FIZIKA BSc, III. évfolyam / 1. félév
„Optika” – előadásjegyzet

GEOMETRIAI OPTIKA

dr. Erdei Gábor, 2019-10-14

AJÁNLOTT SZAKIRODALOM:

Klein-Furtak, Optics
Richter, Bevezetés a modern optikába
Born-Wolf, Principles of optics

Geometriai optika: közelítés, amely a fényterjedést és közeghatáron való áthaladást geometriai alakzatok – görbék segítségével írja le. Ezen görbéket fénysugaraknak nevezzük.

ÁLTALUNK ALKALMAZOTT KÖZELÍTÉSEK

irányfüggés – csak **izotróp** közegeket tekintünk, pl. üveget (ekkor az 1. és 2. sugárdefiníció ugyanazt adja, azaz a fénysugár ‖ **k** ‖ **S**, ld. alább)

helyfüggés – **homogén** és **inhomogén** közegeket tekintünk (a fénysugarak görbék is lehetnek nem csak egyenesek)

térerő függés – csak **lineáris** közegeket tekintünk (a fénysugarak kölcsönhatás nélkül keresztezhetik egymást; a tér minden pontjában azonos ω a gerjesztés körfrekvenciájával)

hullámhosszfüggés – **monokromatikus** eset (csak egy hullámhossz van a spektrumban, időben koherens eset)
polikromatikus eset (időben inkoherens fény – hullámhossz-komponensekre bontható)

térbeli koherencia – **térben koherens** eset, pl. pontforrás, síkhullám (van hullámfront – csillagfény, lézer) vagy
térben inkoherens eset (diffúz fény – pontforrásokra bontható)

ELMÉLETI ALAPOK

Maxwell egyenletek → vektoriális hullámegyenlet:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t) - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0 \quad ; \quad n^2 = \varepsilon_r \mu_r \text{ (Maxwell reláció)} \qquad (1)$$

Ha monokromatikus, ω körfrekvenciájú hullámot vizsgálunk, a megoldás általános alakja lineáris közegekben:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot e^{-i\omega t}. \qquad (2)$$

Mivel a gerjesztés időben harmonikus, a komplex formalizmust használjuk az EM tér leírására (tehát **E** komplex, csak elhagytuk a hullámvonalat). Figyeljünk arra, hogy innentől fogva az egyszerűség kedvéért a fordított fázisterjesztés módszerét használjuk, azaz a fázis siet a terjedés irányában, és késik az idő függvényében ($\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}^*$). Ezzel a próbafüggvénnyel az egyenlet az időfüggetlen, ún. Helmholtz-egyenlet alakot ölti:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -k^2 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) . \qquad (3)$$

A fenti egyenletben *k* az *ω* körfrekvenciájú *síkhullám* hullámszámvektorának hosszát jelöli. Megoldások speciális esetekben:

Síkhullám: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \cdot e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \varphi_0)}$ (4)

Gömbhullám: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}) \cdot e^{i(k\cdot r + \varphi_0)} / r$, (5)

ahol $k \equiv 2\pi/\lambda$, $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ pedig irányfüggő egységvektor jelöl. A Helmholtz-egyenlet megoldása általános esetben (ahol $\mathbf{E}_0$ mennyiség valós vektor):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \cdot e^{i\cdot k_0 \cdot S(\mathbf{r})} . \tag{6}$$

Eikonál (εικών = kép görögül): a tér pontjait az elektromágneses hullám fázisviszonyai szerint jellemző skalár mennyiség, jelölése: $S(\mathbf{r})$. A tér $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{r}_2$ helyvektorral jellemzett pontjai között mérhető fáziskülönbség ($\Delta\varphi$) az eikonállal kifejezve:

$$\Delta\varphi = k_0 \cdot S(\mathbf{r}_2) - k_0 \cdot S(\mathbf{r}_1) . \tag{7}$$

Lassan változó amplitúdójú közelítés

Ahhoz, hogy (6)-nak megfelelően beszélhessünk az EM tér fázisviszonyairól, szükséges, hogy létezzen a „fázis" fogalma. Amennyiben ugyanis az $\mathbf{E}_0$ téramplitudó térben gyorsabban változik, mint a hullámhossz, a fázisállapot elveszti értelmét. Az amplitúdó lassú változása kizárólag egy bizonyos feltétel teljesülése esetén valósul meg, aminek a szerepe az optikában, és általában a hullámtanban jelentős. Emiatt az alábbiakban röviden megvizsgáljuk e problémát.

