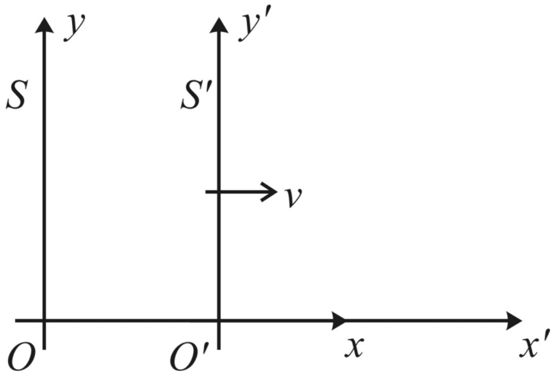
A Lorentz-transzformációs képletek levezetése:



A két inerciarendszer *S* és *S'*. *S'* a pozitív x-tengely mentén állandó *v* sebességgel mozog *S*-hez képest.

A két vonatkoztatási rendszer *O* és *O'* origója essen egybe a $t=t'=0$ időpillanatban. Az $(x,t)=(0,0)$ eseménynek tehát $(x',t')=(0,0)$-ként kell transzformálódnia. Ez azt jelenti, hogy a keresett lineáris transzformációs egyenletekben nem szerepel konstans tag:

$$x' = A \cdot x + B \cdot ct \qquad (1)$$

$$ct' = D \cdot x + E \cdot ct \qquad (2)$$

Feladatunk az *A*, *B*, *D* and *E* konstans szorzótényezők meghatározása.

1. Tekintsünk egy fényimpulzust, amely az *O*-ból $t=0$-kor indul ki a pozitív *x*-tengely mentén. A fényimpulzus pályájának egyenlete:

$$x=c \cdot t. \qquad \text{[fényimpulzus jobbra]} \qquad (3)$$

Ugyanez a fényimpulzus – amikor az *S'* rendszerből figyeljük meg – az *O'* pontból indul $t'=0$-kor. Mivel *S'* a fényimpulzus sebességét *c*-nek méri (csakúgy, mint *S*) [ez a fénynek egyedülálló tulajdonsága, amit a klasszikus fizika egyáltalán nem tud megmagyarázni], a fényimpulzus pályájának egyenlete *S'*-ben a következő alakot kell hogy öltse:

$$x'=c \cdot t'. \qquad \text{[fényimpulzus jobbra]} \qquad (4)$$

(3)-at és (4)-et (1)-gyel és (2)-vel összekombinálva az alábbi összefüggést kapjuk:

$$A + B = D + E. \qquad (5)$$

2. Most tekintsünk egy hasonló fényimpulzust – amely szintén az *O*-ból indul a $t=0$-kor –, de a negatív *x*-tengely mentén halad.

A fényimpulzus pályájának egyenlete:

$x = -c \cdot t$. [fényimpulzus balra] (6)

Ismét, mivel *S'* a fényimpulzus sebességét *c*-nek méri (csakúgy, mint *S*), ugyanennek a fényimpulzusnak a pályáját *S'*-ben a következő egyenlet írja le:

$x' = -c \cdot t'$. [fényimpulzus balra] (7)

(6)-ot és (7)-et (1)-gyel és (2)-vel összekombinálva az alábbi összefüggést kapjuk:

$$A - B = -(D + E). \quad (8)$$

Az (5) és (8) egyenleteket egymásból kivonva, ill. egymással összeadva a

$$B = D, \quad (9)$$

és

$$A = E \quad (10)$$

összefüggésekhez jutunk.

Az (1) és (2) Lorentz-transzformációs képletek tehát a következő szimmetrikus alakra egyszerűsödnek:

$$x' = A \cdot x + B \cdot ct \quad (11)$$

$$ct' = B \cdot x + A \cdot ct \quad (12)$$

3. Az inverz transzformációs képleteket a (11)-es és (12)-es képletekből kapjuk meg úgy, hogy ezeket, mint egyenletrendszert megoldjuk *x*-re és *ct*-re:

$$x = \frac{A \cdot x' - B \cdot ct'}{A^2 - B^2} \quad (13)$$

$$ct = \frac{-B \cdot x' + A \cdot ct'}{A^2 - B^2} \quad (14)$$

Ezután a következőképpen érvelhetünk: ha *S'* az *S*-hez képest jobbra mozog *v* sebességgel, akkor *S* az *S'*-höz képest balra mozog, (–*v*) sebességgel. Következésképpen a (13) és (14) inverz transzformációs egyenleteknek és a (11) és (12) transzformációs egyenleteknek 'szimmetrikus kinézetűeknek' kell lenniük. És valóban, ha a

$$A^2 - B^2 \equiv 1 \quad (15)$$

járulékos feltétel teljesül, akkor a (13)-as és (14)-es egyenletek olyan alakot öltenek, amelyek teljesen szimmetrikusak a (11)-es és (12)-es egyenletekkel:

$$x = A \cdot x' - B \cdot ct' \quad (16)$$

$$ct = -B \cdot x' + A \cdot ct'. \qquad (17)$$

4. Most írjuk le az *S* vonatkoztatási rendszer *O* origójának mozgását az *S'*-ből nézve. Egyfelől, a (11)-es és (12)-es egyenletekbe $x = 0$-t helyettesítve az

$$x' = B \cdot ct, \qquad [O \text{ mozgása}] \qquad (18)$$

$$ct' = A \cdot ct \qquad [O \text{ mozgása}] \qquad (19)$$

kifejezésekhez jutunk, tehát

$$x' = \frac{B}{A} \cdot ct'. \qquad [O \text{ mozgása}] \qquad (20)$$

Másfelől, mivel az *O* pont az *S'*-ből nézve balra mozog *v* sebességgel, így a pályáját az

$$x' = -v \cdot t' \qquad [O \text{ mozgása}] \qquad (21)$$

egyenlet írja le.

(20)-at és (21)-et összehasonlítva azt kapjuk, hogy

$$B = -A \cdot \frac{v}{c}. \qquad (22)$$

5. Végül oldjuk meg a (15), (22) egyenletrendszert *A*-ra és *B*-re:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (23)$$

és

$$B = -\frac{v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (24)$$

Ezeket a kifejezéseket (11)-be és (12)-be behelyettesítve megkapjuk a Lorentz-transzformációs egyenletek végleges alakját:

$$x' = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad [\text{Lorentz}] \qquad (25)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \qquad \text{[Lorentz]} \qquad (26)$$