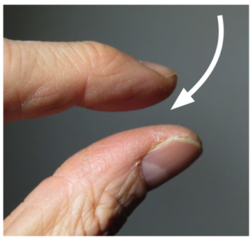
Előzetes megjegyzés:

1. Az időt nyugodtan mérhetjük méterben. $ct_{[s]} = t_{[m]}$

"A film kétórás volt." = "A film 2.16 milliárd kilométernyi ideig tartott."

2. A tömeget is nyugodtan mérhetjük méterben! $\frac{GM_{[kg]}}{c^2} = M_{[m]}$

"A Föld tömege M_F=6x10^{24}kg." = "A Föld tömege M_F=4.4mm."



1

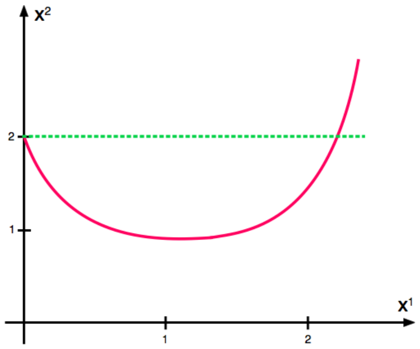
HONNAN TUDJUK BELSŐ MÉRÉSSEL ELDÖNTENI, HOGY EGY FELÜLET GÖRBÜLT-E?

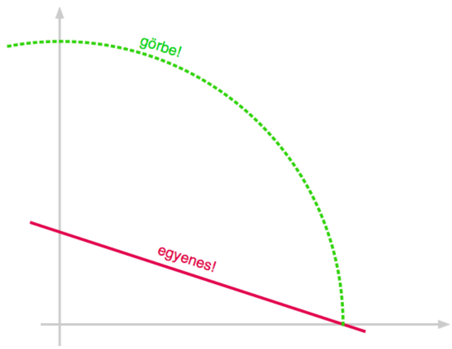
EGY ALAPSZABÁLY:
NE BÍZZUNK A TÉRKÉPBEN!

A térképen ábrázolt vonal:
- sík felület egyenese?
- sík felület görbéje?
- görbült felület egyenese ("geodetikus")?
- görbült felület görbéje?

2

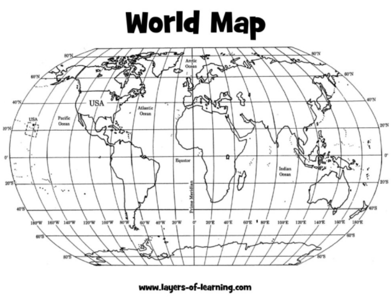
Térkép: Valóság:

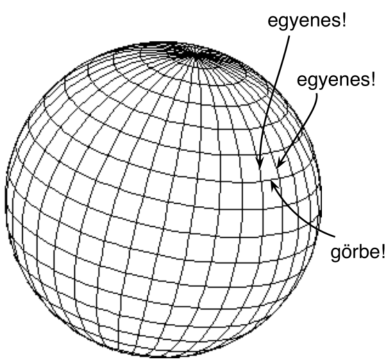




- sík felület;
- a térképen a koordináták: $x^1 = \varphi$, $x^2 = r$

Térkép: Valóság:

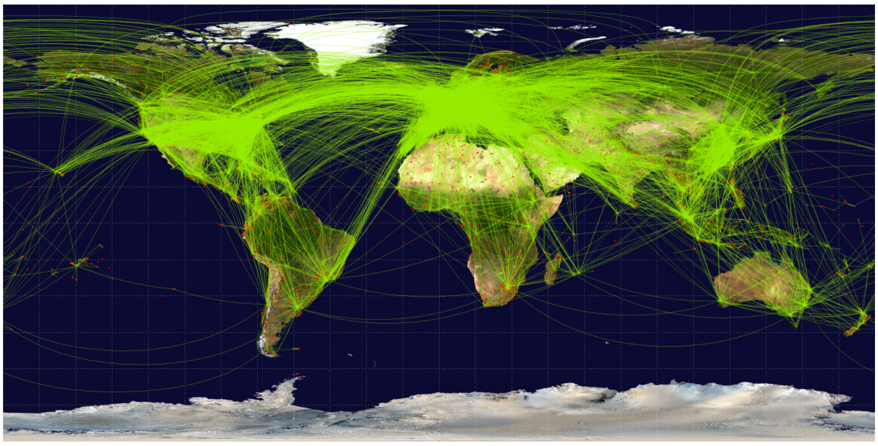




- görbült felület;
- a térképen a koordináta-vonalak: szélesség (λ), hosszúság (φ)

Északi irányt tartó hajó: egyenesen halad előre.
Keleti irányt tartó hajó: kanyarodik!