A térbeli pozíció $\mathbf{r}_0$ helyvektor körüli kismértékű ($\Delta\mathbf{r}$) helyzetváltozás esetén a térerősség a következő alakban közelíthető:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) \approx \Delta\mathbf{E} + \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \Delta\left(\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) \cdot e^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)}\right) + \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \Delta\mathbf{E}_0 \cdot e^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)} + \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) \cdot \Delta e^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)} + \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \tag{8}$$

Az első tagot akkor hanyagolhatjuk el, ha feltételezzük, hogy a térerősség amplitudója térben sokkal lassabban változik mint a fázis:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) \cdot \Delta e^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)} + \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) \cdot \left(e^{i(k_0 \mathrm{grad}(S(\mathbf{r}_0))\Delta\mathbf{r} + k_0 S(\mathbf{r}_0))} - e^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)}\right) + \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) . \tag{9}$$

A negatív előjelű tag pont akkora mint az utolsó konstans, tehát

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) \cdot e^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)} \cdot e^{ik_0 \mathrm{grad}(S(\mathbf{r}_0))\Delta\mathbf{r}} , \tag{10}$$

ami nem más mint egy síkhullám egyenlete, ahol a lokális hullámszámvektor:

$$\mathbf{k}_{lok} = k_0 \cdot grad\left(S(\mathbf{r}_0)\right) . \tag{11}$$

Ez az összefüggés úgy értelmezhető, hogy lassan változó amplitúdójú közelítésben az EM tér lokálisan úgy viselkedik mint egy síkhullám, a térerősség változását pedig elsősorban a fázis megváltozása vezérli és nem az amplitúdójé. Ez egyben azt is jelenti, hogy *hullámhosszról* csak és kizárólag a lassan változó amplitúdójú közelítésben van értelme beszélni. A geometriai optikai közelítés bevezetése után (11) további értelmet fog nyerni.

Most azt vizsgáljuk meg, hogy mit jelent (8)-ban a térerősségamplitúdó megváltozásának elhanyagolása. Ha **J** a Jakobi-mátrix, akkor a megváltozás a következő alakban írható föl:

$$\Delta\mathbf{E}_0 \cdot \mathrm{e}^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)} << \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) \cdot \Delta\mathrm{e}^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}\Delta\mathbf{r} \cdot \mathrm{e}^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)} << \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) \cdot ik_0 \mathrm{e}^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)} \cdot \mathrm{grad}(S)\Delta\mathbf{r} \tag{12}$$

Csak az *x*-vektorkomponenst kifejtve:

$$\left|\mathrm{grad}(E_{0x})\Delta\mathbf{r}\right|\cdot \mathrm{e}^{ik_0S(\mathbf{r}_0)} << E_{0x}\cdot k_0\mathrm{e}^{ik_0S(\mathbf{r}_0)}\cdot\left|\mathrm{grad}(S)\Delta\mathbf{r}\right|, \tag{13}$$

és a hibát felülről becsülve (azaz feltesszük, hogy $\Delta\mathbf{r} \parallel \mathrm{grad}(E_{0x})$):

$$\frac{\left|\mathrm{grad}(E_{0x})\right|}{E_{0x}} << k_0\cdot\left|\mathrm{grad}(S)\right|. \tag{14}$$

Az összefüggést geometriai optikai közelítésben fogjuk tudni jól értelmezni, ld. alább.

