{\text{bit}}{\text{sec}}$$

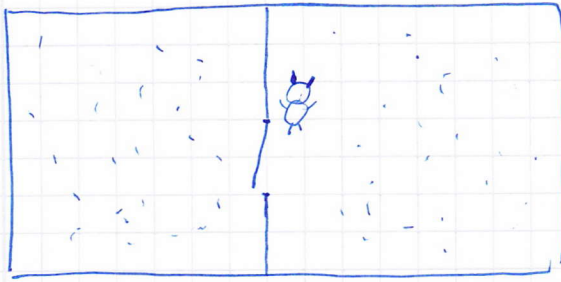
4 művelet / órajel
1 GHz órajel

$$\frac{k_B T \ln 2}{\text{J}} \cdot \frac{1}{\text{s}} = 10^{-21} \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

$4 \cdot 10^{10} \frac{\text{bit}}{\text{s}}$ -hoz $\sim 10^{11}$ W teljesítmény felvétel kell

\rightarrow Mai gép $10^{11} - 10^{12}$ -szer rosszabb hatékonyságú, mint az elvi határ

Maxwell-démon XIX. sz. vége (gondolat kísérlet: Gedanken experiment)



Démon:

ha jobbról jön egy gyors \rightarrow átengedi
ha balról jön egy lassú \rightarrow átengedi

bal oldalon gyorsak (T nagy)
jobb oldalon lassúak (T kicsi)

bal oldal melegszik, jobb oldal hűl

A két oldali gáz csak alrendszer!

Démonnal együtt lenne zárt rendszer.

\Rightarrow Modern gondolat: folyamatosan információt tárol (töröl)

def. 2.4

Hőtan fundamentális egyenlete

I. főtétel: $dU = dQ + dW$

↑ teljes differenciál ↑ ut, folyamat függő

reverzibilis folyamat $dS = \frac{dQ^{rev}}{T} \rightarrow TdS = dQ^{rev}$
és $dW = -pdV$ reverzibilis terfogatmunka van

Csak reverzibilis folyamatokra: $dU = TdS - pdV$

A tapasztalat szerint ez igaz mindig:

$$dU = TdS - pdV \quad (\text{Erős, itt nem bizonyított állítás})$$

külön-külön nem igaz, legyen $dQ = TdS$ \rightarrow NEM IGAZ

~~De~~ De együtt $TdS - pdV = dQ + dW$ \rightarrow IGAZ

© Berlin

A folyamat lehetségei közt legkisebb pl: $dW^{rev} + dQ^{rev} = dW^{irrev} + dQ^{irrev}$

Tudjuk, hogy

$$dS = dS^{\text{prod}} + \frac{dQ^{\text{rev}}}{T}$$

$$\text{és } TdS - pdV = dQ + dW$$

Teljesítmény irreverzibilis munkavégzést.

pl. súrlódás

$$dW = \underbrace{-pdV}_{\text{súrl. mentes}} + dW^{\text{inver}}$$

teljesítmény

$$dS = dS^{\text{prod}} + \frac{dQ^{\text{rev}}}{T} \rightarrow dQ^{\text{rev}} = T(dS - dS^{\text{prod}})$$

beírva a fund. egyenletbe

$$TdS - pdV = TdS - TdS^{\text{prod}} + dW^{\text{inver}}$$

$$\underline{TdS^{\text{prod}} = dW^{\text{inver}}}$$

Entropia produkciót az irreverzibilis munkavégzés felelős.

$$TdS \geq dQ$$

különbséget dW^{inver} -ből tartalmaz

Fund. Egy.: I. + II. főtételek együtt

F. E. ah'va:

$$dU = TdS - pdV \rightarrow dS = \frac{1}{T}(dU + pdV)$$

Altalánosított munka $dW = -pdV + \mu dn + \dots = \sum_i X_i d\xi_i$

$$dU = TdS - pdV + \mu dn \leftarrow \text{F. E. szintén}$$

itt találjuk: ext - int párok

$$-p \leftrightarrow V$$

$$\mu \leftrightarrow n$$

$$T \leftrightarrow S$$

S: -extenzív mennyiség,
 átadott hővel v. f.,
 végzett munkával
 kapcsolatos.
 -összreadódik.

$\hookrightarrow S$: állapotjelző $\rightarrow \oint \frac{\delta Q^{rev}}{T} = \phi \rightarrow dS = \frac{\delta Q^{rev}}{T}$
 teljes differenciál

Általánosítva:

$$dU = TdS + \sum_i X_i d\xi_i \xrightarrow{\text{átrendezve}} dS = \frac{1}{T} (dU - \sum_i X_i d\xi_i)$$

ISM.: Fundamentális egyenlet

$$dU = TdS - pdV + \mu dn + \dots$$

$$TdS - dQ + TdS^{prod} \} \text{ Clausius } TdS \geq \delta Q$$

$$\delta W = -pdV + \delta W^{inv}$$

↑
terfogaati munka

F.E.: $\delta Q^{rev} + \delta W^{rev} = \delta Q + \delta W$ \rightarrow nagyon erős tapasztalati megfigyelés (nem bizonyított)

$TdS - pdV$ } általános eset

$$TdS - pdV = T(dS - dS^{prod}) - pdV + \delta W^{inv}$$

$$\boxed{TdS^{prod} = \delta W^{inv}}$$

← nem konzervatív erő munkája

da FE: $dU = TdS + \sum_i X_i d\xi_i$

átrendezve: $dS = \frac{1}{T} (dU + pdV - \mu dn)$

10.30

Idealis gáz entropiaja

$$U = U(T); \quad pV = nRT; \quad dS = \underbrace{\frac{1}{T} dU}_{\text{ha } V\text{-től nem függ}} + \frac{p}{T} dV; \quad \neq E.$$

ha V -től nem függ $dU = nC_V dT$

"Matekos" általában $U = U(T, V) \rightarrow dU = \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)}_{nC_V} dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = nC_V dT$
id. gázra

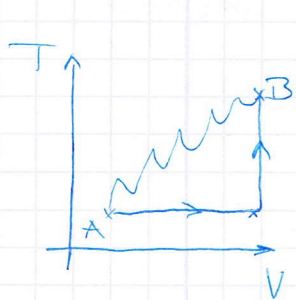
Beriva $dS = nC_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV$

"Matekos" $S = S(T, V) \rightarrow dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV \stackrel{+}{=} \frac{nC_V}{T} dT + \frac{p}{T} dV$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{nC_V}{T}; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{p}{T} = \frac{nR}{V}$$

dT és dV
 tetszőleges mennyiség

S -nek T és V szerinti part. deriváltak ismerem.



$$S_B - S_A = \int_A^B ds$$

innen $S(T, V) = S_0(T_0, V_0) + \int_{T_0}^T \frac{nC_V}{T'} dT' + \int_{V_0}^V \frac{nR}{V'} dV' =$
 $= S_0(T_0, V_0) + nC_V \cdot \ln \frac{T}{T_0} + nR \ln \frac{V}{V_0}$

Írjuk át $S(p, V)$ -re. $T = \frac{pV}{nR}$

$$\begin{aligned} \rightarrow S(p, V) &= S_0(p_0, V_0) + nC_V \left[\ln \frac{p}{p_0} + \ln \frac{V}{V_0} \right] + nR \ln \frac{V}{V_0} = \\ &= S_0 + nC_V \ln \frac{p}{p_0} + nC_p \ln \frac{V}{V_0} \end{aligned}$$

Írjuk át $S(p, T)$ -re: $V = \frac{nRT}{p}$

$$\begin{aligned} S(p, T) &= S_0(p_0, T_0) + nC_V \ln \frac{p}{p_0} + nC_p \left[\ln \frac{T}{T_0} - \ln \frac{p}{p_0} \right] = \\ &= S_0 + nC_p \ln \frac{T}{T_0} - nR \ln \frac{p}{p_0} \end{aligned}$$

Diskusszió:

$T \rightarrow T_0$ v. $p \rightarrow p_0$ v. $V \rightarrow V_0 \rightarrow \ln \frac{T}{T_0} = \phi$ lesz

Mi van, ha $T_0 \rightarrow \phi$ $\ln \rightarrow +\infty$ BAJ! \rightarrow ideális gáz koncepciója nem lehet jó
 $T \rightarrow \phi - n!$

Gay-Lussac kísérlet és entropia

$V_1 \rightarrow V_2$ hígul $\Delta U = \phi$, $\Delta T = \phi$

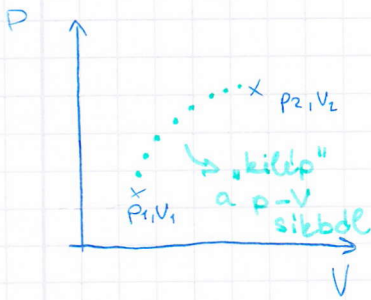
$p_1 \rightarrow p_2$ csökken $W = \phi$, $Q = \phi$

S_1 : kezdeti entropia $S_1(T_1, V_1) = S_0(T_0, V_0) + n C_V \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) + n R \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$

S_2 : végállapot -||- $S_2(T_2, V_2) = S_0(T_0, V_0) + n C_V \ln\left(\frac{T_2}{T_0}\right) + n R \ln\left(\frac{V_2}{V_0}\right)$

$\Delta S = S_2 - S_1 = n R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) > \phi \rightarrow$ G-L kísérlet spontán módon megybe meg, de ellentétje nem \rightarrow irreverzibilis

G-L p-V diagramon



$\Delta T = \phi$ izoterm

$W = \phi$ izochor

$Q = \phi$ adiabatikus

nem kvázisztatikus!
 (nem lehet ábrázolni emiatt a p-V síkon)

Hozzá próbálom teni munkát fog venni

Entropiaváltozás kiegyensúlyozási folyamatokban

T_1, p_1	T_2, p_2
U_1, V_1	U_2, V_2

kölcsönhatás: mechanikai és termikus
 $dS = ?$ elemi esetben

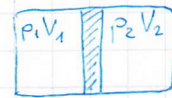
keltség: $dV = dV_1 + dV_2 = \phi$
 $dV_1 = -dV_2$

1. rendűre
 $dS_1 = \frac{dU_1}{T_1} + \frac{p_1}{T_1} dV_1$
 $dS_2 = \frac{dU_2}{T_2} + \frac{p_2}{T_2} dV_2$

teljes rendszer entropia változása: $dS = dS_1 + dS_2 = *$

$* = dU_1 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) + dV_1 \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right)$

zárt rendszer: $dU = dU_1 + dU_2 \Rightarrow dU_1 = -dU_2$
 "da'terente" fel



↑ dugattyú

69

↓
1. példa:

$$p_1 = p_2 = p \text{ de } T_2 > T_1, \text{ ezzel } dS = \underbrace{[dU_1 + p dV_1]}_{\delta Q} \left[\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right] > \phi \iff \text{II. főtétel alapján}$$

1-es által felvett hő

mivel $\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} > \phi \rightarrow \delta Q > \phi \rightarrow$ 1. vesz fel hőt (előlegebb)

2. példa:

$$p_2 > p_1, T_1 = T_2 = T \rightarrow dS = \frac{dV_1}{T} (p_1 - p_2) > \phi \text{ a II. főtétel szerint, és}$$

$p_1 - p_2 < \phi \rightarrow dV_1 < \phi$ és

$T > \phi$ a kisebb nyomású

összemeget!

Ahogy várjuk!

A spontán kiegyenlítődési folyamatok a II. főtétel következményei.

Belső energia térfogatfüggése

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = ? \text{ Volt } C_p - C_v = \frac{1}{n} \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p}_{V\beta_p} \left(p + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right)$$

Maxwell + FE. $dS = \frac{1}{T} (dU + p dV) \leftarrow FE$

$$S \xrightarrow{\uparrow} S(T, V) \rightarrow dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV \left. \vphantom{dS} \right\} \text{„maxwell”}$$

$$U \rightarrow U(T, V) \rightarrow dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV$$

3-at 1-be

$$dS = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV + \frac{p}{T} dV$$

összehasonlítás
2-vel

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V ; \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + \frac{P}{T}$$

(a) (b)

Young - tekel: $\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V}$

$\left(\frac{\partial a}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial b}{\partial T} \right)_V$; Bal oldal: $\frac{1}{T} \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T}$

Jobb oldal: $-\frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + \frac{1}{T} \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} - \frac{P}{T^2} + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$

összehasonlítható:

$$\phi = -\frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + \frac{P}{T^2} + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P$$

végeredmény

Beküldött eredményt $C_p - C_v$ -be beírjuk:

$$C_p - C_v = \frac{1}{n} V \beta_p T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

gyakorlat HF

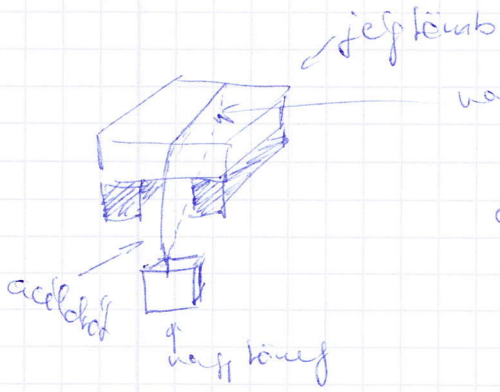
1. $dS = \frac{1}{T} (dU - X d\xi) \Leftrightarrow$
 $\hookrightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right)_T = -T \left(\frac{\partial X}{\partial T} \right)_\xi + X$

2. $H = U + pV$ entalpia
 $dH = T dS + p dV + d(pV) = T dS + p dV + V dp + p dV = T dS + 2p dV + V dp$

lejjön $dS = \frac{1}{T} (dH - V dp)$

$$\hookrightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T = V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