GÖRBÜLT FELÜLET



Geodetikus ("egyenes") vonalak görbült felületen. Nem a vonalak tehetnek róla, hogy görbének látjuk őket, hanem mi, akik a *térképet* így konstruáltuk meg.

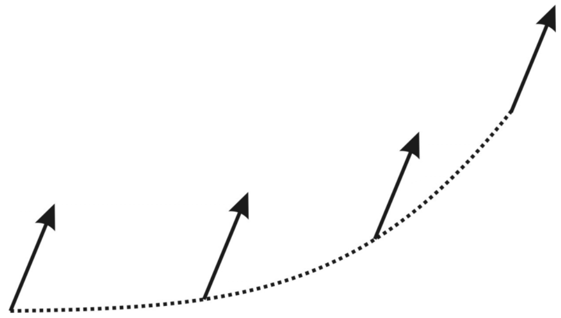
5

HONNAN TUDJUK BELSŐ MÉRÉSSEL ELDÖNTENI, HOGY EGY FELÜLET GÖRBÜLT-E?

KULCS A MEGOLDÁSHOZ: EGY *VEKTOR PÁRHUZAMOS ELTOLÁSA* MÁS EREDMÉNYHEZ VEZET SÍKON, MINT GÖRBÜLT FELÜLETEN

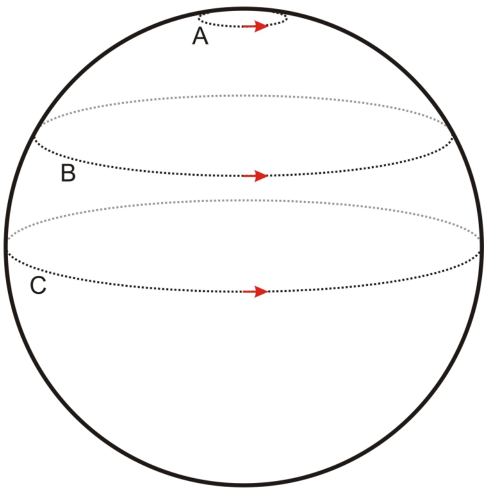
6

VEKTOR PÁRHUZAMOS ELTOLÁSA



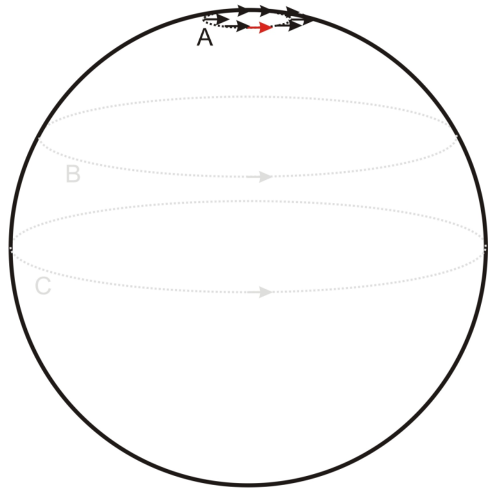
Vektor párhuzamos eltolása *síkon*, adott vonal mentén.

7



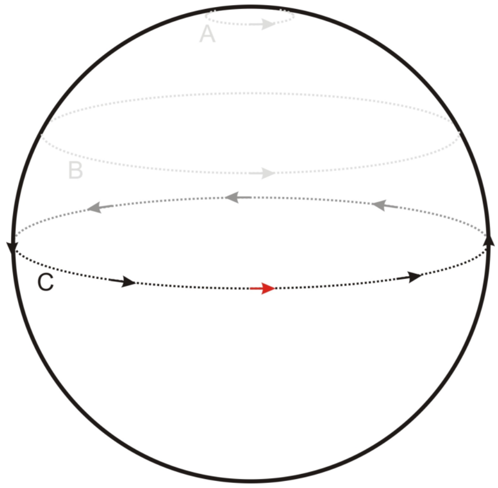
Vektorok párhuzamos eltolása *görbült felületen*, adott zárt vonal mentén.