A GEOMETRIAI OPTIKA ALAPEGYENLETE, ÉRVÉNYESSÉGI FELTÉTELEK

A Helmholtz-egyenlet vektoriális, de mivel a Laplace-operátor skalár dimenziójú mennyiség, az egyenlet szétbontható független vektorkomponensekre (E_x, E_y, E_z). Csak az x-komponenst vizsgálva tehát:

$$\nabla^2 E_x(\mathbf{r}) = -k^2\cdot E_x(\mathbf{r}). \tag{15}$$

Ebbe behelyettesítjük a próbafüggvényt:

$$\nabla^2\left(E_{0x}(\mathbf{r})\cdot e^{ik_0S(\mathbf{r})}\right) = -k^2\cdot E_{0x}(\mathbf{r})\cdot e^{ik_0S(\mathbf{r})}. \tag{16}$$

Itt jól látható, hogy a vektoramplitudó (E_{0x}) és az eikonál (S) helyfüggőek, tehát a továbbiakban ezt sem jelöljük. Az alábbi vektorazonossággal az egyenlet bal oldala átalakítható:

$$\nabla^2(a\cdot b)\equiv a\cdot\nabla^2 b + 2\nabla a\cdot\nabla b + b\cdot\nabla^2 a. \tag{17}$$

Az új egyenlet így:

$$E_{0x}\cdot\nabla^2 e^{ik_0S} + 2\cdot\nabla E_{0x}\cdot\nabla e^{ik_0S} + e^{ik_0S}\cdot\nabla^2 E_{0x} = -k^2\cdot E_{0x}\cdot e^{ik_0S}. \tag{18}$$

Az első tagnál elvégzünk egy azonos átalakítást $\nabla^2 u \equiv \nabla\cdot\nabla\cdot u$ alapján:

$$\nabla^2 e^{ik_0S} = \nabla\left(\nabla e^{ik_0S}\right) = \nabla\left(ik_0 e^{ik_0S}\cdot\nabla S\right) = -k_0^2 e^{ik_0S}\cdot\nabla S\cdot\nabla S + \nabla^2 S\cdot ik_0 e^{ik_0S}. \tag{19}$$

ahol felhasználtuk még $\nabla(a\cdot b) \equiv a\nabla b + b\nabla a$ -et is. A második tag egyszerűen átalakítható a láncszabály alkalmazásával:

$$\nabla e^{ik_0S} = ik_0 e^{ik_0S}\cdot\nabla S. \tag{20}$$

(19)-et, (20)-t visszahelyettesítve (18)-be, és a minden tagban szereplő e^{ik_0S} tényezővel egyszerűsítve a következőt kapjuk:

$$-k_0^2\cdot E_{0x}\cdot\nabla S\cdot\nabla S + E_{0x}\cdot\nabla^2 S\cdot ik_0 + 2\cdot\nabla E_{0x}\cdot ik_0\cdot\nabla S + \nabla^2 E_{0x} = -k^2\cdot E_{0x}. \tag{21}$$

Ennek az összefüggésnek van valós és képzetes része, mindkettőnek külön-külön egyenlőnek kell lennie. A valós részek egyenlősége alapján:

$$-k_0^2\cdot E_{0x}\cdot\left|\nabla S\right|^2 + \nabla^2 E_{0x} = -k^2\cdot E_{0x}. \tag{22}$$

Amennyiben

$$\left|\nabla^2 E_{0x}\right| << k^2\cdot E_{0x} \Rightarrow \frac{\left|\nabla^2 E_{0x}\right|\cdot\lambda^2}{E_{0x}} << 4\pi^2. \tag{23}$$

Így (22) egyenletből kiesik a térerősség:

$$k_0^2\cdot\left|\nabla S\right|^2 = k^2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\left|\nabla S\right|^2 = n^2}. \tag{24}$$

