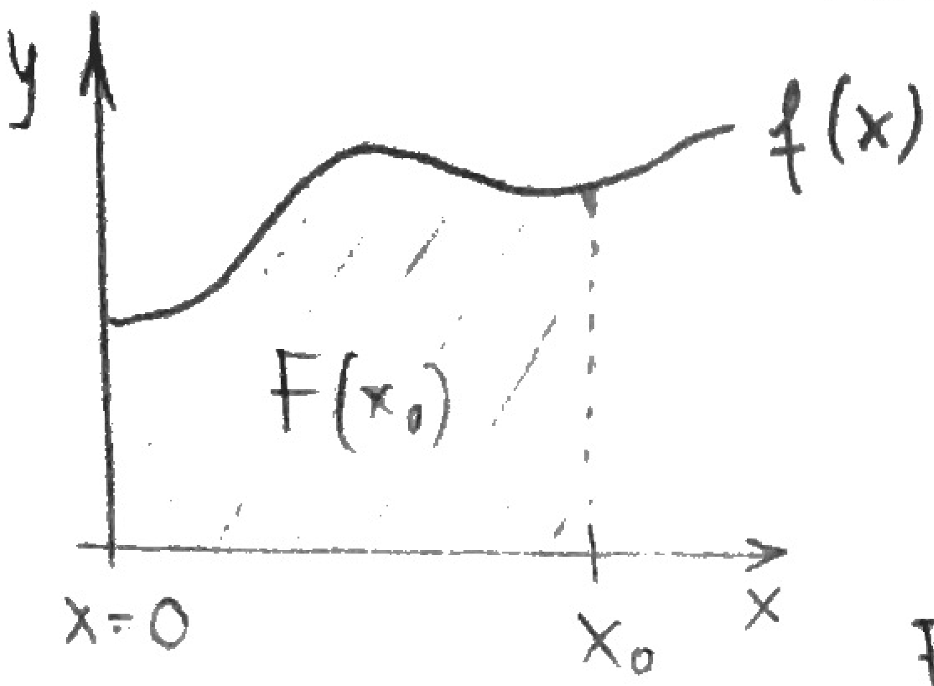
Ismétlés:

Integrálszámítás:



$F(x_0)$ a görbe alatti terület $x=0$ és x_0 között.

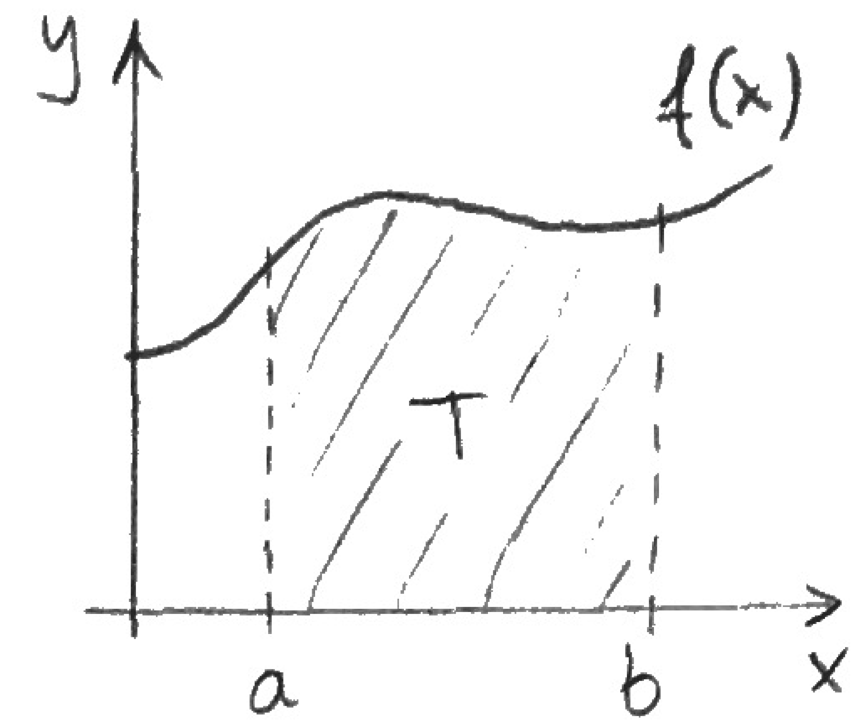
$$F'(x_0)=f(x_0)$$

$F(x)$: primitív fgv.