8



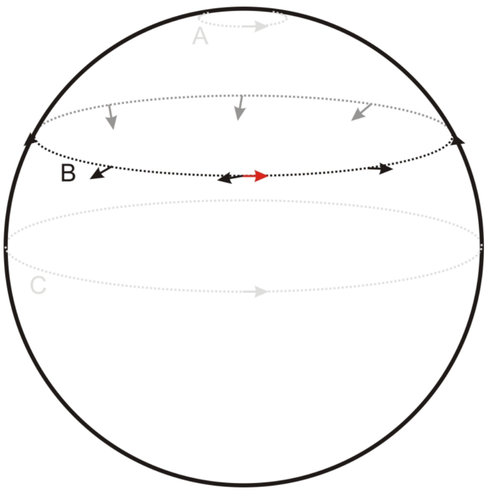
Vektorok párhuzamos eltolása *görbült felületen*, adott zárt vonal mentén.

9



Vektorok párhuzamos eltolása *görbült felületen*, adott zárt vonal mentén.

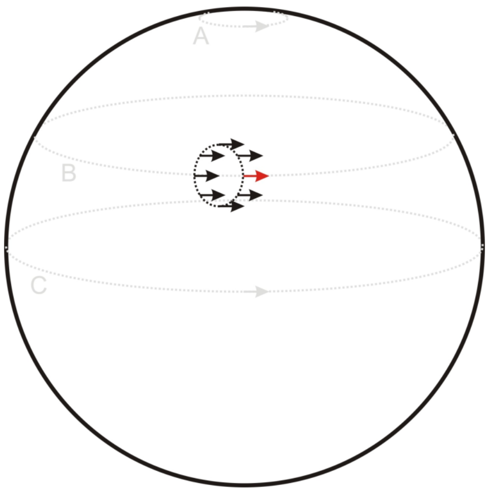
10



Vektorok párhuzamos eltolása *görbült felületen*, adott zárt vonal mentén.

A végére kifordul az eredeti irányból?!

11

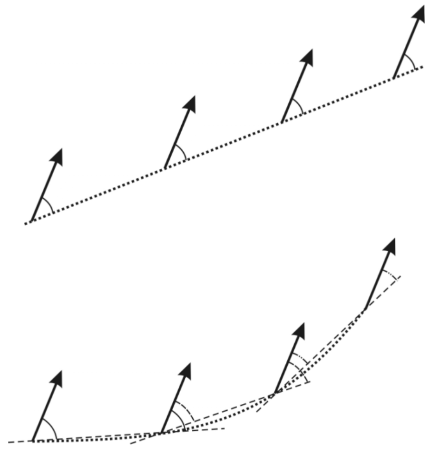


A párhuzamosan eltolt, zárt görbén végigvitt vektor állása *függ az adott görbétől*.

12

Mi a párhuzamos eltolás (laposlények számára is érthető) <u>szabálya</u>?

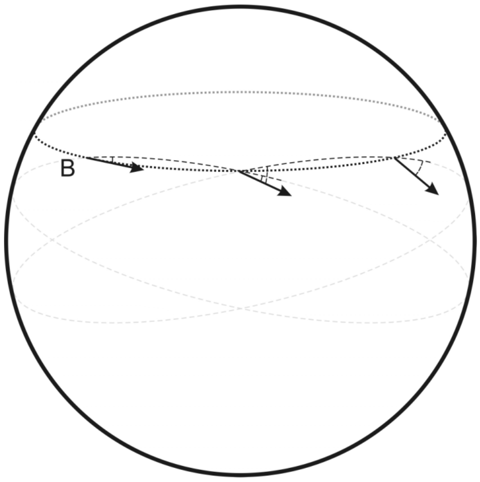
Segítség:



Vektorok párhuzamos eltolása *síkon*, egyenes ill. görbe vonal mentén.

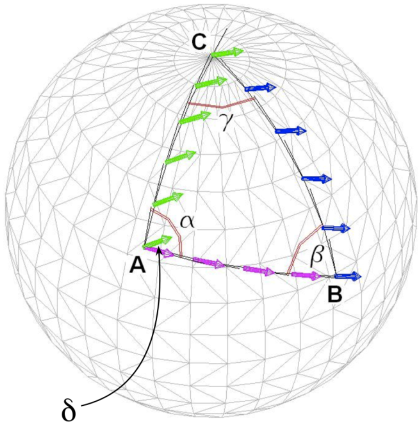
13

Szabály: a görbe vonalat egyenes szakaszokkal közelítjük, és minden szakaszon ügyelünk a *szög* megtartására.



Az eredeti pontba visszajutva a vektor tényleg nem az eredeti irányba áll!

