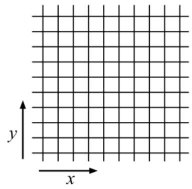
METRIKA

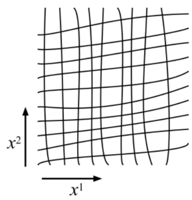
2D sík, két közeli pont közötti távolság, Descartes-koordinátákkal felírva:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$



Általános alak (ha nem feltétlenül Descartes-koordinátákat használunk):

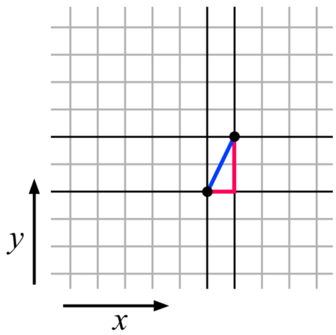
$$dl^2 = ..\left(dx^1\right)^2 + ..\left(dx^2\right)^2 + ...dx^1 dx^2 + ...dx^2 dx^1 =$$
$$= g_{11}\left(dx^1\right)^2 + g_{22}\left(dx^2\right)^2 + g_{12} dx^1 dx^2 + g_{21} dx^2 dx^1 =$$
$$= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} g_{ij} dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j$$



$$g_{ij} = g_{ij}\left(x^1, x^2\right)$$

1

1. _2D sík_; Descartes-koordinátákkal felírva:



$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

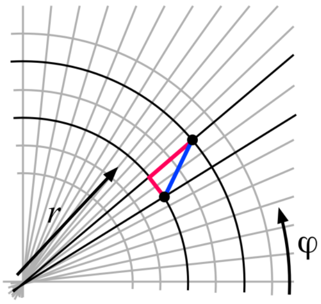
koordináták: $"x^1" = x \quad "x^2" = y$

metrikus tenzor: $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ [a g_{ij}-k itt mind konstansok]

Gauss-görbület: $K\left(= \frac{1}{R_{\min} R_{\max}} = \frac{1}{\infty \cdot \infty}\right) = 0$ SÍK

2

2. *2D sík*; polárkoordinátákkal felírva:



$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

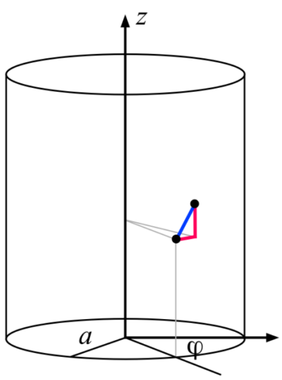
koordináták: $"x^1" = r \quad "x^2" = \varphi$

metrikus tenzor: $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$ [itt a g_{22} *függvény*: $g_{22}("x^1") = g_{22}(r) = r^2$]

Gauss-görbület: $K\left(= \dfrac{1}{R_{\min} R_{\max}} = \dfrac{1}{\infty \cdot \infty} \right) = 0$ SÍK

3

3. *2D hengerfelület*; hengerkoordinátákkal felírva:



$$dl^2 = dz^2 + a^2 d\varphi^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

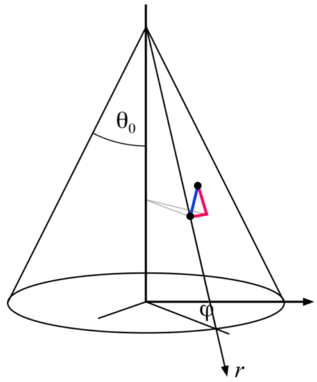
koordináták: $"x^1" = z \quad "x^2" = \varphi$

metrikus tenzor: $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$ [a g_{ij}-k mind konstansok]

Gauss-görbület: $K\left(= \dfrac{1}{R_{\min} R_{\max}} = \dfrac{1}{\infty \cdot a} \right) = 0$ SÍK!

4

4. *2D kúpfelület*; polárkoordinátákkal felírva:



$$dl^2 = dr^2 + r^2 \sin^2\theta_0 d\varphi^2 = g_{ij}dx^i dx^j$$

koordináták: $"x^1" = r \qquad "x^2" = \varphi$

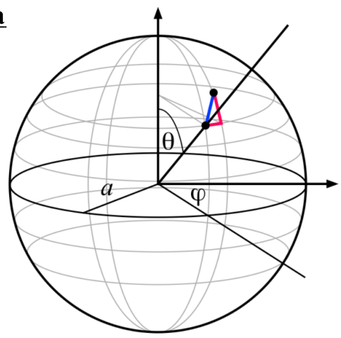
metrikus tenzor: $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\theta_0 \end{pmatrix}$ [itt a g_{22} *függvény*: $g_{22}(r) = r^2\sin^2\theta_0$]

Gauss-görbület: $K\left(= \frac{1}{R_{\min}R_{\max}} = \frac{1}{\infty\cdot(...)}\right) = 0$ SÍK!*

*kivéve a csúcsot, ahol *K*-nak szingularitása van.