Határozatlan integrál:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{állandó}}}{c},$$ a primitív függvények összessége.

Kiegészítés:



Kérdés:

Mekkora a görbe alatti terület $x=a$ és $x=b$ határok között?

$$T = F(b) - F(a)$$

Határozott integrál:

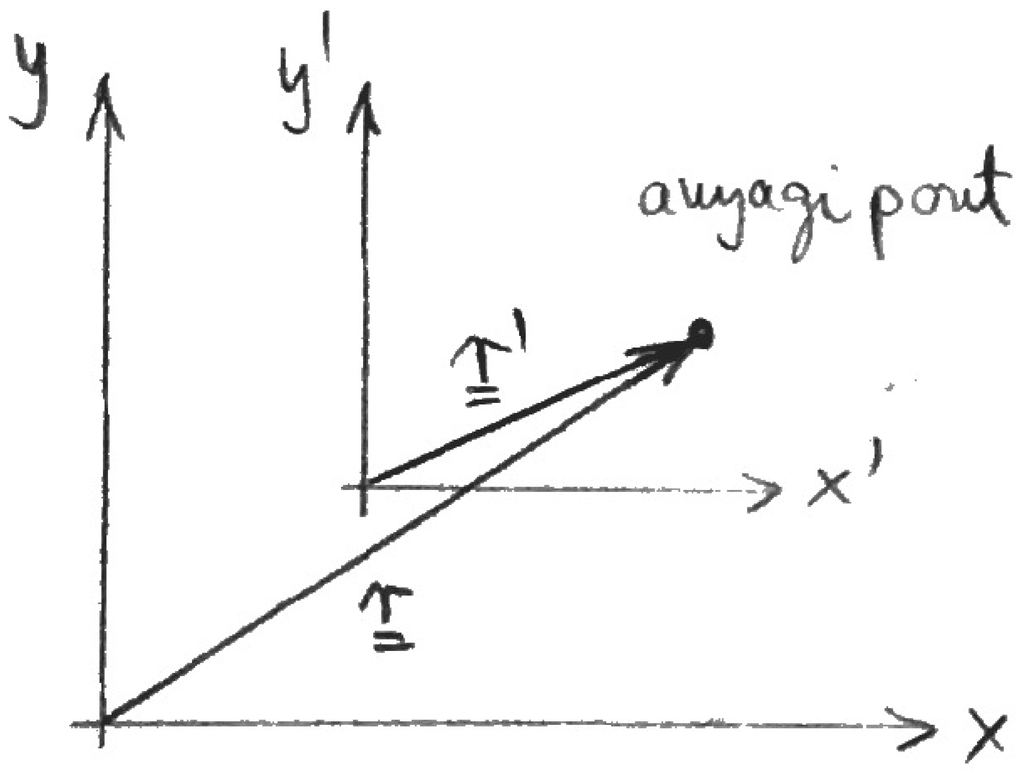
$$T \equiv \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)} \equiv \underset{\substack{\uparrow \\ \text{jelölés}}}{\left[F(x)\right]_a^b}$$

Newton–Leibniz-tétel

Kinematika (mozgástan).

