8. GYAKORLAT

Dr. Erdei Gábor, 2019-11-13

Többhullám interferencia alkalmazása diffrakciós rács esetén

f_y = 1200 vp/mm, D = 50 mm, skalár közelítés, merőleges beesés, λ = 500 nm. Mekkora az első diffraktív rend szöge, $\theta_{m=1}$? A rácsperiódus $a = 1/f_y$ = 833.3 nm. A rácsegyenlet:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta_m \cdot a = m2\pi \tag{1}$$

Ha m = 1:

$$\sin\theta_{m=1} = \frac{\lambda}{a} = 0.6 \;\rightarrow\; \theta_{m=1} = 36{,}9°. \tag{2}$$

Ehhez képest hány fokos $\Delta\theta$ szögeltérítésnél van az első minimumhely? A diffraktált fény iránykarakterisztikája:

$$I(\delta) = I_1\left(\frac{\sin(\delta N/2)}{\sin(\delta/2)}\right)^2, \tag{3}$$

ennek az első zérushelye itt van:

$$\Delta\delta N/2 = \pi \;\rightarrow\; \Delta\delta = \frac{2\pi}{N} \tag{4}$$

(1)-ből:

$$\Delta\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta\sin\theta \cdot a = \frac{2\pi}{N} \;\rightarrow\; \sin\Delta\theta \approx \Delta\sin\theta = \frac{\lambda}{aN} = \frac{\lambda}{D} \tag{5}$$

$$\sin\Delta\theta = 10^{-5} \;\rightarrow\; \Delta\theta = 10^{-2}\ \text{mrad}. \tag{6}$$

Mekkora $\Delta\lambda$ értékkel kell arrébbhangolni a hullámhosszat, hogy az első rend iránya pont a fent kiszámított értékkel változzon meg (Rayleigh-kritérium)? (2) és (5) felhasználásával:

$$\sin\theta_{m=1} + \Delta\sin\theta = \frac{\lambda+\Delta\lambda}{a} \tag{7}$$

$$\frac{\lambda}{a} + \frac{\lambda}{aN} = \frac{\lambda+\Delta\lambda}{a} \;\rightarrow\; \Delta\lambda = \frac{\lambda}{N} \tag{8}$$

Mivel $N = D\,/\,a$ = 60 000

$$\Delta\lambda = 8.33\ \text{pm}\,. \tag{9}$$

Fenti érték közvetlenül megkapható az R felbontóképesség képletéből (ld. előadás):

$$R \equiv \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m \cdot N\,. \tag{10}$$

Transzmisszív diffrakciós rács ferde beesés esetén

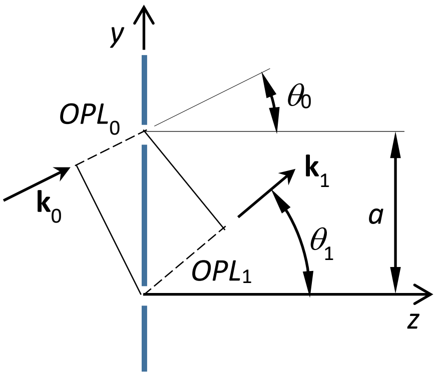
$$\delta_1 - \delta_0 = \delta = m2\pi \tag{11}$$

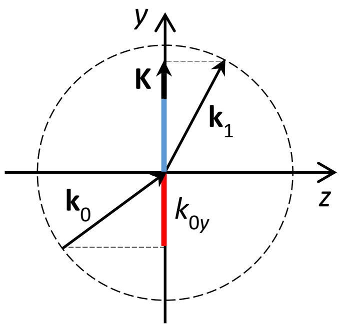
$$\delta_0 = \frac{2\pi}{\lambda}OPL_0 = \frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta_0 \cdot a \quad ; \quad \delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda}OPL_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta_1 \cdot a \tag{12}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta_1 \cdot a - \frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta_0 \cdot a = m2\pi \tag{13}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta_0 + \frac{m2\pi}{a} \tag{14}$$

$$k_{1y} = k_{0y} + \frac{m2\pi}{a} \tag{15}$$



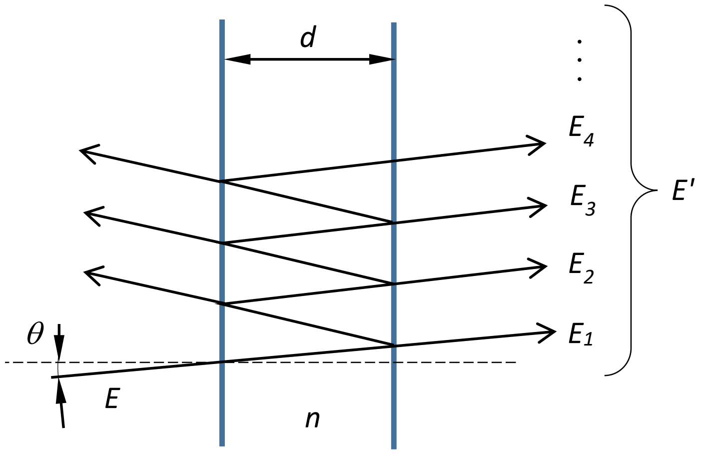


$$k_{1y} = k_{0y} + m\frac{2\pi}{a} = k_{0y} + mK\ . \tag{16}$$

$$\mathbf{K} \equiv \hat{\mathbf{y}} \cdot \frac{2\pi}{a}\,, \tag{17}$$

ahol **K** neve „rácsvektor”. A (16) egyenlet tökéletes analógiát mutat a Fresnel-reflexiónál tanult fázisillesztéssel.

