| MECHANIKA 1 | A) HF 05. |
|---|---|

## A13 .) feladat

A mellékelt **ábrán** a „$K_0$" $\{x, y, z\}$ koordinátarendszerbe berajzolt geometriai vonalakból álló kocka látható. A geometriai kockának a bejelölt 3 db csúcsába egy-egy „m" tömegű pontot helyeztünk, majd ezeket merev, elhanyagolható tömegű pálcákkal összekötöttük. A következőkben az így kapott, három tömegpontból álló „**merev teset**" vizsgáljuk.

a.) Adja meg az „O" origóra számított $\Theta_{ij}^{O}$ tehetetlenségi mátrixot a megadott „$K_0$" koordinátarendszerben.

b.) Tekintse azt „$t_0$" tengelyt, amelyik az „O" origón megy át és egyben a geometriai kocka testátlója is. A $\Theta_{ij}^{O}$ ismeretében határozza meg a (a szóban forgó merev testnek a) „$t_0$" tengelyre vonakozó $\Theta_{t}^{O}$ tehetetelenségi nyomatékát!

c.) Határozza meg az $\vec{L}$ perdületet, ha a merev testet a „$t_0$" tengely körül „ $\omega_0$ " szögsebességgel forgatjuk!

d.) Határozza meg a szóban forgó merev testnek az ábrán bejelölt „A" és „B" pontokon átmenő „$t_{AB}$" tengelyre vonatkozó $\Theta_{AB}$ tehetetlenségi nyomatékát! **(EXTRA! Gyakorlásra!)**

---------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## A14.) feladat

Adott az (x,y) síkban egy egyenlőszárú, derékszögű háromszög alakú lap. A lap derékszögű csúcsa az origóban van, az „a" hosszúságú szárai az „x" és az „y" tengelyekre illeszkednek. Az „m" tömegű lap homogén tömegelszlású.

a.) Határozza meg a lap "O" origóra számított tehetetelenségi tenzorának a $\Theta_{ij}^{O}$ mátrixát a megadott koordinátarendszerben!

b.) A lapot egyenletes $\omega$ szögsebességgel forgatjuk az „O"-n átmenő (1,1,1) irányú tengely köről. Határozza meg a lap kinetikus energiáját! **(EXTRA! Gyakorlásra!)**

---------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## A15.) feladat

Adott egy "M" tömegű, homogén tömegeloszlású négyzetes hasáb alakú test. Az élek hossza (a,2a,a). (Lásd a mellékelt **ábrát!**) A test "O" csúcspontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatékának a $\Theta_{ij}^{O}$ mátrixát (a test éleihez rögzített koordinátarendszerben) ismerjük: .

$$\Theta_{ij}^{O} = Ma^2 \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

a.) A $\Theta_{ij}^{O}$ ismeretében ( a tanult „párhuzamos eltolási transzformáció" segítségével ) határozza meg a hasáb "TKP" tömegközéppontjához tartozó tehetetlenségi nyomatékának a $\Theta_{ij}^{TKP}$ mátrixát.

b,) Határozza meg a hasáb (imént kapott) „TKP" tömegközépponti rendszerében az ábrán bejelölt „t" testátlót kijelölő $\vec{e}_t$ egségvektort!

c.) A $\Theta_{ij}^{TKP}$ és az $\vec{e}_t$ ismeretében határozza meg a hasábnak a testátlójára illeszkedő, a szóban forgó "t" tengelyre vett tehetetleségi nyomatékát! **(EXTRA! Gyakorlásra!)**

d.) A test a fent definiált "t" tengely körül " $\omega$" állandó szögsebességgel forog. Határozza meg a test perdület vektorát! **(EXTRA! Gyakorlásra!)**

---------------------------------------------------------------------------------------------------------------

| MECHANIKA 1 | B) HF 05. |
|---|---|

**B9.) feladat**

Adott egy homogén tömegeloszlású egyenes körkúp. A kúp alapkörének a sugara „R”, a magassága „H=2R” és a tömege „M”. A kúpot egy vízszintes sík lapra helyeztük úgy, hogy az, az egyik alkotója mentén érintkezzék a síkkal. A kúpot, a csúcsa körül, a síklapra merőleges $\vec{\omega}_0$ szögsebességgel forgatjuk, miközben az (csúszás mentesen) gördül a síkon. (**Lásd az ábrá**t!)