Ez a geometriai optika alapegyenlete, az ún. *eikonál-egyenlet*. Egyszerű alakja azt fejezi ki, hogy a geometriai optika közelítésének érvényessége esetén az EM tér fázisváltozásait nem befolyásolja a térerősség változása, csupán a törésmutató-eloszlás. Az eikonál-egyenletből következik, hogy

$$\left| grad\left(S(\mathbf{r})\right) \right| = n(\mathbf{r}) , \tag{25}$$

ahol n(**r**) a lokális törésmutató. Az eikonál-egyenletet peremfeltételekkel együtt megoldva (azaz az *S* értékét ismerni kell egy felület mentén) megkaphatjuk az eikonál értékét a tér minden pontjában.

A (23) feltétel akkor teljesül, azaz akkor vagyunk a geometriai optika érvényességi körén belül, ha a térerősség-amplitudó relatív megváltozása (pontosabban a második derivált) hullámhossznyi szakaszon elhanyagolható mértékű. Az állítás megfordítva talán még érthetőbb: akkor használhatjuk a geometriai optikát, ha a hullámhossz nagyon kicsi az EM tér amplitudó-változásainak jellemző térbeli kiterjedéséhez képest (az amplitúdó nem befolyásolja a fázist). Emiatt a geometriai optikát gyakran szokás „nulla hullámhosszúságú" közelítésnek is nevezni, mely nem teljesül pl. árnyék szélén, vagy fókuszpont közelében, ahol az előbbi esetben **E**-nek szakadása, utóbbi esetben pedig szingularitása van.

Az eikonál-egyenlet legfőbb alkalmazási területe az *inhomogén közegek* számítása. Példák:

- légköri effektusok (naplemente, délibáb)
- fénytörés gravitációs térben lévő folyadékokban
- szemlencse
- planár hullámvezető lencsék
- gradiens lencsék száloptikához, lézerdiódához, leképezéshez
- elektronoptikák

LOKÁLIS SÍKHULLÁMÚ KÖZELÍTÉS

Ha a (14) feltétel mellett teljesül a geometriai optika alapfeltétele is, azaz érvényes az eikonál-egyenlet, akkor *n* = |grad(*S*)|, vagyis a lokális hullámszámvektor hossza a következő:

$$k_{lok} = k_0 \cdot n(\mathbf{r}_0) \;\Rightarrow\; \lambda_{lok}(\mathbf{r}_0) = \lambda_0 / n(\mathbf{r}_0) . \tag{26}$$

A (10), (11) összefüggések fontossága itt érthető meg: azt mutatják, hogy geometriai optikai közelítésben a fény a hullámfrontnormális irányába terjed, fázisváltozását pedig kizárólag a törésmutató-eloszlás határozza meg. (Diffrakciós jelenségeknél ez nem feltétlenül van így: a fázis értékét a tér egy adott pontjában a térerősség is befolyásolhatja.) Mivel ekkor a hullámhossz éppen megegyezik az adott törésmutatójú közegben terjedő, szintén *ω* körfrekvenciájú *síkhullám hullámhosszával*, ezért szokták a geometriai optikát lokális síkhullámú közelítésnek is hívni, bár ez némileg félrevezető lehet, hiszen a hullámfrontok itt is lehetnek görbült felületek, feltéve, hogy a görbületi sugár sokkal nagyobb a hullámhossznál.

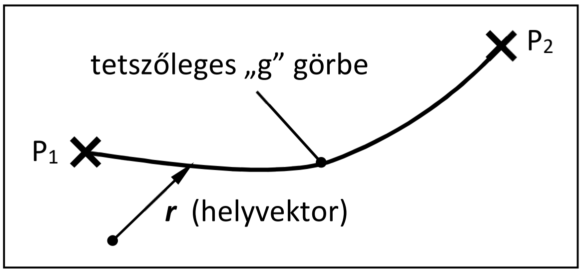
A lassan változó amplitúdójú közelítés feltétele is geometriai optikai közelítésben értelmezhető kényelmesen. Az eikonál-egyenlet értelmében, némi átrendezés után (14)-ből a következőt kapjuk:

$$\frac{\left|\mathrm{grad}(E_{0x})\right| \cdot \lambda}{E_{0x}} << 2\pi . \tag{27}$$