Fabry-Pérot-interferométer



Merőleges beesés ($\theta \approx 0°$), a bejövő tér komplex amplitudója E . Az áteresztett tér pedig E'.

$$E_1 = E \cdot \tau \cdot e^{i\delta/2} \cdot \tau \tag{18}$$

$$E_2 = E \cdot \tau \cdot e^{i\delta/2} \cdot \rho \cdot e^{i\delta} \cdot \rho \cdot \tau \tag{19}$$

$$E_3 = E \cdot \tau \cdot e^{i\delta/2} \cdot \rho^2 \cdot e^{i\delta} \cdot \rho^2 \cdot e^{i\delta} \cdot \tau \tag{20}$$

$$E_N = E \cdot \tau^2 \cdot e^{i\delta/2} \cdot \left(\rho^2 \cdot e^{i\delta}\right)^{N-1} \tag{21}$$

Ha $|q| < 1$, akkor

$$\lim_{N\to\infty} S_N = a_1 \frac{1}{1-q} \quad ; \quad a_1 = E \cdot \tau^2 \cdot e^{i\delta/2} \quad ; \quad q = \rho^2 \cdot e^{i\delta} \tag{22}$$

$$E' = E \cdot \tau^2 \cdot e^{i\frac{\delta}{2}} \cdot \frac{1}{1-\rho^2 \cdot e^{i\delta}} \tag{23}$$

Feltéve, hogy τ és ρ valós:

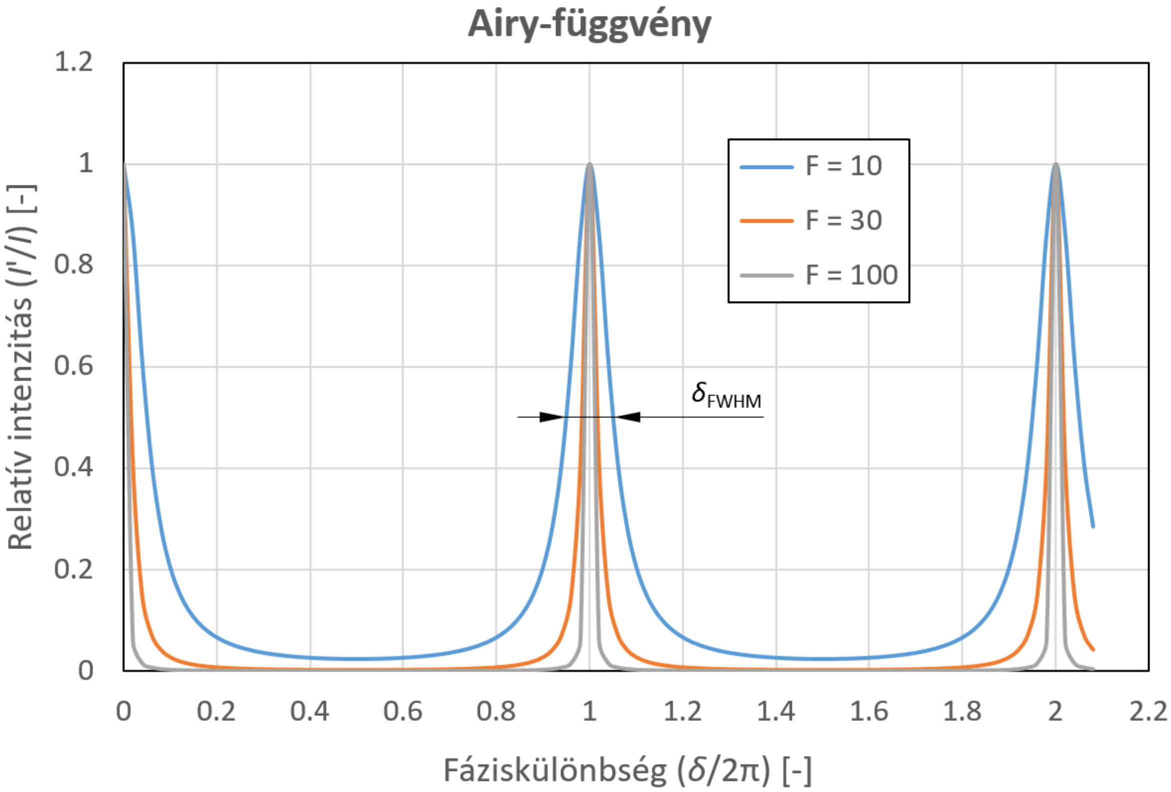
$$I' = I \cdot T^2 \cdot \frac{1}{1-R\cdot e^{-i\delta}-R\cdot e^{i\delta}+R^2} = \frac{I\cdot T^2}{1-R\cdot 2\cos\delta+R^2} \tag{24}$$