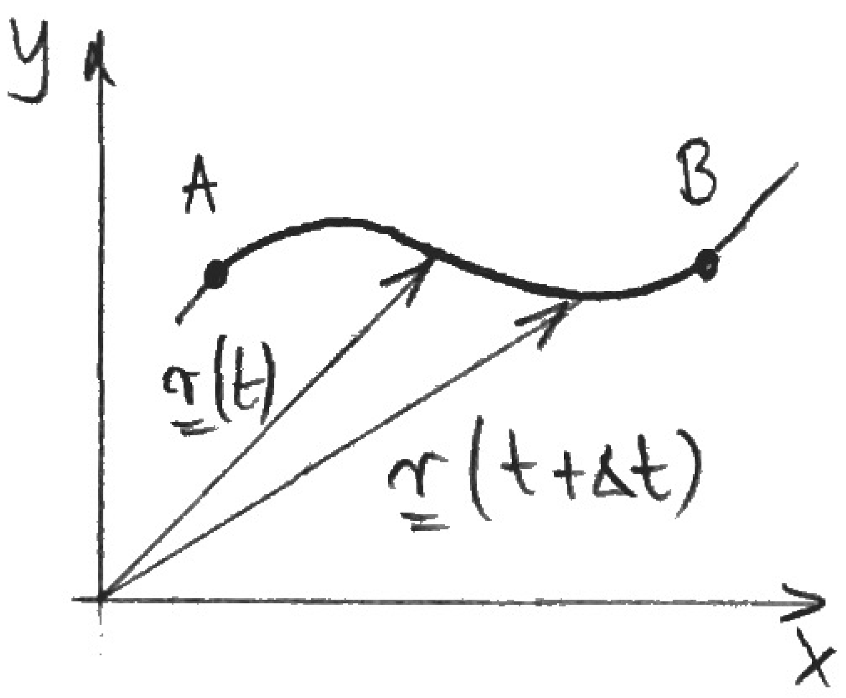
I.) Mozgásállapot jellemzői

1.) A helyvektor



A helyvektor vonatkoztatási rendszer (koordináta-rendszer) függő.

2.) Pálya, út, elmozdulás



Pálya: Az anyagi pont által befutott görbe.

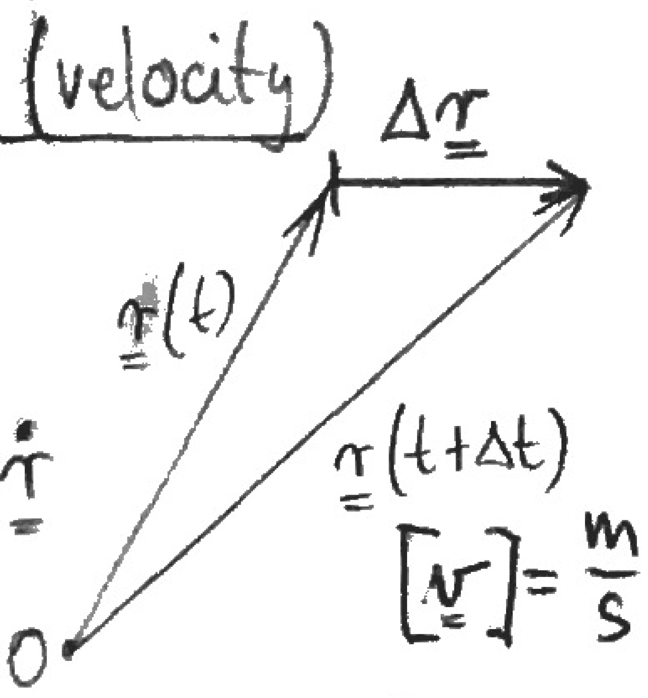
paraméteres egyenlete:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \dots \\ y(t) &= \dots \\ z(t) &= \dots \end{aligned}\right\} \underline{\underline{r}}(t) \text{ függvény}$$

Út: A pályagörbe hossza a mozgás kezdő- és végpontja között. Jele: s [m], skalár!

Elmozdulás: A mozgás kezdőpontjából a végpontba mutató vektor: $\Delta\underline{\underline{r}} = \underline{\underline{r}}(t+\Delta t) - \underline{\underline{r}}(t)$. $\left(|\Delta\underline{\underline{r}}| \neq s!\right)$

3.) Sebességvektor (velocity)



Vektormennyiség:

$$\underline{\underline{v}} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\underline{\underline{r}}}{\Delta t} = \frac{d\underline{\underline{r}}}{dt} = \dot{\underline{\underline{r}}}$$

$$[\underline{\underline{v}}] = \frac{m}{s}, \ \frac{km}{h}$$

reprezentációval:

$$\underline{\underline{v}} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\underline{\underline{r}}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \end{pmatrix} = \dot{\underline{\underline{r}}}$$

Mindig a pálya érintőjének irányába mutat.