A fenti kifejezés vagy úgy értelmezhető, hogy hullámhossznyi szakaszon a relatív térerősségamplitúdó-változásnak elhanyagolható mértékűnek kell lennie, vagy pedig úgy, hogy a hullámhossznak kell sokkal kisebbnek lennie mint a térerősségváltozás jellemző térbeli kiterjedése (nulla hullámhosszúságú közelítés).

FÁZISVISZONYOK LEÍRÁSA A GEOMETRIAI OPTIKÁBAN

Hullámfront: S(**r**) = állandó (fázisfront, konstans fázisú felület) ; **k** = $k_0 \cdot \nabla S$



(7) alapján, geometriai optikai közelítésben, a következő integrálással kaphatjuk meg az elektromágneses tér *Δφ* fáziskésését a tér két pontja között (ld. a fenti ábra):

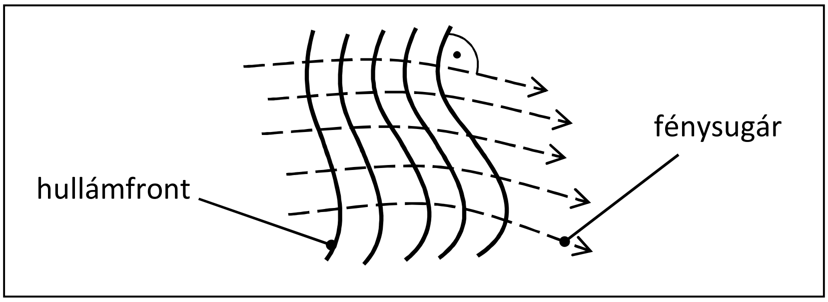
$$\Delta\varphi(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2) = k_0 \cdot \left(S(\mathrm{P}_2) - S(\mathrm{P}_1)\right) = \int_{\mathrm{g}} k_0 \cdot \mathrm{grad}\left(S(\mathbf{r})\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,, \tag{28}$$

ahol „g” tetszőleges görbe. Amennyiben a fény eljut P₁-ből P₂-be, értelemszerűen kell léteznie legalább egy olyan g' görbének, amelyre teljesül az, hogy érintője minden pontban grad(*S*(**r**)) irányába mutat. Erre a görbére a fáziskésés:

$$\Delta\varphi(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2) = k_0 \cdot \int_{\mathrm{g}'} \left|\mathrm{grad}\left(S(\mathbf{r})\right)\right| \cdot \mathrm{d}r = k_0 \cdot \int_{\mathrm{g}'} n(\mathbf{r})\mathrm{d}r = k_0 \cdot OPL(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2)\,, \tag{29}$$

ahol felhasználtuk (25)-t, és *OPL* (Optical Path Length) az *optikai úthossz* P₁ és P₂ között. A fenti egyenletet (28)-el összevetve: *ΔS* = *OPL*, g' mentén történő integrálás esetén! A g' speciális görbe további tulajdonsága, hogy minden pontban merőleges a hullámfrontra, mivel érintője grad(*S*) irányú, amely vektor pedig definíció szerint merőleges az *S* = áll. felületekre, azaz a hullámfrontokra. A fent definiált g' görbéket *fénysugaraknak* nevezzük. Az eikonál-egyenlet érzéketlen a grad(*S*) előjelére (azaz a fénysugár irányára), ami megfelel annak az állításnak, hogy a fénysugarak megfordíthatók.

Fénysugár definíció I.: a fénysugár olyan görbe, amely minden pontban merőleges a hullámfrontokra, illetve érintője grad(*S*) irányába mutat. Mivel a a hullámszámvektor (**k**) definíció szerint merőleges a hullámfrontokra, a fénysugár érintője **k** irányába mutat. Ha az optikai úthosszat fénysugár mentén mérjük *ΔS* = *OPL*.



