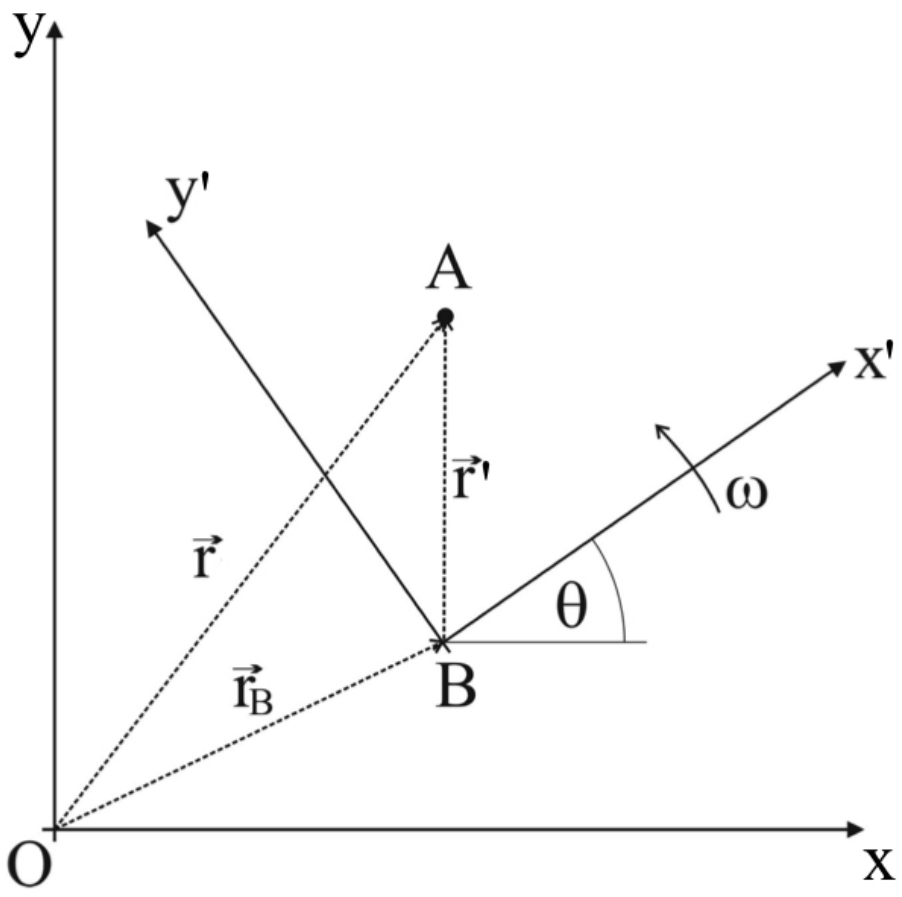
<u>Mozgás leírása nem-inerciarendszerekben. Tehetetlenségi erők.</u>

Bokor Nándor, BME, 2013

(x,y): *inerciarendszer*.

(x′,y′): *gyorsuló vonatkoztatási rendszer*. Ez *nem inerciarendszer*, mert:
(1) az origója, B, *transzlációs gyorsulást végez* az (x,y) inerciarendszerhez képest,
(2) az (x′,y′) koordinátatengelyek *forognak* a B origó körül.



A tömegpont, amelynek a mozgását le akarjuk írni, éppen az A pontban tartózkodik. Az (x,y) inerciarendszerben mért helyvektorát így írhatjuk:

$$\vec{r} = \vec{r}_B + \vec{r}\,' = \vec{r}_B + \left(x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,'\right), \qquad (1)$$

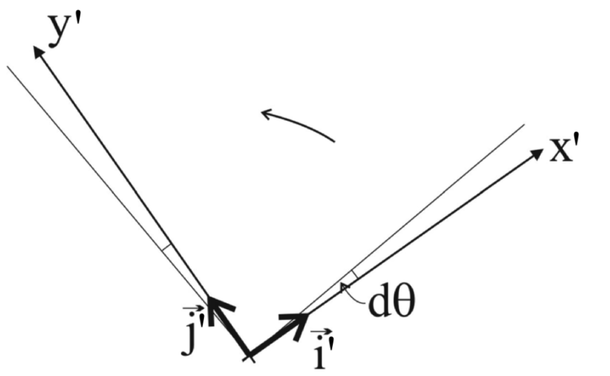
ahol $\vec{r}\,'$ az (x′,y′) gyorsuló vonatkoztatási rendszerben mért helyvektor, $\vec{i}\,'$és $\vec{j}\,'$pedig a gyorsuló vonatkoztatási rendszer x′- és y′-irányú egységvektorai.
Amint az alábbi ábra mutatja, ezeknek az egységvektoroknak az idő szerinti deriváltja (változási gyorsasága) így írható:

$$\frac{d\vec{i}\,'}{dt} = \frac{d\theta \cdot \vec{j}\,'}{dt} = \omega \cdot \vec{j}\,' \qquad (2)$$

illetve

$$\frac{d\vec{j}\,'}{dt} = -\frac{d\theta \cdot \vec{i}\,'}{dt} = -\omega \cdot \vec{i}\,', \qquad (3)$$

ahol $\omega = \dot{\theta}$ az (x′,y′) tengelyek szögsebessége.