14



Lennart Green (TED előadás)

zárt görbe mentén végigvitt vektorra: felületi excesszus ($\delta \neq 0$)

HONNAN TUDJUK BELSŐ MÉRÉSSEL ELDÖNTENI, HOGY EGY FELÜLET GÖRBÜLT-E?

VÁLASZ: EGY *VEKTORT PÁRHUZAMOS ELTOLÁSSAL* VÉGIGVISZÜNK EGY ZÁRT GÖRBÉN →
HA $\delta \neq 0$: GÖRBÜLT A FELÜLET,
HA $\delta = 0$: SÍK A FELÜLET.

<u>Gauss-görbület (2D felület egy adott pontbeli görbültségét kifejező szám):</u>

$$K = \frac{1}{R_{\min} R_{\max}}$$

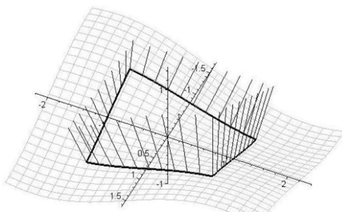
$R_{\min}$ és $R_{\max}$: az adott ponton át a felületre fektetett merőleges síkokkal vett metszetgörbék (előjelesen értelmezett) görbületei közül a legkisebbnek és a legnagyobbnak a reciproka.

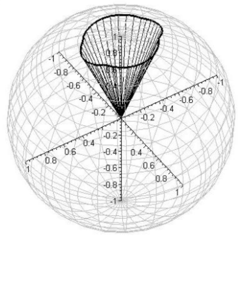
<u>*K* előnye:</u> a felület *tényleges* görbültségét fejezi ki (nem módosul az értéke, ha a felületet deformációmentes alakváltozásnak tesszük ki) (pl. a feltekert újság: *sík*)

<u>*K* hátránya:</u>
(1) nem alkalmazható 3D, 4D, stb. sokaságokra, csak 2D felületre!
(2) a K fenti definiálásához külső (nem "laposlényi") nézőpont kell ($R_{\min}$ és $R_{\max}$ fogalmát a laposlények nem értik)

17

KVANTITATÍV RÉSZLETEK





Gauss-görbület (a felület adott pontjában értelmezett mennyiség):

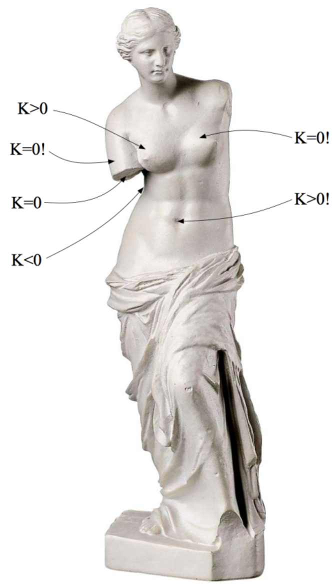
$$K \equiv 1/(R_{min} \cdot R_{max})$$

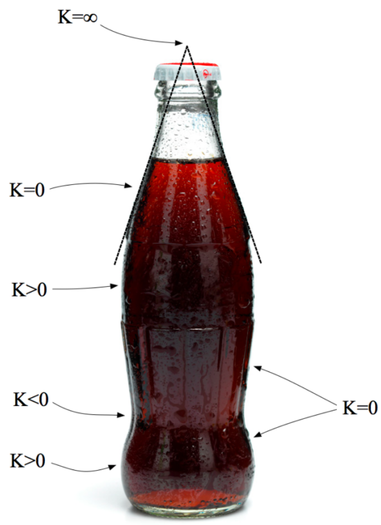
Gauss-Bonnet tétel:

$$\delta = \int_T K dT \qquad (\delta = \Omega)$$

18

GÖRBÜLT SOKASÁGOK





19

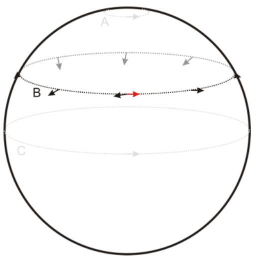
A GÖRBÜLET KIMUTATÁSA KÍSÉRLETILEG

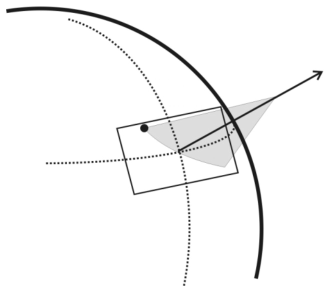
<u>Foucault-inga</u>

- az inga lengési pályája (mint „vektor”) párhuzamosan tolódik el

$\alpha = 2 \cdot \pi \cdot \sin\lambda$

(λ: a szélességi kör koordinátája)