I. Tejválas



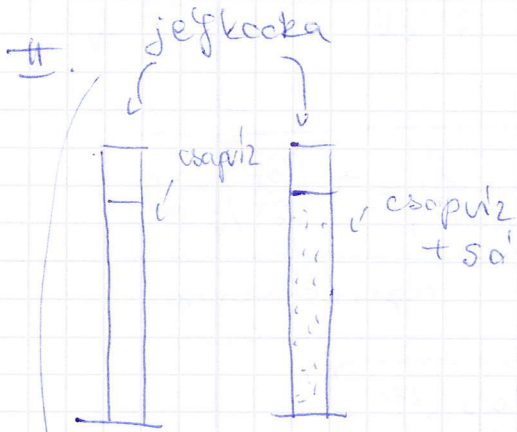
tejfényes vagy vaj

↓
olvadás: hőm. csökken → megfagy

↓
erősülgedés

↓
vissrafagy

pl: korcsolyázás
működési elve



↑
melyik olvad el

előbb → amelyik először van

olvadáskor először lesz

↓
először

↓
sós víz

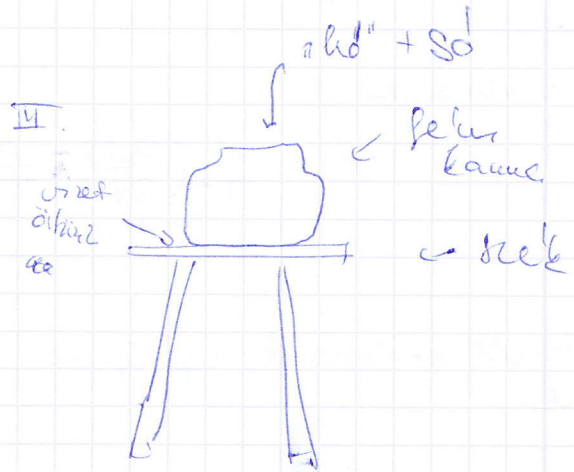
↑
amelyik leérte az alját

↓
Só miatt nagyobb a sűrűsége

↓
eltávolít az elolvadt víz

↓
melyik jön fel

(Arab emiá'busok a déli sarki jégtáblákból (jég) oxigént vonnak ki → elvonták a jégtábláikat)



olvadni fog a víz (gyorsan)

→ olvadáskor sűrűsége nő a környező víz el (a mélyen lévő víz)

↓
megfagy

↓
kannával fel lehet emelni

IV



hosszú

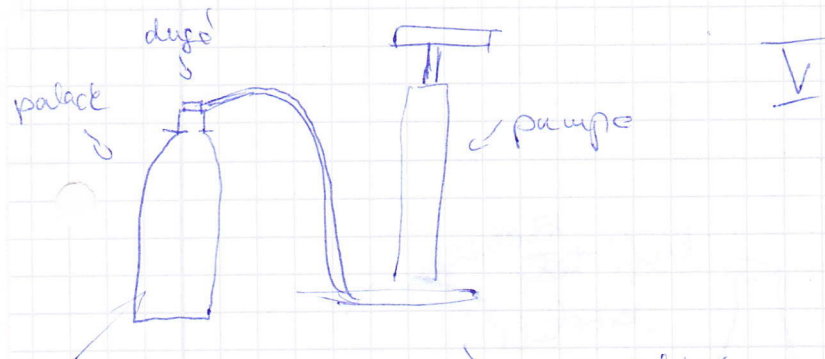
→ sűrűsödés PFT palack

↓
He → fűtünk bele

↓
magára ragad

↓
diffúzióval a He lassan

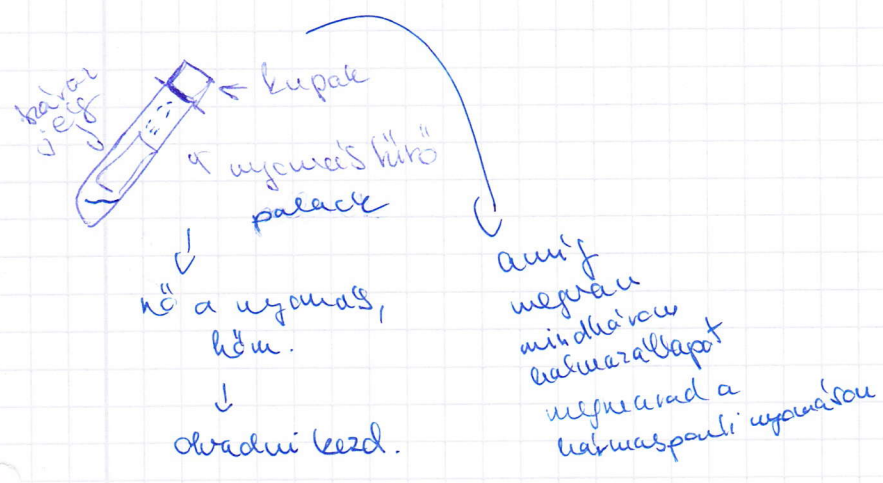
↓
szélesedik a palack → nívó az anyagot a f



levegő
 benne oldott víz
 alaptól
 nem kondenzálódik,
 kell egy
 ekhöz kritikus hőm,
 nyomás
 amikor kihűzzük
 a dugót
 körkörös lehel
 a gáz
 megfűtve
 a kondenzálódik
 növeljük a
 nyomást
 gáson
 kihűzzük a
 dugót
 kondenzálódik
 fof (felhő)
 szublimál

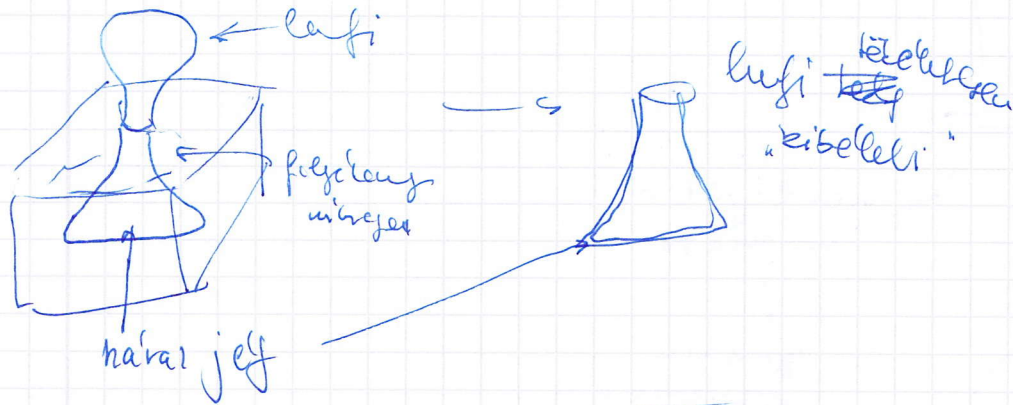
szel gáz
 keletkezik
 megemeli a
 kockát
 majd kinyitja
 alatta
 keppan
 kézd' hangot ad

VI. szilárd jég - 78°C



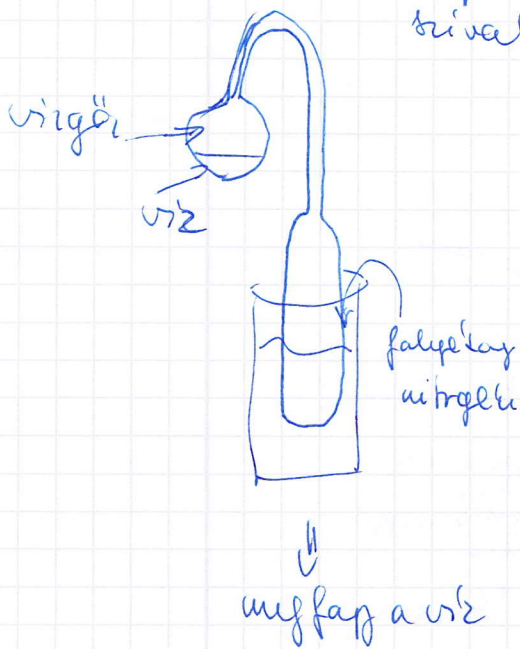
VII. ~ -190°C

falcsécsny nitrogén



VIII.

a levegő ki lett
szivattyúzva



11.06

Ismitheus:

$$C_p - C_v = ? \quad C_v = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

$$\delta Q_p = n C_p dT; \quad \delta Q_p = dU + p dV$$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV$$

$$n C_p dT = n C_v dT + dV \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right]$$

Matele $V = V(p, T) \rightarrow dV = \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT$
 da $p = dU$

$$C_p - C_v = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right]}{V \beta_p} = \frac{V \beta_p \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right]}{n}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = ? \quad dS = \frac{1}{T} (dU + p dV) \quad \text{Fiz.}$$

$$U = U(T, V) \xrightarrow{M.} dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV$$

$$S = S(T, V) \xrightarrow{M.} dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \frac{1}{T} dT + \left[\frac{p}{T} + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right] dV$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \frac{1}{T}; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \frac{p}{T} + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} \cdot \frac{1}{T} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - \frac{1}{T^2} p + \frac{1}{T} \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} - \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p$$

$$C_p - C_v = \frac{V\beta_e}{n} T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

1. példa: id. gáz $pV = nRT \rightarrow p = \frac{nRT}{V} \rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{p}{T}$

$$\beta_p = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p; V = \frac{nRT}{p} \rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \cdot \frac{1}{V} = \frac{1}{T}$$

$$C_p - C_v = \frac{V \cdot T}{Tn} \cdot \frac{p}{T} = \frac{pV}{nT} = R \checkmark$$

2. példa: vdW

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2} \right) (V - nb) = nRT \rightarrow p = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{T} \left(p + \frac{an^2}{V^2} \right)$$

innen $\left(\frac{\partial u}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p = p + \frac{an^2}{V^2} - p = \frac{an^2}{V^2}$

$a = 0$ id. gázra, ahogy várjuk $\left(\frac{\partial u}{\partial V} \right)_T = 0$

vdW-ra $\left(\frac{\partial u}{\partial V} \right)_T = \text{vegyes}$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right) \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)}{\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)}$$

Rossz!
a $V = \text{all mellett}$
felt. miatt

$f = f(x, y)$; $f(x, y) = \text{const}$ (kontúr, szintvonalon)

($V = V(p, T)$)
ekkor $df = 0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x dy$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_f = - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y}{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x}$$

f állandó
csak akkor
igaz

$V = V(p, T)$ -re alkalmazva

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = -\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T} = \frac{\beta_p}{\kappa_T} \quad \text{betrva a } C_p - C_v \text{-s egyenletbe:}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = V\beta_p$$

$$C_p - C_v = \frac{V\beta_p^2 T}{\kappa_T}$$

$$\text{és } \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -V\kappa_T$$

$$\text{1d. gázra: } \beta_p = \frac{1}{T}; \quad \kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{p}$$

$$V = \frac{nRT}{p}$$

betrva:

$$\frac{VT}{T^2 n} p = R \quad \checkmark$$

Az entropia statisztikus értelmezése

Fenomenológikus hőtan \longleftrightarrow Statisztikus fizika

S

entropia köti össze
mindkét "nyelven" leírható

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \frac{1}{T}; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{p}{T}$$

$$\text{F.E.: } dS = \frac{1}{T}(dU + pdV)$$

$$S(U, V) \rightarrow dS = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V dU + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U dV$$

Boltzmann-hipotézis: Az egyensúly a legvalószínűbb állapot.

Sok részecske $\sim 6 \cdot 10^{23}$

Ma tudásunk szerint a természetben valószínűségi viselkedés van.

B-H alapja \rightarrow adott állapot valószínűségét kell kiszámolnunk

© Berlin

\rightarrow ebből a F.E. alapja mérhető mennyiségeket

számolunk \rightarrow összevessük a természettel

77

Uj fogalmak:

Makroállapot: adott makroszkopikus $(U, V, p, T, n, \mu, \dots)$ állapotjelzőkkel jellemezhető állapot. Két makroall. arcos, ha az állapotjelzők arcosak.

Mikroállapot: a részecskék összeségét jellemző (p, r) értékek sokasága

Allítás: egy makroállapot SOK mikroállapotot jelenthet.

A B.H. nyelvén: az a makroállapot valósul meg egyensúlyban, amit a legtöbb mikroállapot valósíthat meg.

Entropia a B.H. alapján

- S egyensúlyban maximális

- jelöljük W -vel a mikroállapotok számát, W nagy $\sim (6 \cdot 10^{23})^{6 \cdot 10^{23}}$

\Rightarrow all.: S a W monoton fű-e! \Leftrightarrow ekvivalens a B.H.-sel

S extenzív \rightarrow alrendszerre additív $S = S_1 + S_2$

Két alrendszert egyesítve W_1 és W_2 -vel

eredő $\rightarrow W = W_1 \cdot W_2$

Innen S milyen $S = g(W)$ fű. ~~lehet?~~ lehet?

S additív $\rightarrow S_1 = g(W_1), S_2 = g(W_2)$

$$S = S_1 + S_2 = \underline{g(W_1) + g(W_2) = g(W_1 W_2)}$$

additív függvényegyenlet

\downarrow
csak $\ln()$ oldja meg

$$\Rightarrow S \sim \ln W$$

$$\boxed{S = k_B \ln W}; \quad k_B \approx 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Alternatív entropia kifejezés: Gibbs-féle entropia formula

$$\frac{S}{N} = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$$

\uparrow
db szám

p_i : i -edik részecske lehetséges állapotaiban a veg.-e

S megvan statisztikailag \rightarrow

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \frac{1}{T} \quad \text{és} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{p}{T}$$

a fenomenológikus állapotjelzők megkaphatók

S a kapcsolatot a fenomenológikus hőtan és a stat. fiz. között

Következtetés:

A hőtani folyamatok nem abszolútak, hanem valószínűségi jellegűek.