FÉNYTÖRÉS KÖZEGHATÁRON

Igazolható (ld. pl. Richter: Bevezetés a modern optikába), hogy közeghatárhoz érve a geometriai optikai közelítésben a fénysugarakra érvényes a Snellius-Descartes törvény. Mivel a törési törvény általános érvényessége síkhullámokra levezethető (ld. korábban), ez az összefüggés tovább növeli a lokális síkhullámú közelítés analógiáját.

ENERGETIKAI VISZONYOK LEÍRÁSA A GEOMETRIAI OPTIKÁBAN

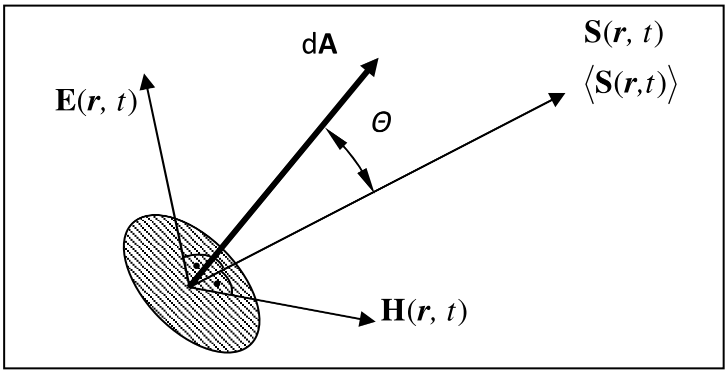
Poynting – vektor : $\mathbf{S}(\boldsymbol{r},\,t) = \mathbf{E}(\boldsymbol{r},\,t)\times\mathbf{H}(\boldsymbol{r},\,t)$ (teljesítmény-sűrűség vektor, **E** = Re{$\tilde{\mathbf{E}}$} !)

A teljesítmény-sűrűség vektor időátlaga monokromatikus tér esetében dielektrikumban:

$$\langle \mathbf{S}(\boldsymbol{r},t)\rangle = \frac{\mathbf{E}_0(\mathbf{r})\times\mathbf{H}_0^*(\mathbf{r})}{2} = \frac{\mathbf{k}}{\mu\omega}\frac{\mathbf{E}_0(\mathbf{r})^2}{2} = \frac{k}{\mu\omega}\frac{|\mathbf{E}_0(\mathbf{r})|^2}{2}\cdot\frac{\nabla S}{n}\,. \tag{30}$$

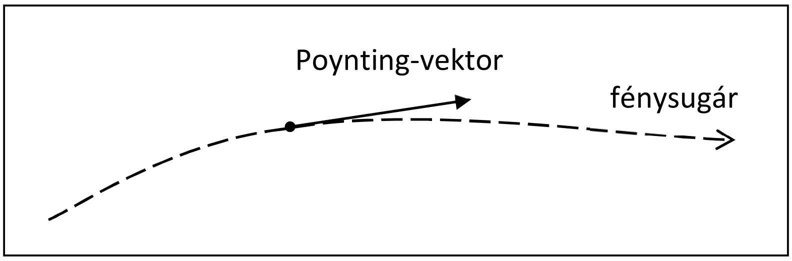
E vektor hosszát nevezzük „I” *intenzitásnak*. Egy infinitezimális dA felületen áthaladó teljesítmény az intenzitás segítségével a következő képpen írható fel:

$$\mathrm{d}P(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{S}(\mathbf{r},t)\rangle\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{I}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}A\cdot\cos(\Theta) \tag{31}$$



Ha a Maxwell-egyenletekbe beírjuk (6) próbafüggvényt, akkor könnyen igazolható, hogy a geometriai optika érvényességi feltételének fennállása esetén izotróp közegben a Poynting-vektor és az eikonál gradiense egy irányba mutat (ld. pl. Richter, Bevezetés a modern optikába, I. kötet, 2.3.1 fejezet).