Átlagsebesség:

$$\langle v \rangle = \frac{s_{össz}}{t_{össz}}$$

sebesség nagysága

$$v = |\underline{\underline{v}}| \equiv \text{speed}$$

4.) Az elmozdulás és a sebesség kapcsolata

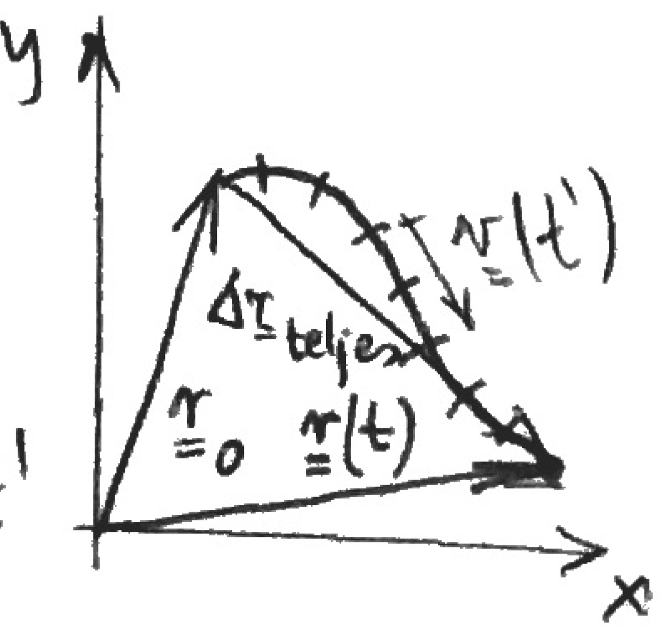
$$\underline{\underline{v}} = \frac{d\underline{\underline{r}}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\underline{\underline{r}}}{\Delta t} \longrightarrow$$ elemi elmozdulás: $\Delta\underline{\underline{r}} = \underline{\underline{v}} \cdot \Delta t$

A teljes elmozdulás:

$$\Delta\underline{\underline{r}}_{teljes} = \sum \Delta\underline{\underline{r}} = \sum \underline{\underline{v}}(t)\,\Delta t$$

precízebben:

$$\Delta\underline{\underline{r}}_{teljes} = \int_0^t \underline{\underline{v}}(t')\,dt'$$

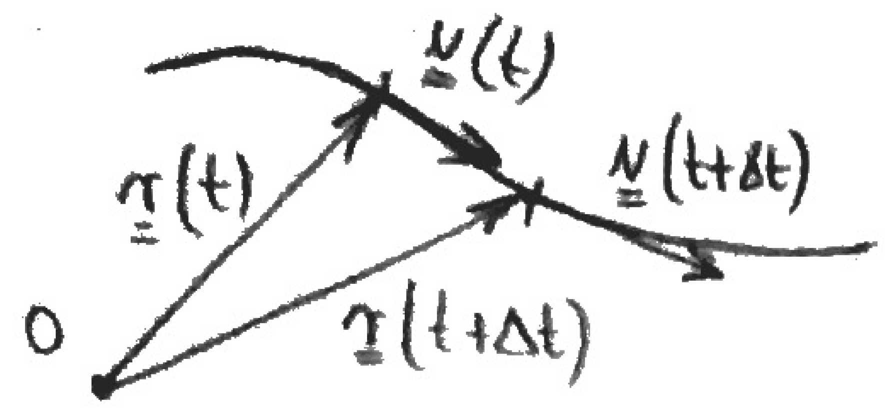


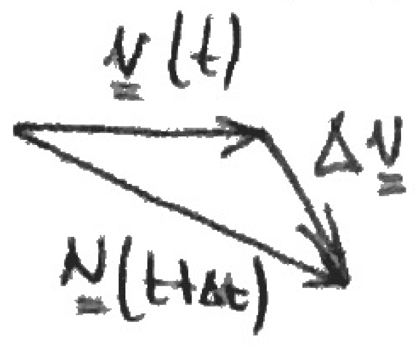
A helyvektor:

$$\underline{\underline{r}}(t) = \underline{\underline{r}}_0 + \Delta\underline{\underline{r}}_{teljes} = \underline{\underline{r}}_0 + \int_0^t \underline{\underline{v}}(t')\,dt'$$