Kitekintés:

\rightarrow kvantummechanika, pl. egy részecske elbomlása valószínűségi jellegű

\rightarrow Einstein: "Isten nem kockázik" (tevédt)

\rightarrow léteznek rejtett változók

\rightarrow cáfolták 1970-es években (Bell - egyenlőtlenségek)

3. változ \rightarrow kaoszelmélet: komplex rendszer, nem lineáris dinamika

\rightarrow kezdeti értékektől erősen függő jövő

Példa: mennyi a vsz-g-e annak, hogy egy por szem spontán módon a környezetéhez képest 1mk-nél lehűl?

por szem $\sim 1 \mu\text{g}$

$$300\text{K}-\text{en} \quad \delta Q = m \cdot c \cdot \Delta T \approx 1 \mu\text{J}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & & \searrow \\ 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} & & 10^{-3} \end{matrix}$$

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \underbrace{-\frac{\delta Q}{T_1}}_{300\text{K}} + \underbrace{\frac{\delta Q}{T_2}}_{300\text{K}-1\text{mk}} = -10^{-17} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$\Delta S = -10^{-17} \frac{\text{J}}{\text{K}} = k_B \ln \frac{W_2}{W_1}$$

$$W_2 < W_1$$

\uparrow
a folyamat vsz-g-e az egyensúlyhoz képest

$$W_2 = W_1 \cdot e^{-10^6} \approx W_1 \cdot 2.6 \cdot 10^{-5}$$

\uparrow
vsz-g-e, hogy majom gépel
és Shakespeare dráma
jön ki

$$-10^6 = \ln \frac{W_2}{W_1}$$

$$\frac{W_1}{W_2} = e^{(10^6)}$$

Statisztikai modellek

N db részecske, k db doboz

(N_1, N_2, \dots, N_k) megkülönböztethetetlen részecskék

megkülönböztethető: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots$

ha 2 db egyforma van

1, 2, 2, 4

$\frac{4!}{2!} \rightarrow$ ismétlődéses permutációk

$$W(N_1, N_2, \dots, N_k) = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_k!}$$

1-esben N_1
2-esben N_2

B.H.: keressük W maximumát egy

kélyszer mellett $\sum_i N_i = N$

és W maximumát (és meccsen!)

a kélyszer mellett

$$N! = \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N; \quad \ln N! = \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \ln N + N \ln N - N \approx N \ln N - N$$

ha $N \rightarrow \infty$ $\sim \phi$ $\ln(6 \cdot 10^{23}) = 55 \approx 6$

Kélyszer kezelése

$\max f(x, y) - t$ keressük úgy, hogy $g(x, y) = \text{const.}$ (kontinuálisan lévő maximum)

Lagrange-féle multiplikátor módszer, segédfo.: $\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) + \lambda(g(x, y) - c)$

A megoldás szükséges feltétele: $d\mathcal{L} = \phi$

$$d\mathcal{L} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right)_{y, \lambda} dx + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}\right)_{x, \lambda} dy + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right)_{x, y} d\lambda = \phi$$

ez épp a kélyszer feltétel!

egyenletrendszer:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right)_{y, \lambda} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y, \lambda} + \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{y, \lambda} \\ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}\right)_{x, \lambda} &= \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x, \lambda} + \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{x, \lambda} \end{aligned} \right\} \text{egyenletrendszer, mind egyik } \neq \phi:$$

$$g(x, y) - c = \phi$$

x, y, λ -ra megoldandó

Nálunk:

$$\mathcal{L}(N_1, N_2, \dots, N_k, \lambda) = \ln W(N_1, N_2, \dots, N_k) + \lambda \left[\sum_i N_i - N \right]$$

sűrűségű felt: $d\mathcal{L}(N_1, N_2, \dots, \lambda) = 0$ $k+1$ egyenlet

$$\ln W = N \ln N - N - \left[\sum_i N_i \ln N_i - N_i \right] = N \ln N - \sum_i N_i \ln N_i$$

egyenletek N_1, N_2, \dots : folytonos változónak tekinteni!

$$\frac{\partial \ln W}{\partial N_i} + \lambda \frac{\partial \sum_i N_i}{\partial N_i} = - \ln N_i - 1 + \lambda = 0$$

1 -et elhanyagoljuk

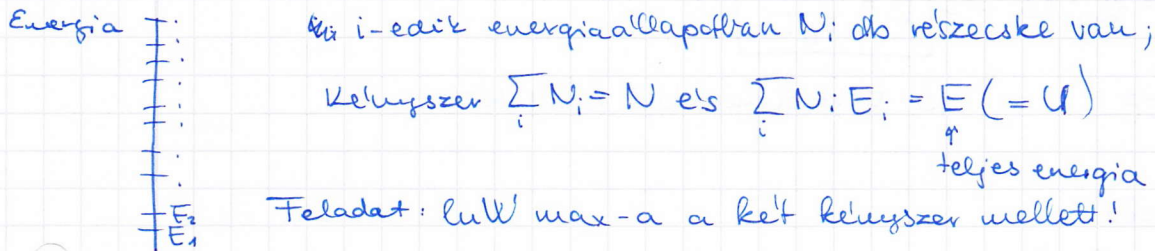
$\rightarrow \ln N_i = \lambda$ minden N_i egyenlő

$$\text{és } N_i = e^\lambda \text{ és } N_i = \frac{N}{k} = e^\lambda$$

\forall dobozban azonos számú részecske van

2. modell: Maxwell-Boltzmann eloszlás

A részecskéket az energiájuk szerint rendezzük be



$\ln W$ var mint eddig

$$\mathcal{L}(N_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2) = \ln W(N_1, \dots, N_k) + \lambda_1 \left(\sum_i N_i - N \right) + \lambda_2 \left(\sum_i N_i E_i - E \right)$$

Egyenletrendszer: $\frac{\partial \ln W}{\partial N_i} + \lambda_1 + \lambda_2 E_i = 0$ ($k+2$ egyenlet)

$$- \ln N_i + \lambda_1 + \lambda_2 E_i = 0 \rightarrow \ln N_i = \lambda_1 + \lambda_2 E_i \text{ nem egyenlők!}$$

E_i -lél függ

$$\boxed{N_i = e^{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2 E_i}}$$

Legyen $A = e^{\lambda_1}$ és $\beta = -\lambda_2$ és $\sum_i N_i = N \rightarrow A \sum_i e^{-\beta E_i} = N \rightarrow A = \frac{N}{\sum_i e^{-\beta E_i}}$

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i} \rightarrow \text{állapotösszeg!}$$

ha E_i ismert $\rightarrow Z$ ismert

↳ innen
$$N_i = \frac{N}{Z} e^{-\beta E_i}; \quad p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$$

↑
i-edik szint betöltési valószínűsége

V.ö.: barometrikus magasságformula $e^{-\frac{mgh}{k_B T}}$

Entropia M-B eloszlása

$$S = k_B \ln W = N \ln N - N - \left[\sum_i N_i \ln N_i - N_i \right] = N \ln N - \sum_i N_i \ln N_i$$

beírva: $N_i = \frac{N}{Z} e^{-\beta E_i}$

$$\begin{aligned} \ln W &= N \ln N - \frac{N}{Z} \left[\sum_i e^{-\beta E_i} \cdot \ln \left(\frac{N}{Z} e^{-\beta E_i} \right) \right] = N \ln N - \frac{N}{Z} \ln \left(\frac{N}{Z} \right) \underbrace{\sum_i e^{-\beta E_i}}_Z - \frac{N}{Z} \underbrace{\sum_i e^{-\beta E_i} \cdot (-\beta E_i)}_{-\beta E} \\ &= N \ln N - N \ln N + N \ln Z + \beta E \end{aligned}$$

$\ln W = N \ln Z + \beta E$ és $S = k_B \ln W = k_B N \ln Z + k_B \beta E$ (*)

F.E.: $\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{V \uparrow} = k_B \beta \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{k_B T}}$

$U \equiv E$

β : termodinamikai hőmérséklet

Ezzel a M-B eloszlás:

$$N_i = \frac{N}{\sum_j e^{-\frac{E_j}{k_B T}}} \cdot e^{-\frac{E_i}{k_B T}} \left. \begin{array}{l} \text{nagy } T\text{-n lesznek} \\ \text{nagy energiájú állapotok} \\ \text{betöltve} \end{array} \right\}$$

Gibbs-féle energia formula M-B eloszlására

$$\frac{S}{N} = -k_B \sum_i p_i \ln p_i \quad \text{ahol } p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$$

$$\begin{aligned} \ln p_i &= -\ln Z - \beta E_i \quad \text{beírva } \frac{S}{N} = -k_B \sum_i p_i (-\ln Z - \beta E_i) = k_B \ln Z + k_B \beta \frac{E}{N} \\ \sum_i p_i E_i &= \frac{E}{N} \end{aligned}$$

V.ö. (*)-gal! ugyanaz

Boltzmann és Gibbs formula azonos

eredményt ad!

Kvantumstatistikák

Boltzmann $p(E) \sim e^{-\frac{E}{k_B T}}$

Tapasztalat szerint: két fajta részecske van

adott energiaszinten
(kvantumállapotban)

csak 1 részecske lehet

tetszőleges számú lehet

↓
fermionok

↓
bozonok

feles spinű

egész spinű

e^- , kvarkok
neutrínó

foton, gluon, W^\pm , Z^0

Fermionok statisztikája:

i -edik állapotban 0 v. 1 lehet

p_0 : i -edik állapot nincs betöltve

p_1 : — i — be van töltve (1x)

All: $\frac{p_1}{p_0} = e^{-\beta E}$, E a köbtelekenergia ha i -edik áll. be van töltve

↑ Boltzmann-Ansatz

$$p_0 + p_1 = 1$$

E, β fix $\rightarrow p_0, p_1$ 2 ismeretlen

M₀:

$$p_0 = \frac{1}{1 + e^{-\beta E}} ; p_1 = \frac{e^{-\beta E}}{1 + e^{-\beta E}} = \frac{1}{e^{\beta E} + 1}$$

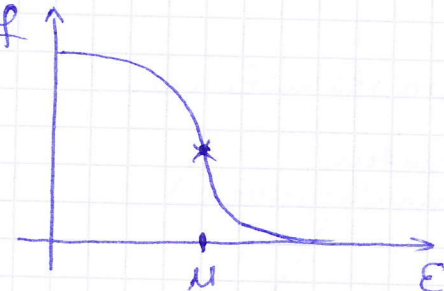
Befölleés valószínűsége

$$\langle n \rangle = 0 p_0 + 1 p_1 = \frac{1}{e^{\beta \epsilon} + 1} \leftarrow \text{Fermi-Dirac eloszlás f.}$$

reges kémiai potenciálra

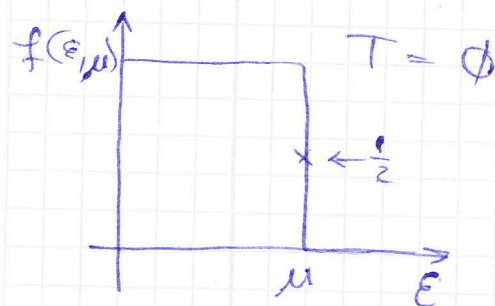
$$f(\epsilon, \mu) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1}$$

↑
n állapotenergia



$T \rightarrow \phi$ esetben

$$\frac{\epsilon - \mu}{k_B T} \xrightarrow{T \rightarrow \phi} \begin{cases} -\infty & \text{ha } \epsilon < \mu \\ +\infty & \text{ha } \epsilon > \mu \end{cases}$$



Bozondok statisztikája

- minden állapot többszörösen be lehet töltve $N = 0, 1, \dots, \infty$
- $T \mu$. már n -szeresen be van töltve egy állapot, p_n valósz.
- + 1 részecske, + ϵ energia

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = e^{-\beta \epsilon} \rightarrow n+1 \text{ db egyenlet}$$

↑
Boltzmann - Ansatz

$$\sum_{i=0}^{n+1} p_i = 1$$

$$\frac{+1 \text{ egyenlet}}{n+2 \text{ db egyenlet}}$$

p_{n+1} : $n+2$ db ismeretlen

Megoldás:

$$P_n = \frac{e^{-n\beta\epsilon}}{1 + e^{-\beta\epsilon} + e^{-2\beta\epsilon} + \dots + e^{-n\beta\epsilon}}$$

végtani sor:

$$\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Biz.: trivialis

$$\text{nevező értéke: } Z = 1 + e^{-\beta\epsilon} + e^{-2\beta\epsilon} + \dots + e^{-n\beta\epsilon} = \frac{e^{-(n+1)\beta\epsilon} - 1}{e^{-\beta\epsilon} - 1}$$

$$\text{ha } n \rightarrow \infty: Z = \frac{1}{1 - e^{-\beta\epsilon}}$$

A betöltés várható értéke

$$\langle n \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot e^{-i\beta\epsilon}$$

$$\frac{\partial e^{-i\beta\epsilon}}{\partial(-\beta\epsilon)} = i e^{-i\beta\epsilon}$$

$$P_i = \frac{e^{-i\beta\epsilon}}{Z}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial(-\beta\epsilon)} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} e^{-i\beta\epsilon}}_{\frac{1}{1 - e^{-\beta\epsilon}}} = \frac{1}{Z} \frac{\partial \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta\epsilon}} \right)}{\partial(-\beta\epsilon)} =$$

$$= \frac{1}{Z} \frac{(-1) \cdot (-1) \cdot e^{-\beta\epsilon}}{(1 - e^{-\beta\epsilon})^2} = \frac{1 - e^{-\beta\epsilon}}{(1 - e^{-\beta\epsilon})^2} e^{-\beta\epsilon} =$$

$$= \frac{e^{-\beta\epsilon}}{1 - e^{-\beta\epsilon}} = \boxed{\frac{1}{e^{\beta\epsilon} - 1}} \leftarrow \text{Bose-Einstein eloszlás fv.}$$

Összefoglalás:

F-D:

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta\epsilon} + 1}$$

fermionok

B-E:

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta\epsilon} - 1}$$

bozonok

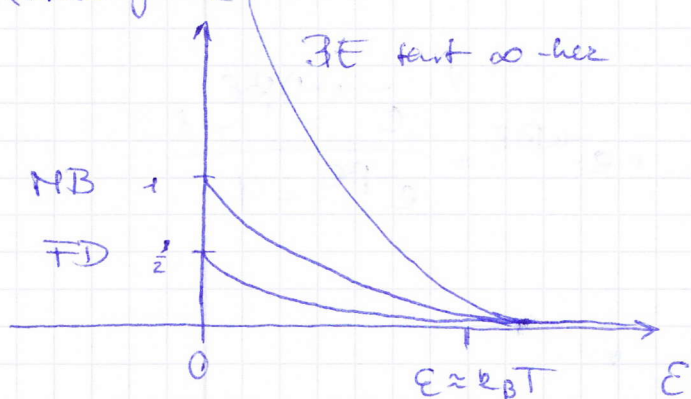
M-B:

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta\epsilon}} = e^{-\beta\epsilon}$$

klasszikus

Ha $E \gg k_B T$ akkor FD és BE is MB-hoz tehető

Abbról az $e^{\beta E}$ ha $\gg 1$ akkor $\frac{1}{e^{\beta E} + 1} \approx e^{-\beta E}$



Termodinamikai potencial

U: belső energia

H: entalpia

F: szabadenergia (Helmholtz-féle sz. e.)

G: Gibbs potencial, szabadentalpia, Gibbs-féle szabadenergia

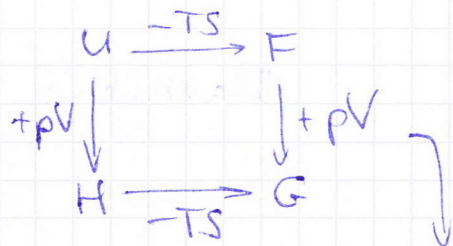
$$dU = TdS - pdV \quad (\text{FE.}) \quad \text{itt } U = U(S, V) \text{ extenzív}$$

$$H = U + pV \rightarrow dH = dU + d(pV) = TdS - pdV + Vdp + pdV = \underline{TdS + Vdp}$$

$$F = U - TS \rightarrow dF = dU - d(TS) = TdS - pdV - TdS - SdT = \underline{-SdT - pdV}$$

$$G = U - TS + pV = F + pV = H - TS$$

$$\hookrightarrow dG = dU - d(TS) + d(pV) = \underline{-SdT + Vdp}$$



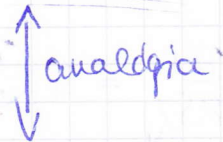
↳ Legendre - transz.