5

5. *2D gömbfelület*; gömbi koordinátákkal felírva



$$dl^2 = a^2 d\theta^2 + a^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

koordináták: $"x^1" = \theta \qquad "x^2" = \varphi$

metrikus tenzor: $g_{ij} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$ [a g_{22} *függvény*: $g_{22}(\theta) = a^2\sin^2\theta$]

Gauss-görbület: $K\left(= \frac{1}{R_{\min}R_{\max}} = \frac{1}{a\cdot a}\right) = \frac{1}{a^2}$ GÖRBÜLT!

6

n-dimenziós sokaság (pl. 2D felület, 3D tér, 4D téridő, stb.) metrikája:

$$ds^2 = g_{11}\left(dx^1\right)^2 + g_{22}\left(dx^2\right)^2 + \ldots + g_{12}\,dx^1 dx^2 + \ldots =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\,dx^i dx^j = g_{ij}\,dx^i dx^j$$

A metrikát (a fenti egyenletet) a sokaság "lakói" mérésekre alapozva fel tudják állítani:

1. A sokaságot bekoordinátázzák az x^1, x^2, …, x^n (tetszőlegesen) felvett koordinátákkal.
2. Két közeli pont között megmérik a *ds* távolságot, és ugyanakkor regisztrálják a két pont közötti dx^i koordináta-különbségeket is.
3. A 2-es lépést megismétlik sok közeli pontpárra. Összességében rengeteg adatot összegyűjtenek.
4. Ezekből az adatokból megállapítják a $g_{ij} = g_{ij}\left(x^k\right)$ függvényeket (a metrikus tenzor elemeit).

De: hogyan tudják a "lakók" megállapítani, hogy sokaságuk görbült-e?

7

Gauss-görbület (2D felület egy adott pontbeli görbültségét kifejező szám):

$$K = \frac{1}{R_{\min} R_{\max}}$$

$R_{\min}$ és $R_{\max}$: az adott ponton át a felületre fektetett merőleges síkokkal vett metszetgörbék (előjelesen értelmezett) görbületei közül a legkisebbnek és a legnagyobbnak a reciproka.

K előnye: a felület *tényleges* görbültségét fejezi ki (nem módosul az értéke, ha a felületet deformációmentes alakváltozásnak tesszük ki) (pl. a feltekert újság: *sík*)

K hátránya:
(1) nem alkalmazható 3D, 4D, stb. sokaságokra, csak 2D felületre!
(2) a K fenti definiálásához külső (nem "laposlényi") nézőpont kell ($R_{\min}$ és $R_{\max}$ fogalmát a laposlények nem értik)

8

Theorema Egregium (Gauss, 1828):

Recept a laposlények számára, hogy hogyan *számolhatják ki* K-t az általuk is kimérhető $g_{ij} = g_{ij}\left(x^k\right)$ függvényekből.

$$K\left(x^1, x^2\right) = \frac{1}{2g}\left[2\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\left(\partial x^2\right)^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\left(\partial x^1\right)^2}\right] +$$

$$+\frac{g_{12}}{4g^2}\left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\right) - 2\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right) + \left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)\right] -$$

$$-\frac{g_{22}}{4g^2}\left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right)\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right) - \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)^2\right] -$$

$$-\frac{g_{11}}{4g^2}\left[\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\right)\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)^2\right]$$

ahol $g \equiv \det g_{ij} = g_{11} g_{22} - g_{12}^2$ [csak 2D felületre alkalmazható!]

9

n-dimenziós sokaság görbültségét kifejező mennyiség: a Riemann-tenzor (Riemann, 1854)

Ezt is ki tudják számítani a sokaság "lakói" a $g_{\alpha\beta}\left(x^\gamma\right)$ metrikus tenzorból:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} \equiv \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma}\Gamma^\gamma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\beta\mu}$$

ahol $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}\left[\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right]$, és $g^{\alpha\sigma}$ a metrikus tenzor inverze.

[tetszőleges dimenziójú sokaságra alkalmazható!]

10

TOVÁBBI PÉLDÁK

A sokaságunk legyen a *4D téridő*!

11

6. *4D téridő a világűrben, nagy tömegektől távol*; kockarács-hálózat, szinkronizált órák:

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$$

koordináták: $"x^0" = t \quad "x^1" = x \quad "x^2" = y \quad "x^3" = z$

metrikus tenzor: $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Riemann-tenzor: $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \ldots = 0$ SÍK (GÖRBÜLETLEN) TÉRIDŐ!