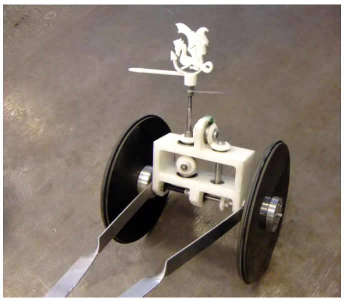


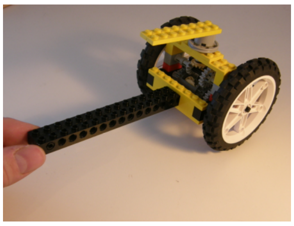


20

A GÖRBÜLET KIMUTATÁSA KÍSÉRLETILEG

Délirányt jelző kordé (指南車)



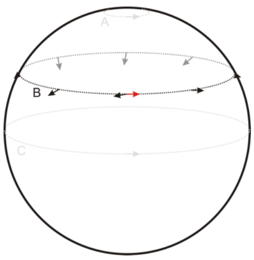


Dr. Laczik Bálint, BME

21

A GÖRBÜLET KIMUTATÁSA KÍSÉRLETILEG

Délirányt jelző kordé (指南車)



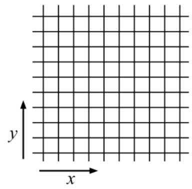
Dr. Laczik Bálint, BME

22

METRIKA

***2D sík*, két közeli pont közötti távolság, Descartes-koordinátákkal felírva:**

$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

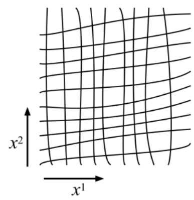


Általános alak (ha nem feltétlenül Descartes-koordinátákat használunk):

$$dl^2 = ..\left(dx^1\right)^2 + ..\left(dx^2\right)^2 + ...dx^1 dx^2 + ...dx^2 dx^1 =$$

$$= g_{11}\left(dx^1\right)^2 + g_{22}\left(dx^2\right)^2 + g_{12}\,dx^1 dx^2 + g_{21}\,dx^2 dx^1 =$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} g_{ij}\,dx^i dx^j = g_{ij}\,dx^i dx^j$$

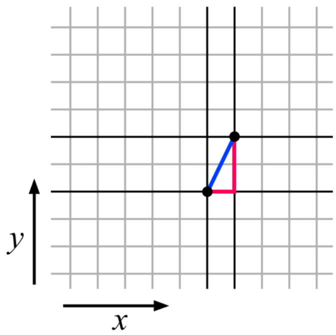


$$g_{ij} = g_{ij}\left(x^1, x^2\right)$$

23

1. *2D sík*; Descartes-koordinátákkal felírva:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j$$



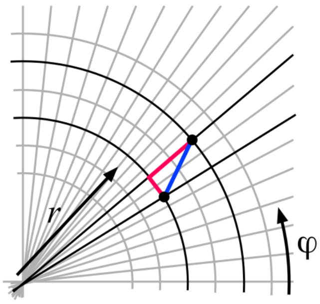
koordináták: $"x^1" = x \quad "x^2" = y$

metrikus tenzor: $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ [a g_{ij}-k itt mind konstansok]

Gauss-görbület: $K\left(= \frac{1}{R_{\min} R_{\max}} = \frac{1}{\infty \cdot \infty}\right) = 0$ SÍK

24

2. *2D sík*; polárkoordinátákkal felírva:



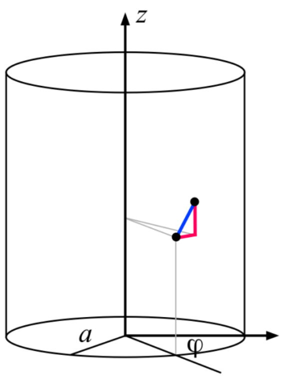
$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

koordináták: $"x^1" = r \quad "x^2" = \varphi$

metrikus tenzor: $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$ [itt a g_{22} *függvény*: $g_{22}("x^1") = g_{22}(r) = r^2$]

Gauss-görbület: $K\left(= \dfrac{1}{R_{\min} R_{\max}} = \dfrac{1}{\infty \cdot \infty} \right) = 0$ SÍK