Lagrange - fv, harm. osc.

$$L = \frac{1}{2} \frac{mv^2}{\frac{p^2}{m}} - \frac{1}{2} D x^2 \Leftrightarrow L(v, x)$$

$$L \rightarrow H(p, x) = L(v, x) - p v = -\frac{1}{2} D x^2 - \frac{p^2}{2m} \quad v \leftrightarrow p \text{ cseré!}$$

Termod. potenciálek



mechanikai } potenciál; megmaradó mennyiségek
elektrosztat. }
"energiát tesznek bele, majd ki is vehetik"

U: S és V változdi (csal ext) \rightarrow részecskék összes mechanikai energiája

H: S és p, mert $dH = T dS + V dp \rightarrow$ kelvina! $dH = \delta Q_p$

F: T és V, mert $dF = -S dT - p dV \rightarrow$ gépészet, rendszerből maximálisan
leinyerhető mechanikai munka

G: T és p, mert $dG = -S dT + V dp \rightarrow$ biológia, "nem termikus és nem
mechanikai munkavégzés"

$$G = \mu n \text{ (jón!)}$$

Új fogalom: fundamentális fv.

\rightarrow a termodin. potenciál a saját, természetes változdival kifejezve

$$U = U(S, V) \checkmark \text{ de } U(T, V) \text{ nem fund. fv.!}$$

$$H = H(S, p)$$

$$F = F(T, V)$$

$$G = G(T, p)$$

Fundamentális fu-é deriváltak:

$$\left. \begin{aligned} dU &= Tds - pdV \\ dH &= Tds + Vdp \\ dF &= -SdT - pdV \\ dG &= -SdT + Vdp \end{aligned} \right\} \text{fundamentális (Törvény!) egyenletek}$$

Utalak

$$U = U(S, V) \rightarrow dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V ds + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S dV \rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = T; \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -p$$

$$H = H(S, p) \rightarrow dH = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p ds + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S dp \rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p = T; \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S = V$$

$$F = F(T, V) \rightarrow dF = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T dV \rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S; \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -p$$

$$G = G(T, p) \rightarrow dG = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T dp \rightarrow \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S; \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = V$$

Ezek állapotegyenletek! pl: S és T nem füglen!

Második deriváltak (Maxwell-relekciók)

$$\text{Young-tétel: } \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} = \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} \rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V$$

$$\text{H-ből: } \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p$$

$$\text{F-ből: } -\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

$$\text{G-ből: } -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

$$\text{Ezek között mérhetőek: } \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = V \beta_p$$

$$\text{innen } -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = V \beta_p \quad \downarrow$$

↓
Gyakorlat pe.: id. gáz

$$S(p, V) = S_0(p_0, V_0) + n C_V \ln \frac{p}{p_0} + n C_p \ln \frac{V}{V_0}$$

Bz. be: $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -V \beta_p$ id. gázra!

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = - \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T} = - \frac{\beta_p}{\kappa_T} \stackrel{\text{Maxwell}}{=} \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$$

Fundamentális termodinamikai tulajdonságai

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S \quad \text{és} \quad F = U - TS$$

innen $F = U + \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \cdot T$

pe. másikk $G = H - TS$ és $\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S$

innen $G = H + T \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p$

du. Gibbs-Helmholtz összefüggések!

Euler-egyenletek

Telexintriák egy λ szorosára növelt rendszer

$$\left. \begin{array}{l} X \rightarrow \lambda X \\ \text{int} \\ \xi \rightarrow \lambda \xi \\ \text{ext} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Teljeskörű} \\ \text{szint} \end{array} \quad \begin{array}{l} U = U(S, V, n) \rightarrow U(\lambda S, \lambda V, \lambda n) = \lambda U(S, V, n) \\ H = H(S, p, n) \rightarrow H(\lambda S, p, \lambda n) = \lambda H(S, p, n) \\ F = F(T, V, n) \rightarrow F(T, \lambda V, \lambda n) = \lambda F(T, V, n) \\ G = G(T, p, n) \rightarrow G(T, p, \lambda n) = \lambda G(T, p, n) \end{array}$$

Euler-tétel:

ha $f(x)$ -re igaz, hogy $\lambda f(x) = f(\lambda x) \forall \lambda$ -ra, akkor ennek egyetlen megoldása $f(x) = C \cdot x$ (homogén, lineáris egyenlet)

Biz.

Telexintriák

$$\frac{\partial f(\lambda x)}{\partial \lambda} = \frac{\partial f(\lambda x)}{\partial (\lambda x)} \frac{\partial (\lambda x)}{\partial \lambda} = f'(x) \cdot x$$

"
 $f(x)$

"
 $\frac{\partial f(\cdot)}{\partial \cdot}$

innen $f(x) = x \cdot f'(x)$

csak $f(x) = Cx$ -re lehet

Következő funk. fo.-re:

$$U = C_1 S + C_2 V + C_3 n \text{ lehet!}$$

$$\text{e's } \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, n} = C_1 \text{ stb.} \Rightarrow U = TS - pV + \mu n$$

$$H = U + pV \Rightarrow H = TS + \mu n$$

$$F = U - TS \Rightarrow F = -pV + \mu n$$

$$G = U - TS + pV \Rightarrow G = \mu n$$

Megj:

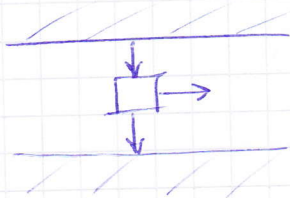
$$dU = TdS - pdV + \mu dn$$

Hőtan III. főtétel

(IV. főtétel \rightarrow Onsager-relációk)

Mohrvald: $S = S_0 + \dots$ mennyi $S(T=0) = ?$

- hasonlóan $U(T=0) = ?$
- Carnot körfolyamat



$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ mi lenne ha $T_2 = 0$?

akkor $\eta = 1$ lenne!

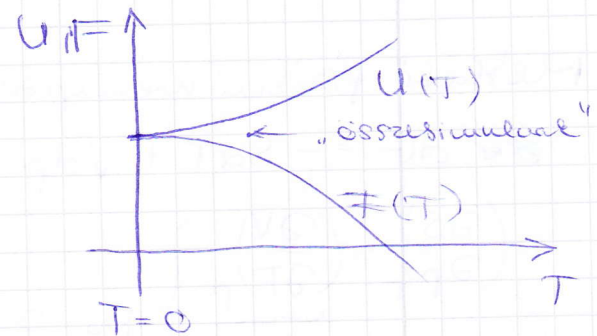
Kísérlet: Walther Nernst (1906 - 1912)

\rightarrow kémiai reakcióhő \rightarrow reakcióhő T csökkenésével csökken e's 0 -ba tart!

Planck általánosítja, matematizálja:

III. főtétel: $\lim_{T \rightarrow 0} U(T) = \lim_{T \rightarrow 0} F(T)$

e's $\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial U(T)}{\partial T} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial F(T)}{\partial T} \iff$ szimultetetés



Következtetés: $S = \frac{U - F}{T}$

$\lim_{T \rightarrow 0} S(T) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{U - F}{T} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial U}{\partial T} - \frac{\partial F}{\partial T}}{1} = 0$

↑ L'Hôpital ↑ Planck

\rightarrow entropia 0 -ba tart
($W=1$ alapállapot nem degenerált)

Fajls:

$S = S_0 + \int_0^T \frac{\delta Q^{rev}(T')}{T'} = S(T=0) + \int_0^T \frac{C(T')}{T'} dT'$



$\delta Q^{rev} = C(T) dT$

ez 0 -ba tart, ha $T \rightarrow 0$ -ba

$L \Rightarrow C(T)$ is legalább lineárisan nőben ϕ -ba tart

III. Főétel összefoglalása

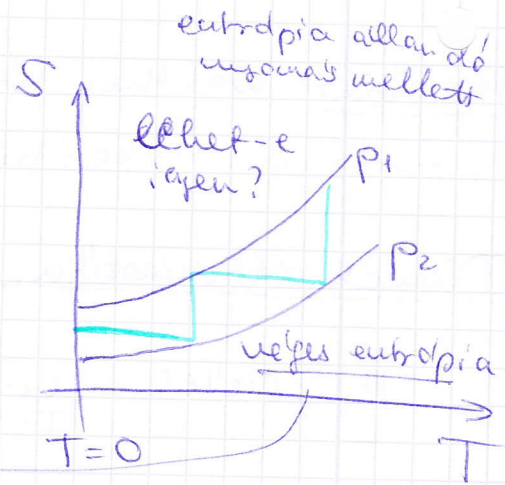
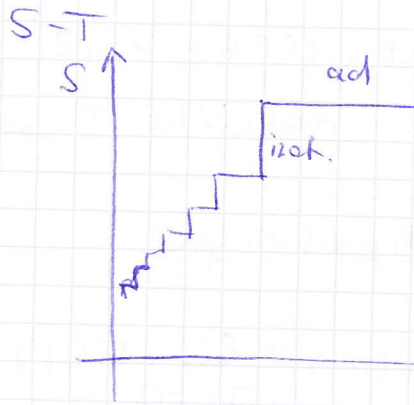
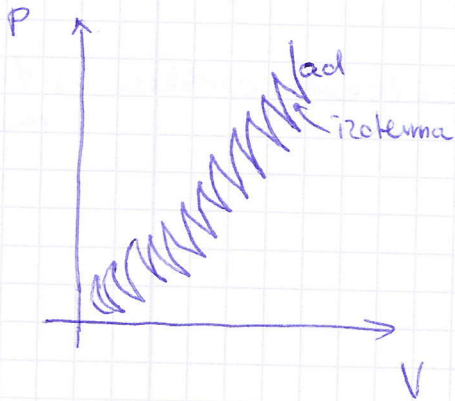
- Planck $U(T) = F(T)$ és $\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial F}{\partial T}$ (1)
 ha $T \rightarrow \phi$ ha $T \rightarrow \phi$

- $S(T=0) = 0$ (2)

- $\lim_{T \rightarrow 0} C(T) = 0$ (3)

- $T=0$ nem érhető el teljes számú lépésben.

Teljesítők $p-V$



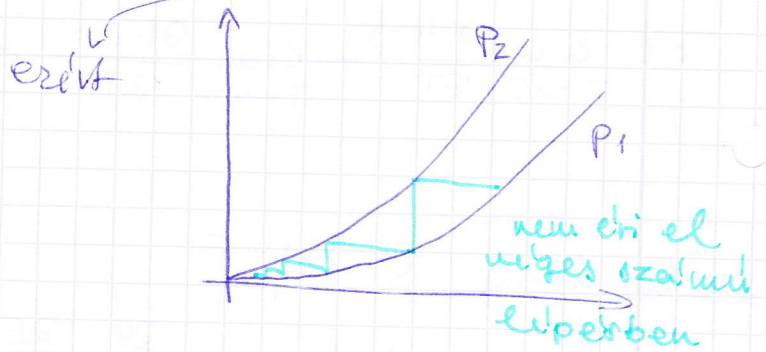
Melhető fizikai mennyiségek

$dG = -SdT + Vdp$

$-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$

$\beta_p = 0$ -ba tart
 használnak sok
 más egyéb is!

S deriváltjai
 is 0-ban
 tartanak



$V = \frac{nRT}{p} \rightarrow \frac{1}{T}$

volt, hogy $\beta_p = \frac{1}{T}$

láthatólag ellentmond
 valójában $pV = nRT$
 nem jó ha $T \rightarrow \phi$



1905. Kammerlingh - Onnes, oseppe F. He

$$T = 4,2 \text{ K}$$

^3He (Legett)

$\hookrightarrow 300 \text{ mK}$

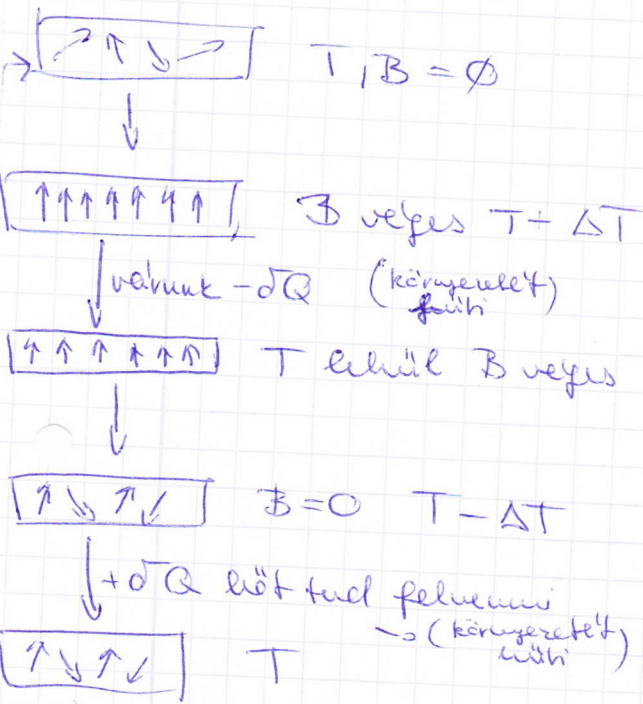
$^3\text{He} - ^4\text{He}$ keverék $\rightarrow 10 \text{ mK}$