5.) Gyorsulásvektor (acceleration).

$$\underline{\underline{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{\underline{v}}}{\Delta t} = \frac{d\underline{\underline{v}}}{dt} = \dot{\underline{\underline{v}}} = \ddot{\underline{\underline{r}}} \qquad [|\underline{\underline{a}}|] = \frac{m}{s^2}$$





$\underline{\underline{a}}$ a sebességváltozás irányába mutat.

reprezentációval:

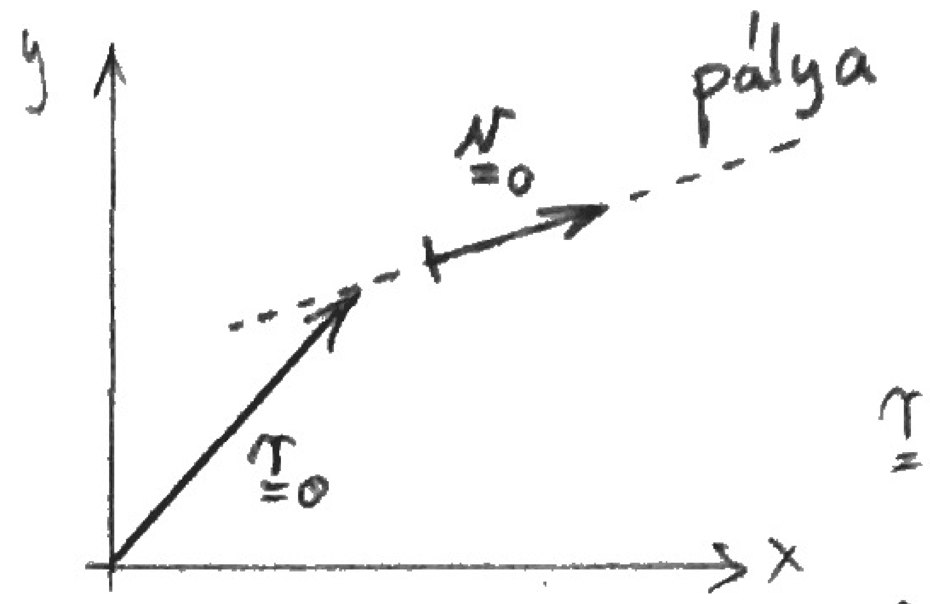
$$\underline{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \dot{\underline{v}}$$

A sebességváltozás kiszámítása:

$$\underline{\underline{v}}(t) = \underline{\underline{v}}_0 + \Delta \underline{\underline{v}} = \underline{\underline{v}}_0 + \int_0^t \underline{\underline{a}}(t')\,dt'.$$

II. Speciális mozgások.

1.) Egyenes vonalú, egyenletes mozgás



$$\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{v}}_0 = \text{állandó}$$

$$\underline{\underline{a}} = \dot{\underline{\underline{v}}} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{r}}(t) = \underline{\underline{r}}_0 + \int_0^t \underline{\underline{v}}_0 \cdot dt'$$