3. *2D hengerfelület*; hengerkoordinátákkal felírva:



$$dl^2 = dz^2 + a^2 d\varphi^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

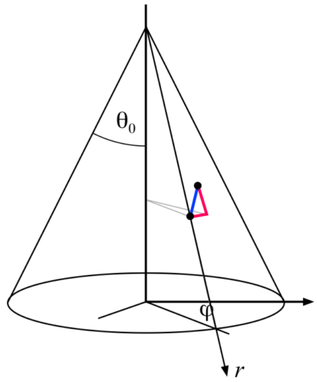
koordináták: $"x^1" = z \quad "x^2" = \varphi$

metrikus tenzor: $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$ [a g_{ij}-k mind konstansok]

Gauss-görbület: $K\left(= \dfrac{1}{R_{\min} R_{\max}} = \dfrac{1}{\infty \cdot a} \right) = 0$ SÍK!

4. *2D kúpfelület*; "kúpkoordinátákkal" felírva:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta_0 d\varphi^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$



koordináták: $"x^1" = r \qquad "x^2" = \varphi$

metrikus tenzor: $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta_0 \end{pmatrix}$ [itt a g_{22} *függvény*: $g_{22}(r) = r^2 \sin^2 \theta_0$]

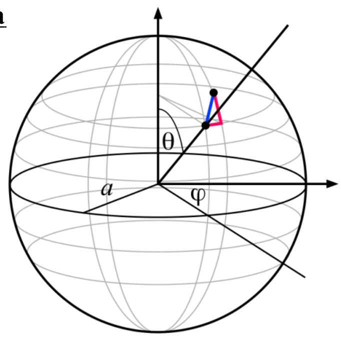
Gauss-görbület: $K\left(= \frac{1}{R_{\min} R_{\max}} = \frac{1}{\infty \cdot (...)} \right) = 0$ SÍK!*

*kivéve a csúcsot, ahol *K*-nak szingularitása van.

27

5. *2D gömbfelület*; gömbi koordinátákkal felírva

$$dl^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$



koordináták: $"x^1" = \theta \qquad "x^2" = \varphi$

metrikus tenzor: $g_{ij} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$ [a g_{22} *függvény*: $g_{22}(\theta) = a^2 \sin^2 \theta$]

Gauss-görbület: $K\left(= \frac{1}{R_{\min} R_{\max}} = \frac{1}{a \cdot a} \right) = \frac{1}{a^2}$ GÖRBÜLT!

28

n-dimenziós sokaság (pl. 2D felület, 3D tér, 4D téridő, stb.) metrikája:

$$ds^2 = g_{11}\left(dx^1\right)^2 + g_{22}\left(dx^2\right)^2 + \ldots + g_{12}\,dx^1 dx^2 + \ldots =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\,dx^i dx^j = g_{ij}\,dx^i dx^j$$

A metrikát (a fenti egyenletet) a sokaság "lakói" mérésekre alapozva fel tudják állítani:

1. A sokaságot bekoordinátázzák az $x^1, x^2, \ldots, x^n$ (tetszőlegesen) felvett koordinátákkal.
2. Két közeli pont között megmérik a *ds* távolságot, és ugyanakkor regisztrálják a két pont közötti dx^i koordináta-különbségeket is.
3. A 2-es lépést megismétlik sok közeli pontpárra. Összességében rengeteg adatot összegyűjtenek.
4. Ezekből az adatokból megállapítják a $g_{ij} = g_{ij}\left(x^k\right)$ függvényeket (a metrikus tenzor elemeit).

De: hogyan tudják a "lakók" megállapítani, hogy sokaságuk görbült-e?

29

Theorema Egregium (Gauss, 1828):

Recept a laposlények számára, hogy hogyan *számolhatják ki K*-t az általuk is kimérhető $g_{ij} = g_{ij}\left(x^k\right)$ függvényekből.

$$K\left(x^1,x^2\right) = \frac{1}{2g}\left[2\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\left(\partial x^2\right)^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\left(\partial x^1\right)^2}\right] +$$

$$+\frac{g_{12}}{4g^2}\left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\right) - 2\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right) + \left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)\right] -$$

$$-\frac{g_{22}}{4g^2}\left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right)\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right) - \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)^2\right] -$$

$$-\frac{g_{11}}{4g^2}\left[\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\right)\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)^2\right]$$

ahol $g \equiv \det g_{ij} = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ [csak 2D felületre alkalmazható!]

30