- Adiabaticus lemagnesezés

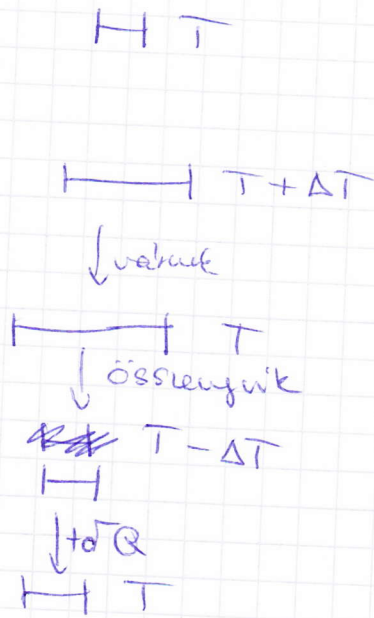
- létezős lütlek (1990-es) Bose-Einstein kondenzátum

$$10^{-9} \text{ K} = \underline{1 \text{ nK}}$$

Adiabaticus lemagnesezés



Gummiszalag



11.20

ÖF: Fund. potkė: $U(S, V, N)$

$$H = U + pV$$

$$G = H - TS$$

$$\phi = U - \mu N$$

$$F = U - TS$$

$$dF = dU - d(TS)$$

$$= dU - dT \cdot S - TdS =$$

$$= TdS - pdV + \mu dN - Ids - SdT =$$

$$= -SdT - pdV + \mu dN$$

$$dU = TdS - pdV + \mu dN$$

$$dH = TdS + Vdp + \mu dN$$

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN$$

$$d\phi = TdS - pdV - N d\mu$$

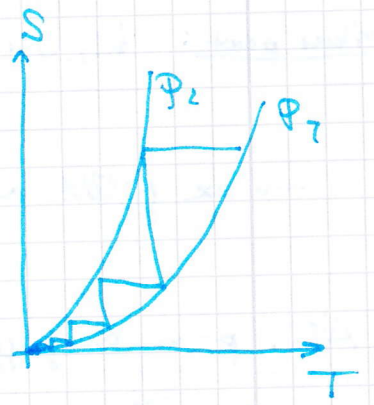
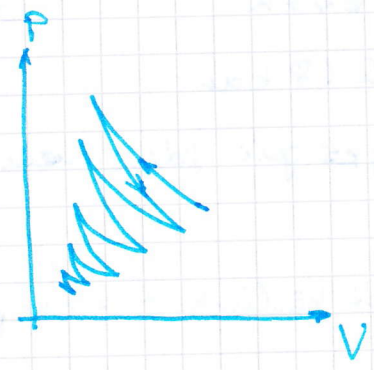
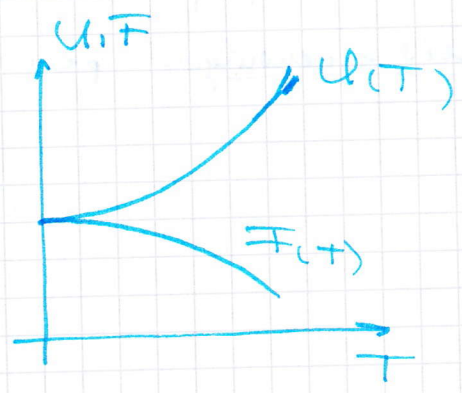
III. pöketel:

$$\lim_{T \rightarrow 0} U(T) = \lim_{T \rightarrow 0} F(T)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial T} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial T}$$

$$F = U - TS \rightarrow S = \frac{U - F}{T}$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0$$



Fizisátalakulások

halmazállapot ~~állapot~~:



Fázis: \forall halmazáll. vált. fizisátalakulás;

fordítva nem feltétlenül \rightarrow ferromágneses rendeződés;

szupervezetés; szuperfolyékonyság

Fázishatár: fizikai tulajdonságok itt ugrásszerűen megváltoznak

Halmazáll. vált.: reverzibilis, $p-T$ diagrammal

Hármaspont: 3 fázis egyensúlya p_H : H_2O : $p_H = 610,6 \text{ Pa}$

$$T_H = 273,16 \text{ K}$$

$$CO_2: T_H = -56,6^\circ C$$

$$p_H = 51 \text{ bar}$$

$$1 \text{ bar} = 100 \text{ kPa}$$

Kritikus pont: H_2O : $T_K = 647 \text{ K}$

$$CO_2: T_K = 31^\circ C$$

$$p_K = 218 \text{ bar}$$

$$p_K = 72,8 \text{ bar}$$

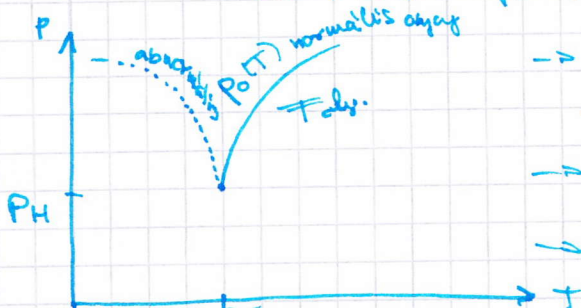
\rightarrow ez fölött a folyékony gáz fázis nem megkülönböztethető

1. All. $p-n$ anyaggal hő körlinke \rightarrow cseppfoly, megolvad

$$T = \text{all}$$

\rightarrow olvadáshő, fagyáshő

\rightarrow molekulák közi kötések felbontása a fordítottik az energia



\rightarrow görbék fázis egyensúly von

\rightarrow két gáz koexistenciája

\rightarrow normális: olvadáshő kapul

\rightarrow abnormalis: fagyáshő kapul

Le Chatelier-Bräu-elv.

A rendszer külső hatásra úgy reagál, hogy a hatást csökkenti.

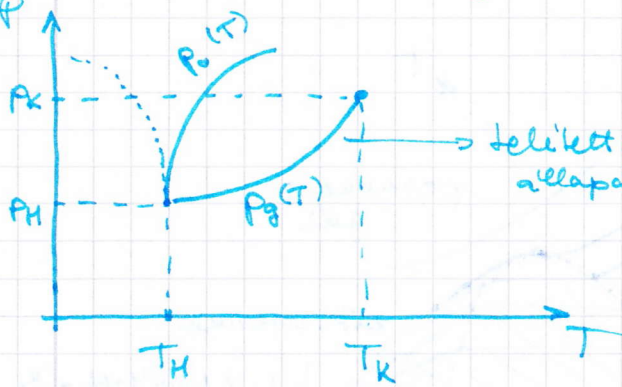
pl: jéget megmunkunk \rightarrow jég megolvad (olv. pont lecsökken)

\downarrow
hőf. csökke.

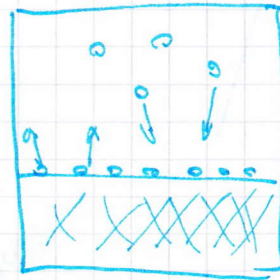
\downarrow
erőhatás lecsökken

normális esetben: $p \uparrow \rightarrow T_{olv} \uparrow \rightarrow$ még több fagy meg $\rightarrow V \downarrow \rightarrow$ erőhatás csökken

2. párolgás \leftrightarrow cseppfolyósodás



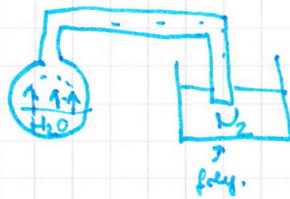
\rightarrow telített gáz állapot \rightarrow dinamikus egyensúly



időegység alatt elpárolgó rész talma
= lecsapódó rész talma

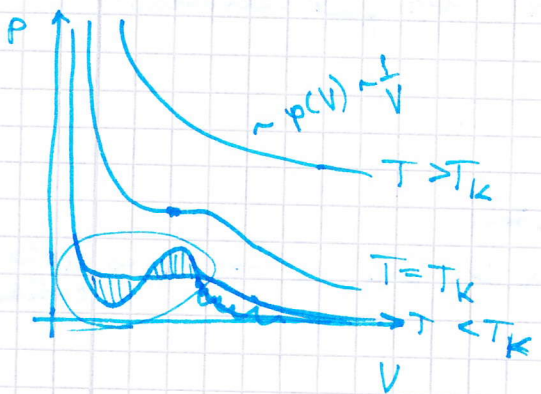
Hétköznapi:

- dezodor \rightarrow gyorsan elpárolgó permet \rightarrow lekiél
- "windchill"
- lenyófor

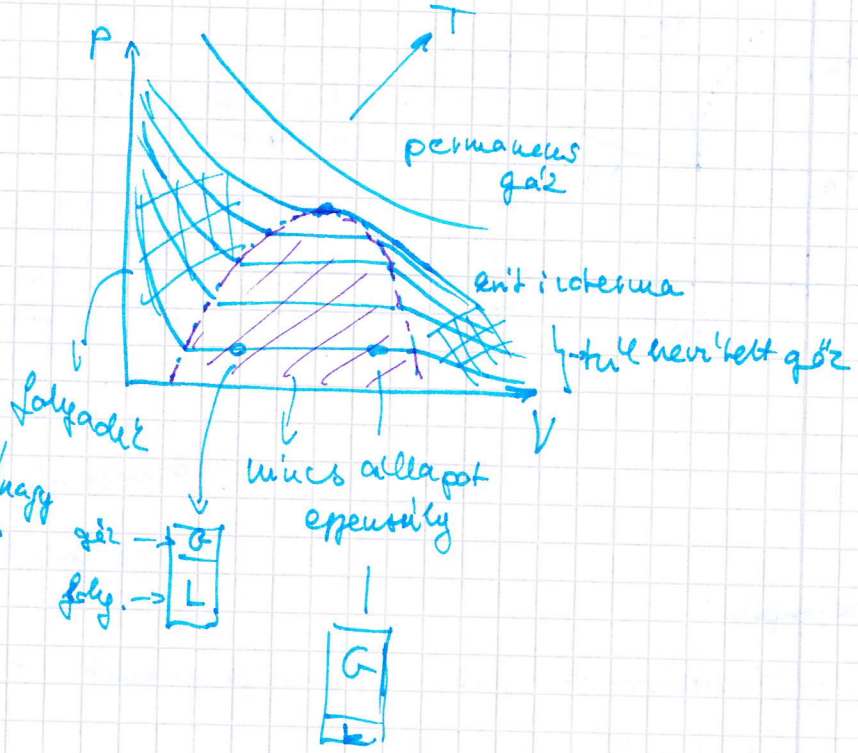
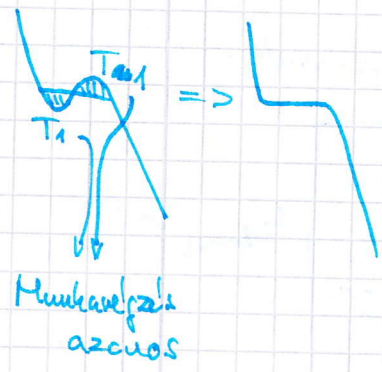


- fagyantásos érzet telemtől

$$VdW: \left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$



Maxwell - konstrukció



"összevonhatóan" foly.

$\frac{dp}{dV}$ nagy

pe:

LPG - liquefied petroleum gas

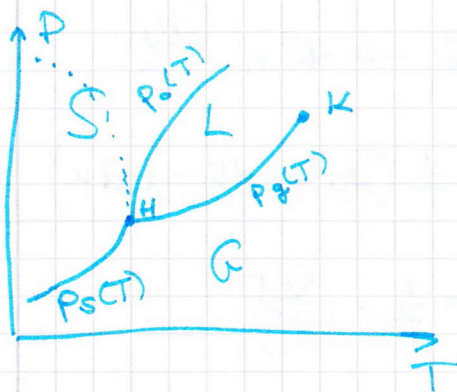
$T_K = 36^\circ C$
 $p_K = 30 \text{ bar}$

propán-bután

CNG → metán $p_K = 45 \text{ bar}$
 Compressed natural gas $T_K = -82^\circ C$

LNG → $-120^\circ C$
 liquefied natural gas

③ Szilárd - gáz átmenet (szublimáció/kondenzáció)



Mikor van kritikus pont?

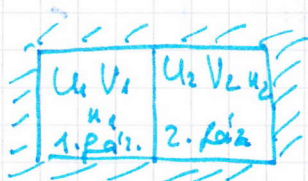
↳ \neq rendezett - rendezetlen átmenet

Mikor nincs krit. pont?

↳ \neq rendezett - rendezetlen átmenet

Fázisegyensúly feltétele

pl. kükta \rightarrow víz - gőz egyensúly



Zárt rendszer

$$U = U_1 + U_2 = \text{const.}$$

$$V = V_1 + V_2 = \text{const.}$$

$$n = n_1 + n_2 = \text{const.}$$

Egyensúly felt.: $S = \text{const.} = \text{max} \rightarrow dS = 0$

$$S = S_1(U_1, V_1, n_1) + S_2(U_2, V_2, n_2)$$

3 velt. $\rightarrow dU_1 = -dU_2$

$$dV_1 = -dV_2$$

$$dn_1 = -dn_2$$

$$dS = \left[\frac{\partial S_1}{\partial U_1} \Big|_{V_1, n_1} - \frac{\partial S_2}{\partial U_2} \Big|_{V_2, n_2} \right] dU_1 +$$

$$+ \left[\frac{\partial S_1}{\partial V_1} \Big|_{U_1, n_1} - \frac{\partial S_2}{\partial V_2} \Big|_{U_2, n_2} \right] dV_1 +$$

$$+ \left[\frac{\partial S_1}{\partial n_1} \Big|_{U_1, V_1} - \frac{\partial S_2}{\partial n_2} \Big|_{U_2, V_2} \right] dn_1 = 0$$

seth. dU_1, dV_1, dn_1

$$dS = 0 \iff \forall x_i = 0$$

$$\left. \frac{\partial S_1}{\partial u_1} \right|_{V_1, n_1} = \left. \frac{\partial S_2}{\partial u_2} \right|_{V_2, n_2}$$

$$dU \propto T dS \rightarrow dS \propto \frac{dU}{T}$$

$$dS = \frac{1}{T} (du + p dv - \mu dn)$$

$$\left. \frac{\partial S_1}{\partial V_1} \right|_{u_1, n_1} = \left. \frac{\partial S_2}{\partial V_2} \right|_{u_2, n_2}$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial u} \right|_{V, n} = \frac{1}{T} = \left(\frac{\partial u^{-1}}{\partial S} \right)$$

$$\left. \frac{\partial S_1}{\partial n_1} \right|_{u_1, V_1} = \left. \frac{\partial S_2}{\partial n_2} \right|_{u_2, V_2}$$

$$T_1 = T_2$$

$$p_1 = p_2$$

$$\mu_1 = \mu_2$$

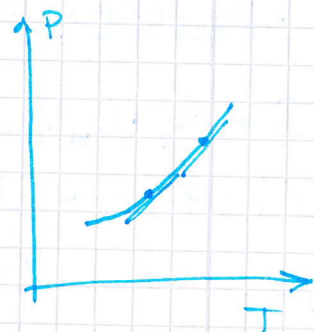
általános
termodinamika
egyenletje

Fazisváltás. és Clausius-Clapeyron-egy.