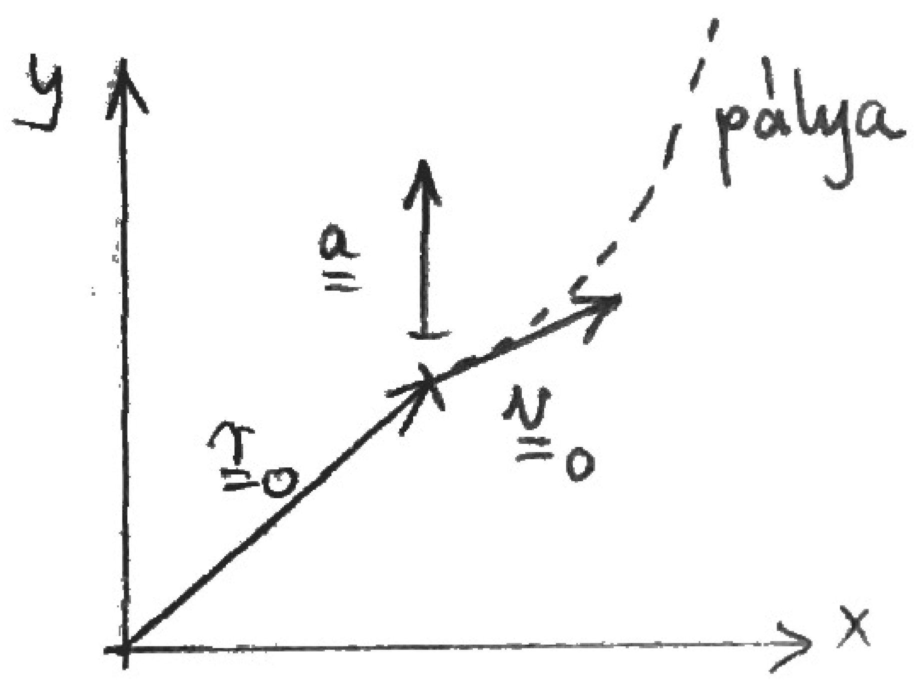
$$\underline{\underline{r}}(t) = \underline{\underline{r}}_0 + \underline{\underline{v}}_0 \cdot t$$

reprezentációban:

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \cdot t = \begin{pmatrix} x_0 + v_x t \\ y_0 + v_y t \\ z_0 + v_z t \end{pmatrix}$$

Kísérlet: Mikola-cső.

2.) Egyenletesen változó mozgás. ($\underline{\underline{a}}$ = áll.)



$$\underline{\underline{v}}(t) = \underline{\underline{v}}_0 + \int_0^t \underline{\underline{a}}\,dt'$$

$$\underline{\underline{v}}(t) = \underline{\underline{v}}_0 + \underline{\underline{a}} \cdot t$$

$\Downarrow$

a sebességvektor végpontja egyenes mentén mozog (hodográf).

A helyvektor:

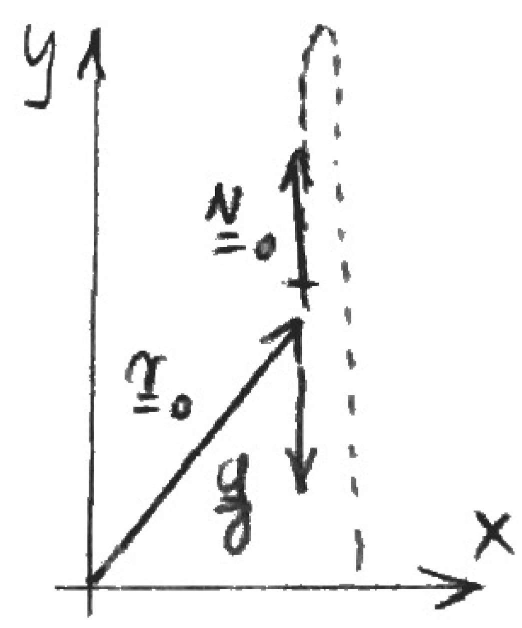
$$\underline{\underline{r}}(t) = \underline{\underline{r}}_0 + \int_0^t \underline{\underline{v}}(t')\,dt' = \underline{\underline{r}}_0 + \int_0^t (\underline{\underline{v}}_0 + \underline{\underline{a}}\,t')\,dt'$$

$$\underline{\underline{r}}(t) = \underline{\underline{r}}_0 + \underline{\underline{v}}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\underline{\underline{a}}\,t^2 \rightarrow$$ az a) és b) esetekben ezt írjuk át reprezentációba.