**SEGÍTSÉG**: A kúp gördülő mozgása azt jelenti, hogy a kúp „O” csúcsa egy helyben marad, miközben az alapköre (ferdén) gördül a síkon. Ha az alapkör „ds” ívhosszon gördül, akkor a kúp palástjának e „ds” ív által meghatározott darabja érintkezik a síkkal. Ha festékkel befestetnénk a palástot, akkor ezen a részen lévő festék rákerülne a felületre. Hasonlóan „működik” a jól ismert „festő henger”. A „ds” ív a paláston definiál egy „$d\alpha$” szöget és egyben megadja az alapkör nek a kúp „z” tengelye körüli „$d\varphi$” elfordulását is. Mindezt a **mellékelt ábra** szemlélteti. A kúp geometriai adataiból a „$d\alpha$” és a „$d\varphi$” aránya kiszámítható. Evvel megkapjuk a szögváltozásokhoz tartozó szögsebességeket is: $\dot{\alpha} = \omega_0$ és $\dot{\varphi} = \omega_z$. Az $\omega_0$ és az $\omega_z$ arányaiból látható, hogyha a szögsebességekhez a szokásos (jobbkéz ) szabály szerint vektorok rendelünk, akkor az $\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_z$ összeg a sikkal éppen érintkező, (az adott pillanatban nyugvó) alkotó körüli forgást megadó $\vec{\omega}$ szögsebesség vaktor lesz. Ez azt mutatja, hogy a szögsebesség vektorok a vektori összeadás szabályát követik.

a.) Rajzolja be az **ábrába** az $\vec{\omega}_0$, az $\vec{\omega}_z$ és az $\vec{\omega}$ szögsebesség vektorokat!

b.) Az $\vec{\omega}_0$ és a kúp geometriai adatanak (H=2R) az ismeretében határozza meg a (momentán álló) alkotó körűli forgó mozgás $\vec{\omega}$ szögsebességét !

c.) Tudjuk, hogy a szóban forgó esetben a kúp TKP tömegközéppontjához tartozó fő tehetetlenségi rendszerben a fő tehetetlenségi nyomatékok egyformák. Mindegyiknek az értéke: $3/10 \cdot MR^2$. A TKP a csúcstól „3/2 R” távolságra van. Mindezeknek az ismeretében adja meg a $\Theta_{ij}^{O}$ tehetetlenségi mátrixot olyan koordinátarendszerben amelynek ”O” origója a kúp csúcspontja és ”z” tengelye a kúp forgástengelye!

d.) A $\Theta_{ij}^{O}$ ismeretében határozza meg a kúp egyik alkotójával egybeeső ”t” tengelyre vonatkozó $\Theta_t$ tehetetlenségi nyomatékot!

e.) Határozza meg a szóban forgó gördülő kúp energiáját ! Fejezze ezt ki ezt az $\{M, R, \omega_0\}$ ismert adatok segítségével!

---

**B10.) feladat**

Tudjuk, hogy egy „m tömegű, „R” sugarú, homogén körlap tehetetlenségi nyomatékai a következők: a „z” irnyú geometriai forgástengelyre: $\Theta_1 = 1/2 \cdot mR^2$ és a körlap (bármelyik) átmérőjére: $\Theta_2 = 1/4 \cdot mR^2$. A koronghoz erősítsünk egy, a tömegközéppontján átmenő „t” tengelyt! A „t” feküdjék a „z,x” síkban a „+z” tengellyel „$\alpha=30^0$”-os szöget zárjon be. A tengely végeket csapágyazzuk és a korongot e körűl a „t” tengely körűl „$\vec{\omega}$” szögsebességgel forgatjuk. A forgatás iránya olyan, hogy $\omega_z > 0$.

a.) Írja fel a $\Theta_{ij}^{TKP}$ -t tömegközépponti fő tehetetlenségi rendszerben”!

b.) Határozza meg a korong „TKP” középpontjára vett $\vec{L}_0$ perdületét a koronghoz rögzített fő tehetetlenségi rendszerben!

c.) Rajzolja le, hogy az $\vec{L}_0$ perdületvektor hogyan mozog az álló koordinátarendszerben az álló „t” tengelyhez képest!

d.) A c.)-ben kapott rajz alapján, határozza meg (az álló rendszerben) a korongra ható forgatónyomaték „$N_o$” nagyságát!

e.) Határozza meg a csapágyakban ébredő erők nagyságát, ha azok az „TKP” ponttól „a” és „b” távolságra vannak!

f.) Határozza meg a korong kinetikus energiáját!

---