Fazisváltás:

$$p_1 = p_2, T_1 = T_2, \mu_1(T, p) = \mu_2(T, p)$$

$p(T)$ leírja



$$0 = d\mu_1 = \left. \frac{\partial \mu_1}{\partial T} \right|_p dT + \left. \frac{\partial \mu_1}{\partial p} \right|_T dp = \left. \frac{\partial \mu_2}{\partial T} \right|_p dT + \left. \frac{\partial \mu_2}{\partial p} \right|_T dp = d\mu_2 = 0$$

$$\left(\left. \frac{\partial \mu_1}{\partial T} \right|_p - \left. \frac{\partial \mu_2}{\partial T} \right|_p \right) dT = \left(\left. \frac{\partial \mu_2}{\partial p} \right|_T - \left. \frac{\partial \mu_1}{\partial p} \right|_T \right) dp$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dT} = \frac{\left. \frac{\partial \mu_1}{\partial T} \right|_p - \left. \frac{\partial \mu_2}{\partial T} \right|_p}{\left. \frac{\partial \mu_1}{\partial p} \right|_T - \left. \frac{\partial \mu_2}{\partial p} \right|_T}$$

Maxwell eq:

$$\frac{d\mu}{dT} = \left. \frac{\partial \mu}{\partial p} \right|_T \frac{dp}{dT} + \left. \frac{\partial \mu}{\partial T} \right|_p$$

$$\left. \frac{\partial \mu}{\partial T} \right|_p ; \left. \frac{\partial \mu}{\partial p} \right|_T$$

$$G = U - TS + pV = \mu n$$

$$\uparrow$$

$$TS - pV + \mu n$$

$$\left. \frac{\partial G}{\partial N} \right|_{p,T} = \mu ; \left. \frac{\partial G}{\partial p} \right|_{T,N} = V ; \left. \frac{\partial G}{\partial T} \right|_{p,N} = -S$$

$$\mu = \frac{G}{n}$$

$$\left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_{p,T} = \mu ; \left. \frac{\partial \mu}{\partial p} \right|_{T,n} = V_M ; \left. \frac{\partial \mu}{\partial T} \right|_{p,\mu} = -S_M$$

$$\boxed{\frac{dp}{dT} = \frac{S_{M2} - S_{M1}}{V_{M2} - V_{M1}} = \frac{Q_{M12}}{T(V_{M2} - V_{M1})}}$$

Lätens lö: $Q_{M12} = L$

$$\Delta S = \frac{Q}{T} \iff \Delta S_M = \frac{Q_{M12}}{T}$$

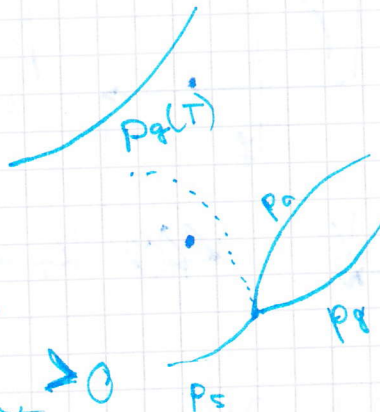
$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

1.)

$$V_{ML} \ll V_{MG}$$

$$fdy \rightarrow gdy \quad Q_{M12} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dT} > 0$$



2.) fdy \rightarrow fdy ; $Q_{M12} > 0$

normalis: $V_{MS} \approx V_{ML} \rightarrow \frac{dp}{dT} > 0$
 nagy

abnormalis: $V_{MS} \approx V_{ML} \rightarrow \frac{dp}{dT} < 0$

3.) subtl.

vil \rightarrow göz

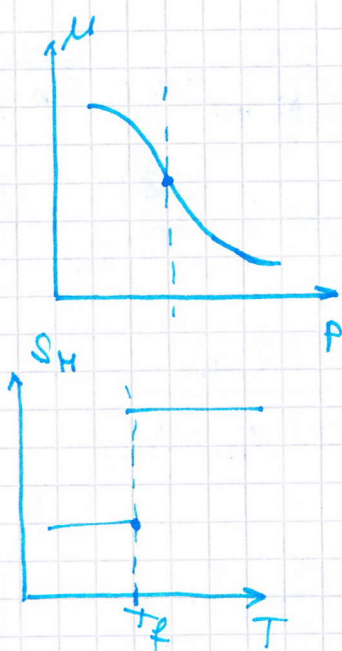
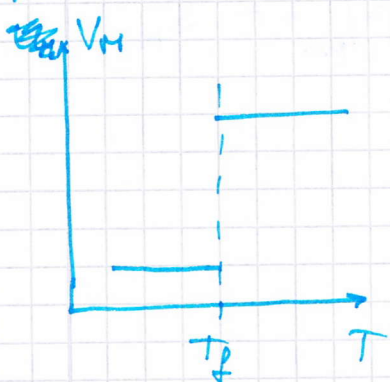
$$Q_{M12} > 0$$

$$V_{MS} \ll V_{MG} \rightarrow \frac{dp}{dT} > 0$$

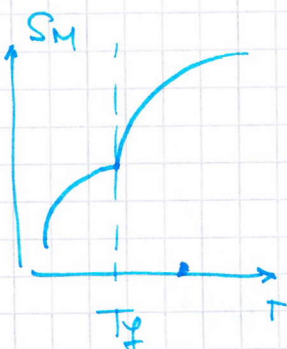
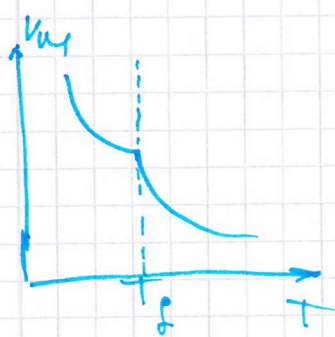
Fazisatalakulardaké oszályozés

Elsőrendű fazisátalakítások

$$\left. \frac{\partial \mu}{\partial p} \right|_T = V_M ; \quad \left. \frac{\partial \mu}{\partial T} \right|_p = -S_M$$



Másodrendű (polyfonus) fazisátalakítások



~~...~~

$$\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2} ; \frac{\partial^2 \mu}{\partial p^2} ; \frac{\partial^2 \mu}{\partial T \partial p} \right)$$

ugrand

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial p^2} \Big|_{T_{in}} = \frac{\partial V_M}{\partial p} \Big|_{T_{in}} = -\kappa + \frac{V}{T}$$

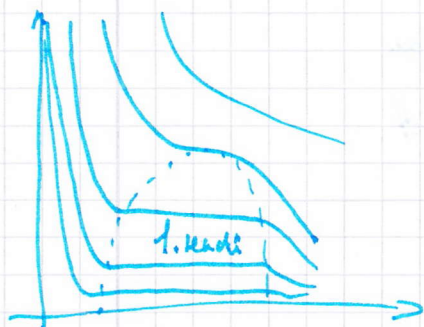
$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2} \Big|_{p_{in}} = - \frac{\partial S_M}{\partial T} \Big|_{p_{in}} = - \frac{\partial S_M}{\partial H} \Big|_{p_{in}} \frac{\partial H}{\partial T} \Big|_{p_{in}} = - \frac{C_p}{T}$$

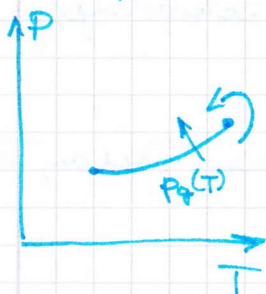
$$dH = U + pV$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial S_M} \right)_p \uparrow C_p$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial T} = \frac{\partial V_M}{\partial T} = \frac{1}{\tilde{v}} V \beta_A$$



Matsodrenniti faeris at.



pe .. ferromagnetics a'kenderöle's → matsodrenniti

11.27

Kvantummechanika

helye:

- mechanika (16-17. sz) - Newton, Lagrange, Hamilton
- elektrodinamika (19. sz) - Faraday, Oersted, Maxwell
- termodinamika (19. sz)
- speciális relativitáselmélet (1905) - Einstein
- általános relativitáselmélet (1916) - Einstein
- kvantummechanika (1920-as évek) - Bohr, Heisenberg, Schrödinger
- relativisztikus kvantummechanika (1928) - Dirac
- elektromos kölcsönhatás térelmélete (1950-es) - Feynman, Dyson, Tomonaga (röviden QED)
- elektron gyenge kölcsönhatás térelmélete (1970-es) - Salam, Glashow, Weinberg
- standard modell (erős, gyenge, elektr. kölcs.) (1960-2015) - Gell-Mann, Higgs
- próbálkozások: GUT (grand unified theory)
 - kvantumgravitáció, szuperszimmetria, szuperhúr

3 párhuzamos történet

1.) Elektromágneses sugárzás

- 1814. Fraunhofer: vonalas szűrőp a Nap spektrumában

(→ ez vezetett a Hélium felfedezéséhez is)

- 1859. Kirchhoff (Bunsen égő) → látható fény elnyelésében is speciális vonalak

→ ugyanígy bocsájt is ki sugárzást

- 1879. Josef Stefan → kibocsájtott teljesítmény az ún. fekete test sugárzásakor $\sim T^4$

- 1884. Boltzmann → termodin. + Maxwell → kiharozza $T^4 - t.$

~~1896~~
- 1896. Wien \rightarrow ún. eltolódási tv.

- 1900. Rayleigh-Jeans \rightarrow sugárzási tv.: kis frekvenciákra jó,

nagy frek.-re \rightarrow "ibolya katasztrófa"

- 1900. Max Planck (1918. Nobel) \rightarrow fekete test sugárzására jó empirikus íf-t ad
"kvantumhipotézis" \rightarrow "Hipotézis, a tapasztalat
dönti el, hogy igaz-e."

2.) Fény és anyag kölcs. (17. sz.: fény részecske - Newton)

- 17-18. sz. Huygens \rightarrow fény hullám (Huygens-Fresnel-elv)

- 1803. Th. Young \rightarrow kétréses kísérlet \rightarrow elhajlik, diffrakció

- 1887. Hertz: UV fény hatására felülről elektronok lépnek ki

- 1905. Lenárd Filöp \rightarrow fotoeffektus + kvantitatívan kimérte

- 1905. Einstein (1921 Nobel) \rightarrow elmélet \rightarrow elvez \ddagger

3.) Atommodellek

- i.e. 4. sz. Demokritosz "atomosz" \rightarrow legkisebb oszthatatlan egység

- 1838. Faraday \rightarrow katódsugárzás

- 1870. Mendeleev - féle periódusos rendszer

- 1880. Rydberg \rightarrow vonalas színkép formula

\rightarrow He felfedezése

- 1897. J. J. Thomson \rightarrow elektron felfedezése

- 1904. Thomson - atommodell - „szilvárpuding modell"

- 1909. szóráskísérletek \rightarrow α -részecske, aranyfolia
Geiger, Madsen, Rutherford

- 1911. Rutherford atommodell (19... Nobel)

- 1913. Bohr modell (1922 Nobel)

- 1914. Frank-Hertz kísérlet

- 1922. Stern - Gerlach kísérlet → elektron spinje
- 1924. De Broglie → anyag-hullámelmélet (1929 Nobel)
- 1927. Davissou - Germer kísérlet
→ De Broglie hipotézis bizonyítása
- 1926. Schrödinger (1933 Nobel)
- 1927. Heisenberg → határozatlansági-elv

Fekete test sugárzása

- megfigyelés: Kirchhoff anyag felvételére és kibocsátására összefügg (abszorpció) (emisszió)
- Ha az anyag termikus egyensúlyban van a környezetével és csak sugárzás révén cserél hőt a környezetével. (vákuumban)

$$\text{emisszió} \rightarrow e(\nu, T) = u(\nu, T)$$

$$\text{abszorpció} \rightarrow a(\nu, T)$$

ν : frekvencia

↳ univerzális fv., minden anyagra van ilyen

Ez Kirchhoff állítása

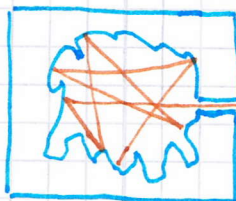
Abszolút fekete test koncepciója:

$$a(\nu, T) = 1 \text{ mindent elnyel} \rightarrow \text{kibocsátott fény } e(\nu, T) = u(\nu, T)$$

emisszió energiaspektruma

↳ spektruma azonos az univerzális fv.-el

Jó közelítés a fekete testre



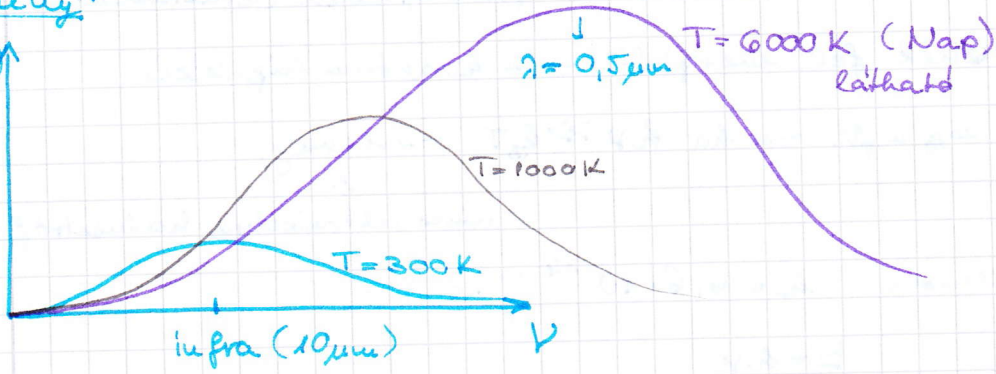
kis lyuk, belül elvadás

nem jön ki!



Eredmény:

$u(\nu, T)$



Görbe alatti terület:

$$\int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu = \sigma T^4 \rightarrow \text{Stefan-Boltzmann tv.}$$

$L > \text{Stefan-Boltzmann-állandó}$

maximum hely: $\lambda_{\text{max}} \cdot T = \text{állandó}$

Wien-féle eltolódási tv.

$$\frac{T}{\lambda_{\text{max}}} = \text{állandó}$$

Elméleti próbálkozás

Maxwell egyenletek

Rayleigh-Jeans

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} k_B \nu^2 T \leftarrow \text{elmélet}$$



eltér, ha $\nu \rightarrow \infty \rightarrow$ „ultraibolya katasztrófa”

Planck: fit!

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h \nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad \text{jó fit}$$

Bose-Einstein

Planck-féle sugárzási törvény

- az űrben oszcillátorok vannak (atomok rezegnek egyensúlyi helyzet körül)
- termikus egyensúlyban a környezettel, $\bar{E} = h\nu$

↓
 - Planck: az oszcillátorok csak $h\nu$ energiadagokban (kvantumokban) adnak le és vesznek fel energiát \longleftrightarrow kvantumhipotézis

ha $h\nu \approx k_B T$ id. vagy a f. \rightarrow ha $h\nu \gg k_B T \rightarrow$ levaló

↓
 nincs ultraibolya katasztrófa

\rightarrow $h \leftarrow$ Planck-állandó! $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J·s

$$E = h\nu$$

Planck-tör. \rightarrow deriváltak \rightarrow Wien-tör.

↓
 integráltak \rightarrow S-B tör.