ha $\underline{\underline{v}}_0 = \emptyset$,

négyzetes úttörvény : Galilei-lejtő

a.) Függőleges hajítás



$$\underline{v}_0 = (0, v_0),\ \underline{r}_0 = (x_0, y_0)$$

$$\underline{a} = (0, -g)$$

$$\underline{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 - gt \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$$

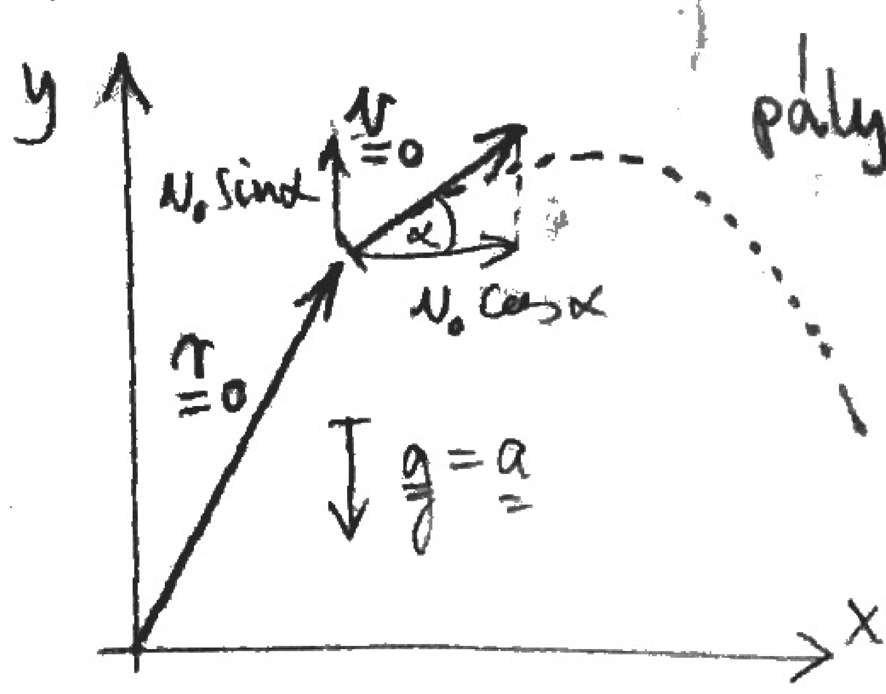
Milyen magasra emelkedik?

tetőponton $v_y(t^*) = \emptyset \rightarrow v_0 - g t^* = \emptyset$

ekkor a magasság:

$$y(t^*) = y_0 + \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = y_0 + \frac{v_0^2}{2g}.$$

b.) Ferde hajítás.



$$\underline{r}_0 = (x_0, y_0),\quad \underline{a} = (0, -g)$$

$$\underline{v}_0 = (v_0 \cos\alpha, v_0 \sin\alpha).$$

$$\underline{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha - gt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_0 \cos\alpha \cdot t \\ y_0 + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2 \end{pmatrix}$$

Pálya alakja?

$\boxed{\text{Ejtőgép!}}$

(1) $x = x_0 + v_0 \cos\alpha \cdot t \longrightarrow t = \dfrac{x - x_0}{v_0 \cos\alpha}$

(2) $y = y_0 + v_0 \sin\alpha\, t - \dfrac{g}{2} t^2 \rightarrow y = y_0 + (x - x_0)\tan\alpha - \left(\dfrac{x - x_0}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 \dfrac{g}{2}$

Kísérlet: ejtőgép.

parabola!

c.) Origóból ferde hajítás.

$$r_0 = \underline{0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}:$$

$$y = x \tan\alpha - \frac{x^2 g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}$$

$$y = \frac{x}{\cos\alpha} \underbrace{\left(\sin\alpha - \frac{x g}{2 v_0^2 \cos\alpha}\right)}_{= \emptyset,\ \text{ha } x = d}$$

$$d = \frac{v_0^2}{g} \cdot 2 \sin\alpha \cos\alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