12

7. *4D téridő a világűrben, nagy tömegektől távol*; gömbhéj-hálózat, szinkronizált órák:

$$ds^2 = (cdt)^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

koordináták: $"x^0" = t \quad "x^1" = r \quad "x^2" = \theta \quad "x^3" = \varphi$

metrikus tenzor: $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$

Riemann-tenzor: $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \ldots = 0$ SÍK (GÖRBÜLETLEN) TÉRIDŐ

8. *Gömbszimmetrikus, álló tömeg körüli téridő*; Schwarzschild-koordinátákkal felírva:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)(cdt)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

koordináták: $"x^0" = t \quad "x^1" = r \quad "x^2" = \theta \quad "x^3" = \varphi$

metrikus tenzor: $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$

Riemann-tenzor: $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \ldots \neq 0$ GÖRBÜLT TÉRIDŐ!

9. *Gömbszimmetrikus, álló tömeg körüli téridő*; Painlevé-Gullstrand-koordinátákkal felírva:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)(cdT)^2 - 2\sqrt{\frac{2GM}{c^2 r}}cdTdr - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

koordináták: $"x^0" = T$ $"x^1" = r$ $"x^2" = \theta$ $"x^3" = \varphi$

metrikus tenzor: $$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2 & -\sqrt{\frac{2GM}{r}} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{2GM}{r}} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Riemann-tenzor: $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \ldots \neq 0$ GÖRBÜLT TÉRIDŐ

15

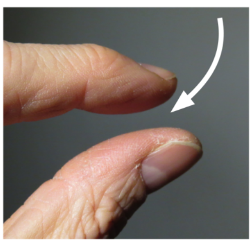
Kitérő:

1. Az időt nyugodtan mérhetjük méterben. $ct_{[s]} = t_{[m]}$

"A film kétórás volt." = "A film 2.16 milliárd kilométernyi ideig tartott."

2. A tömeget is nyugodtan mérhetjük méterben! $\frac{GM_{[kg]}}{c^2} = M_{[m]}$

"A Föld tömege M_F=6x10^{24}kg." = "A Föld tömege M_F=4.4mm."



16

10. *Forgó fekete lyuk (+ a Nap + a Föld) körüli téridő*; Doran-koordinátákkal felírva, az egyenlítői síkban:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dT^2 - 2\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}}\, dTdr + 2\left(\frac{2Ma}{r}\right) dTd\varphi +$$

$$+2a\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}}\, drd\varphi - \frac{r^2}{r^2 + a^2}\, dr^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) d\varphi^2$$

koordináták: $"x^0" = T \qquad "x^1" = r \qquad "x^2" = \varphi$

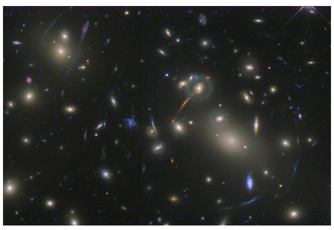
metrikus tenzor: $$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{r} & -\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}} & \frac{2Ma}{r} \\ -\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}} & -\frac{r^2}{r^2 + a^2} & -a\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}} \\ \frac{2Ma}{r} & -a\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}} & r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \end{pmatrix}$$

Riemann-tenzor: $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \ldots \neq 0$ GÖRBÜLT TÉRIDŐ!

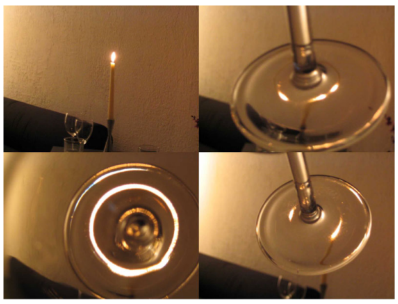
17

A görbült téridő néhány megfigyelhető következménye

1. *gravitációs lencsehatás* (nagy tömegek - pl. galaxisok - begörbítik a fénysugarak útját)



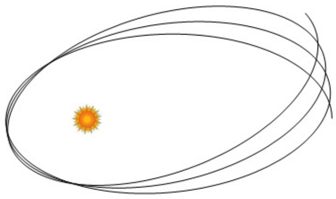
demonstráció házilag:



18

A görbült téridő néhány megfigyelhető következménye

2. *a bolygók perihéliumának vándorlása* (a Nap körül a bolygók NEM ellipszispályán keringenek)



A naprendszerben a Merkúrnál a legerősebb az effektus: ~43”/évszázad
~ 43”/(417 körbefordulás)

[A legközelebbi Merkúr-átvonulás: 2016. május 9.]

19

A görbült téridő néhány megfigyelhető következménye

3. *a GPS-nél relativisztikus korrekcióra van szükség* (a Föld tömege begörbíti a téridőt)

Nem egy az egyben a műholdak atomórái által mutatott időt kapják meg a vevőkészülékek, hanem a relativisztikus korrekciókkal (spec.rel. + ált. rel.) módosított értékeket. [Relativisztikus korrekciók nélkül naponta ~10km távolságmérési hiba gyűlhetne össze.]

20