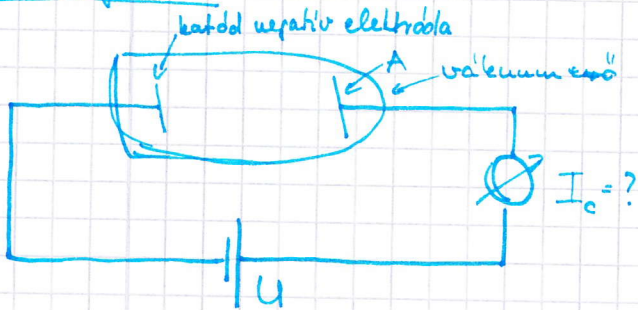
Planck. tör. $\nu \rightarrow \phi$

$$\lim_{\nu \rightarrow \phi} u(\nu, T) = \lim_{\nu \rightarrow \phi} \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3 \cdot k_B T}{h\nu} = \frac{8\pi}{c^3} k_B \nu^2 T$$

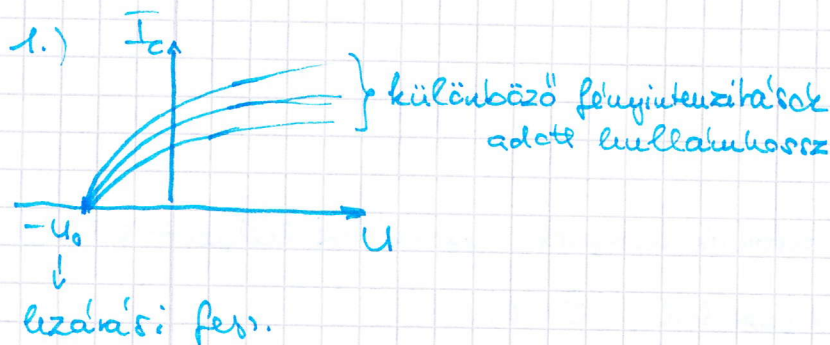
↑
mivel $u!$ \rightarrow R-I tör!

Fény és anyag kcsé.
Fotoeffektus

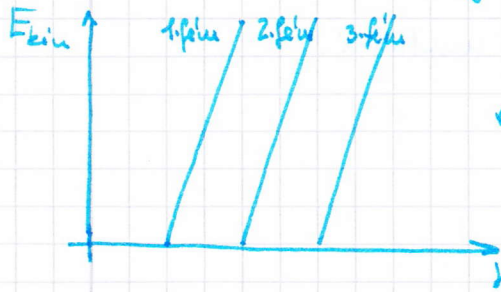
Katódcsugárzás



Eredmények:



2.) e^- -ek kinetikus energiája ν f ν -ébe



$$eU_0 = E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$$

E_{kin} : adott küszöbfrekvencia felett lineáris ν -e ν -vel

Megfigyelés

Klasszikus várakozás

fotoeffektus ν -tól függ
 pl.: IR- ν $I_0 = \phi$

Maxwell alapján az elektrom. sugárzás energiája ν -tól független!
 "e⁻ gyűjti az energiát \rightarrow egyszer csak kilép"
 \Rightarrow fotoeffektus elsősorban fény intenzitásától függne

van lezárási fesz., csak ν -tól függ, intenzitástól nem

pont fordítottja lenne

áram függ az intenzitástól

energia függ az intenzitástól

Einstein:

Vegyük a Planck-féle kv. hipotézist komolyan

Elektromágneses sugárzás csak $h\nu$ energiaadagokban terjed, részecskék, fotonok vannak

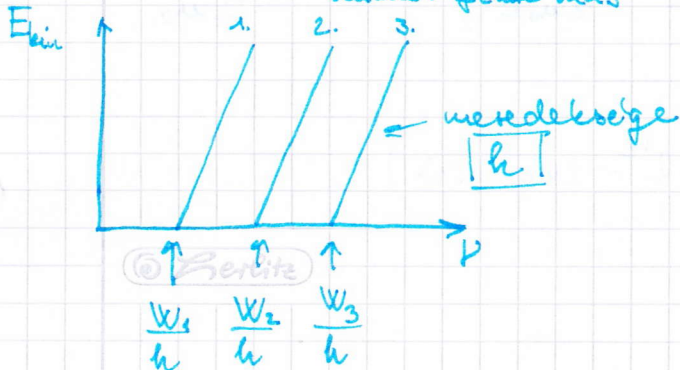
Egy foton egy e^- -t tud kiütni, ha energiája elég nagy.

$$E_{foton} = h\nu$$

$$\rightarrow E_{kin} = h\nu - W$$

↑
elektron

↑
kilépés: munka minden fémre más



Következmény:

fény egyszerre tud hullám és részecske természetet mutatni.

Impulzus fény:

$$E = h\nu \text{ és } E(p) = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

fényre $m_0 = 0 \rightarrow$ innen $E_{\text{fény}}(p) = p \cdot c = h\nu$

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

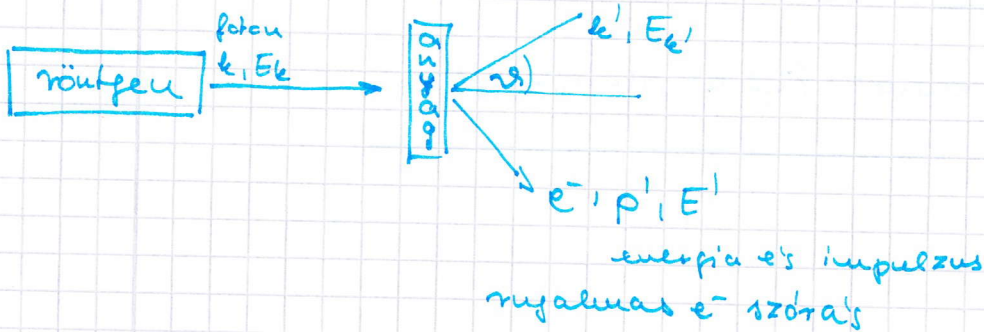
és $c = \lambda \cdot \nu$

bevezetve $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ innen $p = \frac{\hbar \cdot 2\pi}{\lambda} = \hbar k$

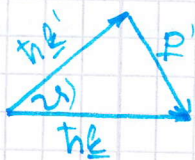
k : hullámtrópus

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Impulzus kiuntatása: (Compton - kísérlet)



imp. megmaradása



$$\hbar k = \hbar k' + p', \text{ cos k' fel}$$

$$p'^2 = \hbar^2 k^2 + \hbar^2 k'^2 - 2\hbar^2 k k' \cos 2\theta$$

- energiamegmaradás, kezdetben nyugvó e⁻

$$m_0 c^2 + E_k = E_k' + \sqrt{m_0^2 c^4 + p'^2 c^2} \quad (*)$$

$$\sqrt{m_0^2 c^4 + p'^2 c^2} = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{p'^2}{m_0^2 c^2}} \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{p'^2}{2m_0^2 c^2}\right) = m_0 c^2 + \frac{p'^2}{2m_0}$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

$$(*) \text{ átrendezve: } E_k - E_k' - \frac{p'^2}{2m_0} = \frac{\hbar^2}{2m_0} (k^2 + k'^2 - 2kk' \cos 2\theta)$$

cos k' fel



$$\left(\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} \right) = \frac{h^2}{2m_0c} \left[\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda'} \right)^2 - 2 \frac{(2\pi)^2}{\lambda\lambda'} \cos\alpha \right]$$

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} = \frac{h}{2m_0c} \left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda'^2} - \frac{2\cos\alpha}{\lambda\lambda'} \right] \quad | \cdot \lambda \cdot \lambda'$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{2m_0c} \left[\frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda'} - 2\cos\alpha \right] \quad ; \quad \text{egyen } \frac{\lambda}{\lambda'} \approx \frac{\lambda'}{\lambda} \approx 1$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos\alpha)$$

→ Kisérlettel jól igazolt

$$\lambda_{\text{Compton}} = \frac{h}{m_0c} \approx 10^{-11} \text{ m}$$

Compton-hulláhhossz

„olyan, mintha egy c-vel megozó
e⁻ impulzusa lenne a nevező”

$$\lambda = \frac{h}{p} \longleftrightarrow \text{V.ö.: } \lambda_{\text{felug}} = \frac{h}{p_{\text{felug}}}$$

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\lambda + \Delta\lambda}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda + \Delta\lambda} \approx$$

$$\approx 1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda} + 1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2$$

szorzás felírása

12.04

Ism:

$$\left. \begin{array}{l} E = h\nu \\ E = p \cdot c \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Planck} \\ \text{Einstein} \end{array} \quad \lambda = \frac{h}{p}; \quad \text{Compton} \quad \lambda_{\text{Comp}} = \frac{h}{m_0 c}$$

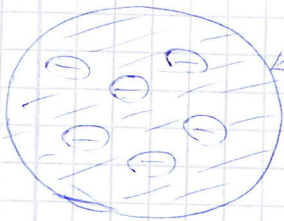
Atommodellek

- Thomson 1896: e^- -t felfedezi (Hartlein)
kisbemutató

• $\frac{e}{m}$ kísérlet

• e^- töltése Millikan $\rightarrow e^-$ negatív töltés, m kicsi

\rightarrow Thomson-féle (szilváspuding modell)



nagy tömegű, pozitív töltés

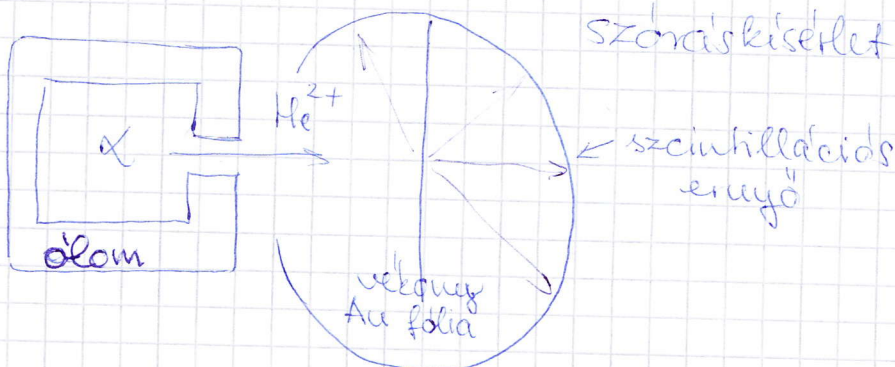
- Rutherford

- 1896. Becquerel \rightarrow (természetes) radioaktivitás

α : He^{2+}

β : e^-, e^+

γ : nagy energiájú foton

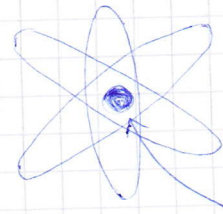


Rutherford: "olyan, mintha a kizérségi lövedékek egy papírlapról visszapattannának"

⇒ Rutherford atommodell 1911.

„Atomi Naprendszer”

Nobel díj



e^- (könyvi)

← 10^{-11} m → helyez (2000 x), kömértékű, tömeg 99,99 %

← 10^{-15} m → atommag } atommag sűrűsége 10^{12} szorosa a normál anyag sűrűségének

Bohr-modell

- Kísérlet: vonalas spektrum (Harklin kis.) 1880. Rydberg

- H atom spektrumában összefüggéseket talált elnyelt v. kibocsátott fény hullámhossza

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \text{ ahol } n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

Rydberg állandó

pl: $n_1=1$ és $n_2=2, \dots, \infty$ Lyman (UV)

$n_1=2$ és $n_2=3, \dots, \infty$ Balmer (VIS) látható

$n_1=3$ és $n_2=4, \dots, \infty$ Paschen (IR) infravörös

↳ energiaszintek kvantáltak

Bohr

- atomi Naprendszer problémái:

- keringő elektron sugározna
- a sugárzásnak folytonos lenne az energiaspektruma

Ad hoc hipotézis: (⇒ Ad hoc → en a problémára, adott esetben kéembe melle az ad hoc-sal)

- gyorsulva nem sugároz az elektron

- amikor két állapot között az e^- átugrik, akkor energiát nyel el vagy sugároz ki

© Bohr

- csak meghatározott pályák jöhetnek létre ↓

↓
kvantálási feltétel:

$$L = n\hbar, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad [h] = \text{J} \cdot \text{s} \quad \leftarrow \text{pulszíciót}$$

↑
impulzusmomentum

$$[h] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} = [\text{N}]$$

Hidrogén Bohr modellje:

(körpályán)

$$m_0 \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

$\vec{p} = m_0 \vec{v}$
 $m_p \gg m_e$

$$L = n\hbar \rightarrow m_0 v r = n\hbar$$

$$r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_0 v^2} \text{ beinjuk } m_0 v r = n\hbar$$

$$m_0 v \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_0 v^2} = n\hbar \Rightarrow v_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{n\hbar} \sim \frac{1}{n}$$

$$v_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \frac{c}{n}$$

α : finomszerkezeti állandó

$$\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \right] = \frac{\frac{\text{As}}{\text{m}} \frac{\text{A}^2 \text{s}^2}{\text{m}}}{\text{As} \frac{\text{VA} \text{s}^2}{\text{m}}} = 1 \text{ dimenziótlan}$$

$$\alpha \approx \frac{1}{137}$$

$$\text{innen } r_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2 n^2}{m_0 c^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \frac{\hbar c}{m_0 c^2} \cdot \frac{n^2}{c^2} = \frac{n^2}{2} \cdot \frac{\hbar}{m_0 c}$$

$\frac{\hbar}{2m_0 c}$
Compton

$$r_n = n^2 \cdot a_B$$

↓
Bohr-sugár

$$\frac{\hbar}{2m_0 c} = a_B \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ m} \approx 0.5 \text{ \AA}$$

Energia:

$$\frac{1}{2} m_0 v_n^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n} = \frac{1}{n^2} \left[\frac{m_0 c^2}{2} - \frac{\alpha \hbar c \cdot m_0 c}{\hbar} \right] =$$

↑ $\frac{\alpha c}{n}$ ↑ $r_n = n^2 \frac{\hbar}{2m_0 c}$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2 \hbar c}{\hbar c} = \alpha \hbar c$$

$$L = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} m_0 v^2 \cdot r^2 = -\frac{1}{n^2} r^2 \cdot \frac{1}{2} m_0 v^2$$