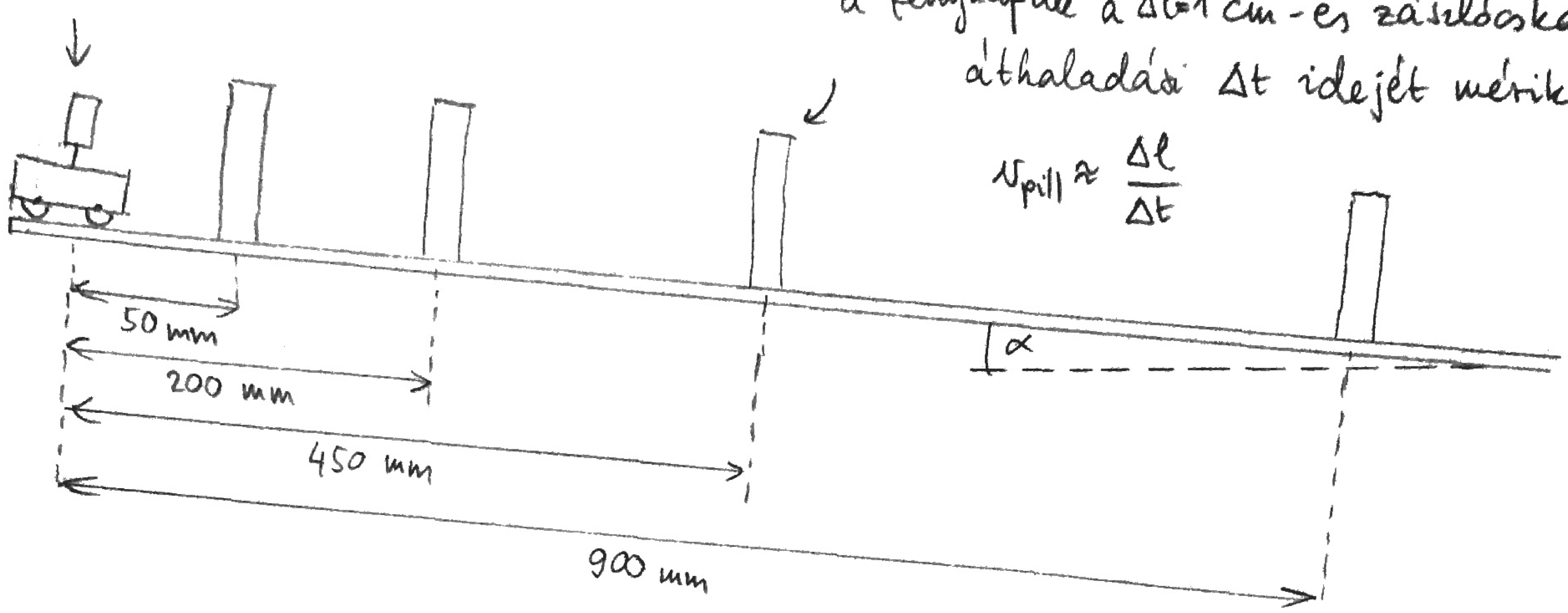
d maximális, ha $\alpha = 45°$

Kísérlet légpárnás sínen:

kiskocsi 1 cm széles zászlócskával

a fénykapuk a Δl=1 cm-es zászlócska áthaladási Δt idejét mérik.

$$v_{pill} \approx \frac{\Delta l}{\Delta t}$$



Mérési eredmények:

	s(mm)	Δt (s)	$v = \frac{\Delta l}{\Delta t}$ $\left(\frac{mm}{s}\right)$
1. kapu	50	0.149	6,7
2. kapu	200	0.073	13,7
3. kapu	450	0.050	20,0
4. kapu	900	0.038	26,3

Elmélet:

$$\left.\begin{aligned} v &= a \cdot t \\ s &= \frac{a}{2} \cdot t^2 \end{aligned}\right\} \quad s = \frac{v^2}{2a}$$

$$v = \sqrt{2as},$$

ahol $a = g \sin\alpha$