Ez a szögsebesség vektoriális alakban a következőképpen írható fel:

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}\,', \qquad (4)$$

ahol $\vec{k}\,'$ a z′-irányú egységvektor (amely az ábra síkjából kifelé mutat). Az $\vec{\omega}$ iránya tehát az ún. „jobbcsavar-szabályt“ követi.

A (4) alapján könnyen beláthatóak az alábbi összefüggések:

$$\vec{\omega} \times \vec{i}\,' = \omega \cdot \vec{j}\,' \qquad (5)$$

és

$$\vec{\omega} \times \vec{j}\,' = -\omega \cdot \vec{i}\,'. \qquad (6)$$

A (2)-t az (5)-tel, és a (3)-at a (6)-tal összevetve az

$$\dot{\vec{i}}' = \vec{\omega} \times \vec{i}' \tag{7}$$

és

$$\dot{\vec{j}}' = \vec{\omega} \times \vec{j}' \tag{8}$$

összefüggésekhez jutunk.

A tömegpont (x,y) rendszerbeli sebességét úgy kapjuk meg, hogy az (1) egyenletet idő szerint deriváljuk:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_B + \frac{d}{dt}\left(x'\vec{i}' + y'\vec{j}'\right) = \dot{\vec{r}}_B + \left(x'\dot{\vec{i}}' + y'\dot{\vec{j}}'\right) + \left(\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}'\right). \tag{9}$$

A (9) jobb oldalán szereplő második tagot (7) és (8) felhasználásával átírhatjuk:

$$x'\dot{\vec{i}}' + y'\dot{\vec{j}}' = \vec{\omega} \times \left(x'\vec{i}' + y'\vec{j}'\right) = \vec{\omega} \times \vec{r}', \tag{10}$$

a (9) jobb oldalán szereplő harmadik tag pedig a tömegpontnak a *nem-inerciarendszerben mért* sebességét adja meg:

$$\vec{v}' = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}'. \tag{11}$$

(10)-et és (11)-et a (9)-be behelyettesítve a tömegpont sebességére a

$$\vec{v} = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}' \tag{12}$$

összefüggés adódik, ahol $\vec{v}_B$ az a sebesség amellyel a B origó mozog az inerciarendszerben mérve.

Az A pontban levő tömegpont (inerciarendszerben mért) gyorsulása a (12) idő szerinti deriválásából kapható meg:

$$\vec{a} = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \dot{\vec{v}}'. \tag{13}$$

A fenti összefüggéseket használva a (13) jobb oldalán szereplő harmadik tag átírható a következő alakba:

$$\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}'=\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'+\vec{v}'\right)=\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)+\vec{\omega}\times\vec{v}', \tag{14}$$

a (13) jobb oldalán szereplő negyedik tag pedig ebbe az alakba:

$$\dot{\vec{v}}'=\frac{d}{dt}\left(\dot{x}'\vec{i}'+\dot{y}'\vec{j}'\right)=\dot{x}'\dot{\vec{i}}'+\dot{y}'\dot{\vec{j}}'+\ddot{x}'\vec{i}'+\ddot{y}'\vec{j}'=\vec{\omega}\times\left(\dot{x}'\vec{i}'+\dot{y}'\vec{j}'\right)+\vec{a}'=\vec{\omega}\times\vec{v}'+\vec{a}', \tag{15}$$

ahol $\vec{a}'$ a tömegpont gyorsulása *a nem-inerciarendszerben mérve*.

Tehát

$$\vec{a}=\vec{a}_B+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)+2\vec{\omega}\times\vec{v}'+\vec{a}'. \tag{16}$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt a tömegpont *m* tömegével, és rendezzük át az egyenletet, hogy *úgy nézzen ki*, mint Newton 2. törvénye (amit a gyorsuló megfigyelő nézőpontjából írtunk fel):

$$m\vec{a}'=\vec{F}_e-m\vec{a}_B+m\vec{r}'\times\dot{\vec{\omega}}+m\vec{\omega}\times\left(\vec{r}'\times\vec{\omega}\right)+2m\vec{v}'\times\vec{\omega}, \tag{17}$$

ahol $m\vec{a}$ helyett az eredő erőt, $\vec{F}_e$-t írhattuk be, Newton 2. törvénye szerint (amely inerciarendszerekben érvényes).

Összefoglalva: ahhoz, hogy a Newton2-höz hasonló egyenletet használhasson, a nem-inerciarendszerbeli megfigyelő kénytelen további „erőket“ bevezetni az egyenlet jobb oldalán (az *igazi, fizikai kölcsönhatásokból származó* $\vec{F}_e$ eredő erő mellé). Ezeket a további tagokat „tehetetlenségi erőknek“ nevezzük. Ezek nem írnak le semmilyen fizikai kölcsönhatást. Csupán matematikai kifejezések, amelyekre a gyorsuló megfigyelőnek azért van szüksége, mert szeretne Newton 2. törvényéhez hasonló kinézetű egyenletet használni.
A (17) jobb oldalán szereplő tehetetlenségi „erők“ elnevezése:

$-m\vec{a}_B$:	transzlációs tehetetlenségi „erő“
$m\vec{r}'\times\dot{\vec{\omega}}$:	Euler-„erő“
$m\vec{\omega}\times\left(\vec{r}'\times\vec{\omega}\right)$:	centrifugális „erő“
$2m\vec{v}'\times\vec{\omega}$:	Coriolis-„erő“