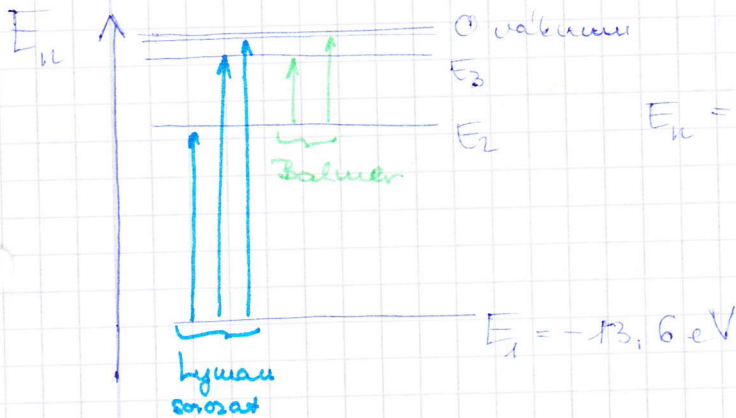
e^- nyugalmi energiája $\approx 5 \cdot 10^5 \text{ eV}$

ha $n=1$; $E_1 = -13,6 \text{ eV} \cdot 1 R_y = -13,6 \text{ eV}$

H atom stabil. $E_n < \phi$ kötött állapot

Balmer \rightarrow - H vonalás sűrűsége

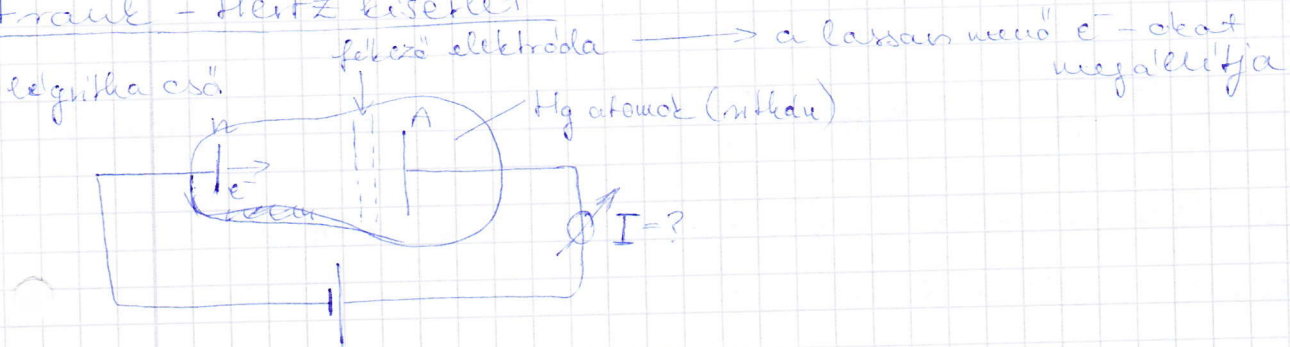
- stabil, pályák, diszkrét energiaértékek



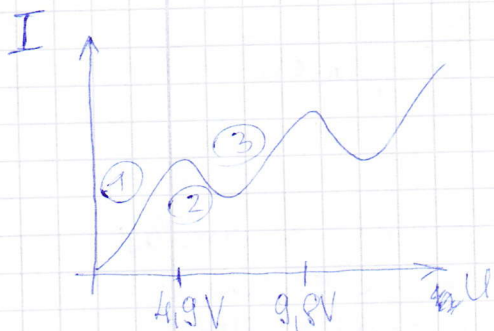
$$E_n = -\frac{R_y}{n^2}$$

visztaadja a Rydberg sorozat

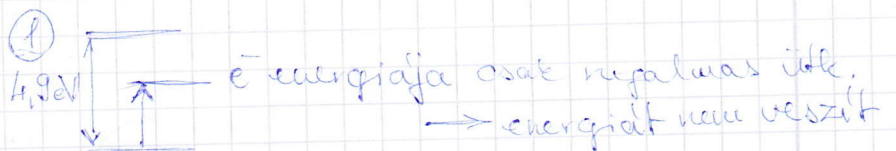
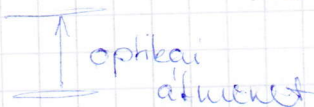
Fraun - Hertz kísérlet



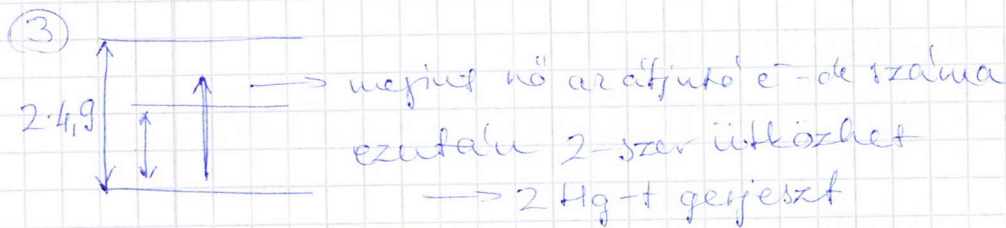
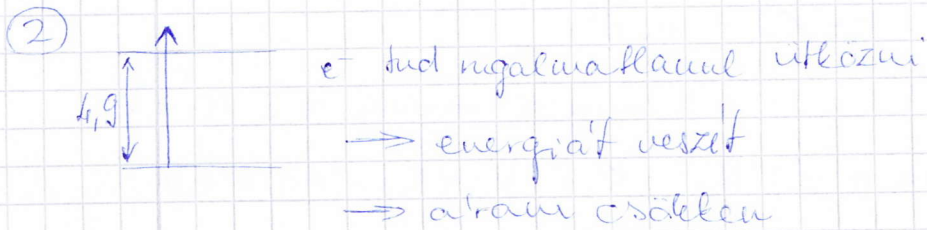
e^- -k gyorsulva mozognak \rightarrow ütköznek Hg-kal ütközhetnek



Hg-nak van 4,9 eV-os UV energiaátmenete (fényt kocsajt ki, ugyl el)



↓



Es a Hg a gerjesztés után 4,9 eV-os fényt bocsajt ki

Fraun - Hertz kísérlet

e^- állapotok az atomban valóban ott vannak,
 mechanikailag is gerjeszthetőek

de Broglie:

fótonra $\lambda = \frac{h}{p}$ → Legyen igaz e^- -ra (minden anyagra)

- e^- rendelkezik egyszerre anyag és hullámhosszúsággal
 "részecske - hullám dualitás"

ha ez igaz e^- -t gyorsítjuk $\frac{1}{2} m_0 v^2 = eU$ → $v = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}}$ → $p = \sqrt{2m_0 eU}$

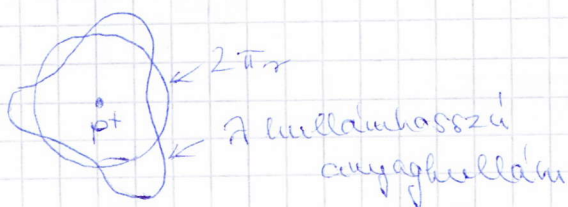
innen de Broglie alapján $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eU}}$

de Broglie + Bohr - modell: $L = nh$

$$m_0 v r = \frac{nh}{2\pi} \rightarrow 2\pi r = \frac{nh}{m_0 v} = n \frac{h}{m_0 v}$$

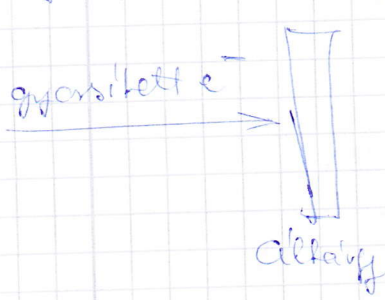
↑
de Broglie

innen Bohr-f. kvantálás
 ponton körül e^- anyag
 hullám adott körlete
 lehet csak



(Thomson) Davisson - Germer

- grafit elektrógon e^- diffrakció (Hörlein)



erősebb diffrakciók keletkeznek, mint fény + opt. rács
→ e^- -k hullámtervezéket is mutatnak

"1920-as évek programja"

- e^- hullámtervezéte → hullámegyenlet kell
- a megoldásoknak (kötött energiaszint) van fizikai tartalma, de a hullám fű. csak segédreennyirel

Feynmann: "Schrödinger egyenlet nem levezethető", csak Sol. fejtöböl patkút ki."

Hilbert: kvantált megoldások diff. egyenlet megoldásai: adótt peremfeltételekkel

Schrödinger - egyenlet "molekulált levezetése"

Legyen e^- anyaghullám 1D $\Psi(x,t) = A e^{i(kx - \omega t)}$

↑
hull.
fű.

↑
normálási faktor; k irányjel,
 ω körfrek. $k = \frac{2\pi}{\lambda}$; $\omega = 2\pi\nu$

3D $\Psi(\underline{r}, t) = A e^{i(\underline{k}\underline{r} - \omega t)}$

de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} \rightarrow p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

$$\text{és } E = h\nu = \hbar\omega \quad \text{Egyfelől}$$

$$\text{Másfelől } E = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0}$$

} k és ω benne van anyaghullámokban



↓
két energia kifejezést egyenlővé tesszük

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\omega \Psi ; \text{ és } \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k^2 \Psi$$

innen $\hbar\omega\Psi = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} \Psi \rightarrow i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \omega \Psi \quad \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} \Delta \Psi$$

Teljes időfüggő Schrödinger egyenlet:

1D $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$

3D $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \Psi$

Időfüggetlen Sch. egy.:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \Psi + V(x) \Psi = E \Psi$$

kin. energia operátora

H: Hamilton operátor

$$\boxed{H\Psi = E\Psi} \leftarrow \begin{array}{l} \text{eigenérték} \\ \text{egyenlet} \end{array}$$

↑
energia

$$p \cdot U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

Hidrogén atom \rightarrow Schrödinger megoldotta
Rydberg kijön!

1927. Bohr:

$|\Psi|^2$ -nek fizikai tartalma van: részecske megtalálási szög-e
adott térfogatban

normalizációs feltétel: $\int |\Psi(r)|^2 d^3r = 1$

teljes
térfogat



↓
pl: V térfogatban lévő szabad elektron

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} \cdot e^{ikr} \quad \text{stationárius}$$

szabad

Heisenberg-féle határozatlansági-elv
- nagy szemléletváltás

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$$

$$\text{vagy} \quad \Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$$

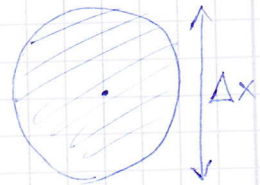
hely

bizonytalanság

impulzus

bizonytalanság

pl: H atom körüli e hol van?



Einstein-Bohr vita

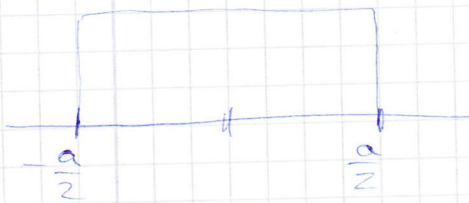
↓ vita eldöntése

1970. Bell-egyenletek

- ↳ szimuláció nyílt volt fordít (Einstein gondolat)
- ↳ valóban stohisztikus jelleg

Pekala

térszben lokalizált részecske hullámformája



$$\psi(x) = \text{recta}(x)$$

milyen síkhullámból keverehjük ki

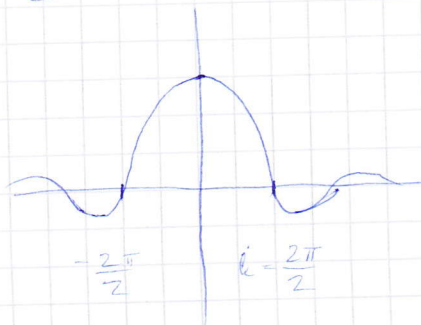
Fourier-transzformáció

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{recta}(x) e^{ikx} dx = \frac{\sin(\frac{ka}{2})}{\frac{ka}{2}} = \text{sinc}\left(\frac{ka}{2}\right)$$

cos x + i sin x

részecske $\Delta x = a$

hullámhossz $\rightarrow \Delta k_x = \frac{4\pi}{a}$



↓
innen $\Delta x \Delta p_x = h \neq 0$

szorozva h :

$$\boxed{\Delta x \Delta p_x \geq h}$$

Heisenberg határozatlansági-elv a hullámfunkciók
közötti következménye.

2.06

Kísérletek

Azok elvezettek a modern fizikához

1.) Prizma ^{szórás} fényvisszaverése

- mennyire közel felel a vörös és viola

↳ hűff, leggyakrabban a prizma diszperziója
(mennyire különbözik a törésmutatók)

↳ milyen közel van az enyge

→ infravörös → Hertz - hidrogén a sárga
rövidtávú a vörösön túlra is → az ultraviolet
a legjobban

2.) fény előtt egy rés → előrelétek egy optikai részlet

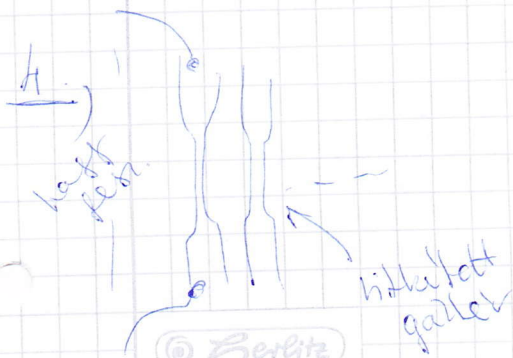
→ körben van

→ az egyet nagyobb "rendűkell" egy jobban
megfigyelhető a fény visszaverés



izzólámpa, fényes, Na lámpa

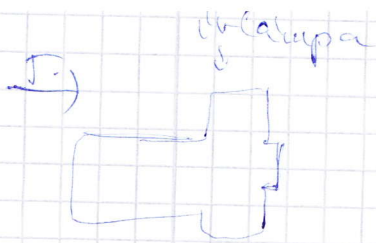
→
vonalas sűrűség



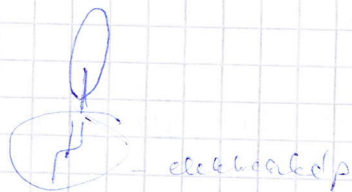
előrelétek, külön világhalál

→ ezeket a vonalas sűrűsége
keresték a magyarázatot

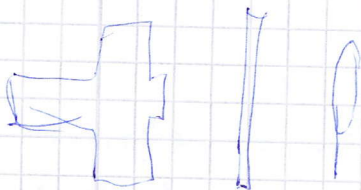
Hg, Neon, Argon, H, ...



Zin leuze



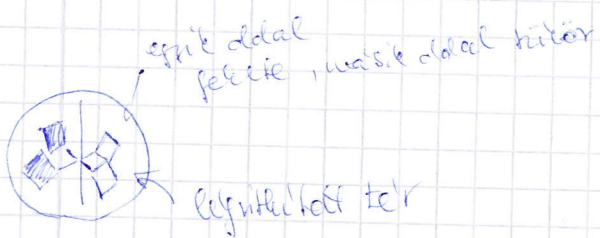
- negativan fältljuk } => effektiv krets
- magnitfältljuk
- positiv fältljuk } => ingen säll ki
- magnitfältljuk



↑
ingelof → a fely interaktion, visant fgy med nias krets

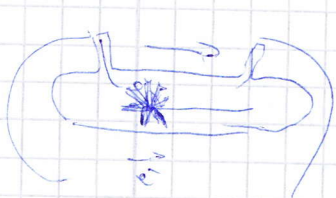
- > nagon erds felyü lappu - nias krets
 - > sig gör lappu - kis felyü - van krets
- } => nien az interaktionel fuff

6.) "Felymalom" (Kross?)



7.) Edison effektus

Elektron hullaru / rektaske kenneberet



→ Edison - effektus