Felhasználva, hogy $\cos 2\alpha \equiv 1 - 2\sin^2\alpha$:

$$\frac{I'}{I} = \frac{T^2}{1-2R(1-2\sin^2(\delta/2))+R^2} = \frac{T^2}{(1-R)^2+4R\sin^2(\delta/2)} = \left(\frac{T}{1-R}\right)^2 \frac{1}{1+\frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2(\delta/2)} \tag{25}$$

Ha a rétegekben nincs abszorpció, akkor *R* + *T* = 1. Airy-függvény:

$$\frac{I'}{I} = \frac{1}{1+\frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2(\delta/2)} \tag{26}$$



A csúcsok félértékszélessége:

$$\frac{1}{1+\frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2(\delta_{1/2}/2)} = \frac{1}{2} \tag{27}$$

$$\sin\frac{\delta_{1/2}}{2} = \frac{1-R}{2\sqrt{R}} \tag{28}$$

Ha *R* közel egységnyi, akkor a jobb oldalon igen kis szám áll, azaz

$$\sin\frac{\delta_{1/2}}{2} \approx \frac{\delta_{1/2}}{2} \tag{29}$$

$$\delta_{1/2} = \frac{1-R}{\sqrt{R}} \quad \rightarrow \quad \delta_{FWHM} = 2\frac{1-R}{\sqrt{R}} \tag{30}$$

$$\mathcal{F} \equiv \frac{2\pi}{\delta_{FWHM}} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}. \tag{31}$$

Ez a „finesse” értéke tipikusan 30..1000 között van. Az interferenciacsúcsok helyei:

$$\delta/2 = m\cdot\pi \quad \rightarrow \quad \delta = m\cdot 2\pi \qquad m \in \mathbb{N} \tag{32}$$

A fáziskülönbség értéke (merőleges beesés esetén):

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}2d = m\cdot 2\pi \quad ; \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n} \tag{33}$$

Mennyivel kell a hullámhosszat arrébbhangolni, hogy a fázis éppen δ_{FWHM}-el változzon meg?

$$\frac{2\pi}{\lambda+\Delta\lambda}2d - \frac{2\pi}{\lambda}2d = \delta_{FWHM} \tag{34}$$

Mivel

$$\frac{1}{1+b} \approx 1-b\,, \quad \text{ha } b \ll 1 \tag{35}$$

$$\frac{1}{\lambda+\Delta\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{1+\frac{\Delta\lambda}{\lambda}} \approx \frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} - \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \tag{36}$$

Ezt beírva (34)-be:

$$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}2\pi 2d = \delta_{FWHM} \tag{37}$$

Felbontóképesség (Taylor-kritérium):

$$R \equiv \left|\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right| = \frac{1}{\delta_{FWHM}}\frac{2\pi 2d}{\lambda} = \frac{m\cdot 2\pi}{\delta_{FWHM}} = m\cdot\mathcal{F}\ . \tag{38}$$

Itt *m* sokkal nagyobb lehet, mint a diffrakciós rácsok esetében! Az interferenciacsúcsokat lézertechnikában longitudunális rezonátormódusnak nevezik. Pl. He-Ne lézer: λ = 633 nm, d = 150 mm estén:

$$m = \frac{2d}{\lambda} = \frac{300}{633\cdot 10^{-6}} = 473\ 934\ ! \tag{39}$$

Egy He-Ne lézer zárótükrének a reflektanciája nagyobb mint 99.9%, a kicsatoló tüköré pedig kb. 99%. Ha ezek mértani közepét helyettesítjük be a finesse képletébe:

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} = \frac{\pi\sqrt{0.989}}{1-0.989} = 284 \tag{40}$$

Ekkor a felbontóképesség

$$R = m\cdot\mathcal{F} = 1.346\cdot 10^8 \tag{41}$$

Egy interferenciacsúcs félértékszélessége pedig (38) alapján:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{633\ \mathrm{nm}}{1.346\cdot 10^8} = 0.0047\ \mathrm{pm}\ ! \tag{42}$$

Ez frekvenciában 3.5 MHz-es sávszélességnek felel meg (ld. egymódusú lézer). A közönséges He-Ne lézerek egyszerre több módusban működnek (tipikusan 2-5), amelyek 1000-200 MHz távolságban vannak egymástól.

Alkalmazás: lézerrezonátorok, Fabry-Pérot etalonok, optikai sávszűrők, spektrumanalizátorok, rezonátor-lecsengési spektroszkópia (cavity ring-down spectroscopy) stb.