Fénysugár definíció II.: olyan görbe, amelynek érintője minden pontban a teljesítmény-sűrűség vektor irányába mutat. Az I. és II. definíció *izotróp* közegben egyenértékű.



Fénynyaláb: fénysugarak által határolt csőszerű tartomány, amelyből az energia nem képes kilépni (a geometriai közelítés érvényességi körén belül).

Intenzitástörvény:

A (21) egyenlet képzetes részeinek egyenlőségéből pedig a következő összefüggést kapjuk:

$$E_{0x}\cdot\nabla^2 S + 2\cdot\nabla E_{0x}\cdot\nabla S = 0\,, \tag{32}$$

ami az ún. *transzport-egyenlet*. Ennek segítségével az eikonál ismeretében a térerősség pontról-pontra meghatározható. Érdemes észrevenni, hogy ezen egyenlet felírásánál nem használtuk a geometriai optikai közelítést, csak a lassan változó amplitúdóját.

A (32) transzport-egyenlet egyszerű azonos átalakításokkal a következő formára hozható (ld. Hartmann Römer: Theoretical Optics 7.3 fejezet):

$$\nabla\left(E_{0x}^{2}\cdot\nabla S\right)=0, \tag{33}$$

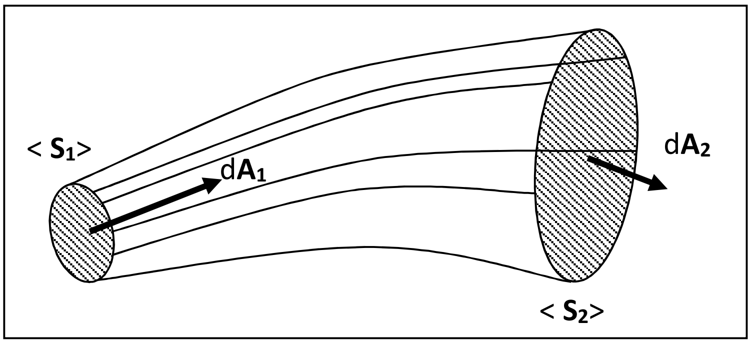
amelyből pl. az látszik, hogy homogén közegben terjedő síkhullám esetén (∇S = const.) a térerősség-amplitudó térben nem változik. A zárójelben szereplő tag arányos az x-térerősségkomponens Poynting-vektorának időátlagával, azaz az intenzitással, ld. (30). Mindhárom térerősségkomponensre fölírva és összegezve a következőt kapjuk:

$$\nabla\langle\mathbf{S}\rangle=0 \;\Leftrightarrow\; \oint\langle\mathbf{S}\rangle\mathrm{d}\mathbf{A}=0. \tag{34}$$

Mivel a fénysugarak párhuzamosak a Poynting-vektorral, a (34) egyenlet eqvivalens az energiamegmaradás törvényéből is következő összefüggéssel, az infinitezimálisan keskeny fénynyalábokra érvényes ún. intenzitástörvénnyel:

$$\langle\mathbf{S}_1\rangle\cdot\mathrm{d}\mathbf{A}_1=\langle\mathbf{S}_2\rangle\cdot\mathrm{d}\mathbf{A}_2, \tag{35}$$

mely olyan (ún. „reguláris”) tértartományban igaz, ahol a fénysugarak nem kereszteződnek.



A FÉNYSUGARAK EGYENLETE ÍVHOSSZ SZERINTI PARAMÉTEREZÉSBEN (kieg. any.)

A fénysugarakat az eikonállal definiáltuk, ezért egyenletüket az eikonál-egyenletből vezetjük le. Fénysugár = térgörbe, jelöljük g-vel. A g megadása, p paraméter függvényében:

$$g:\ \mathbf{r}=\mathbf{r}(\mathrm{p}) \tag{36}$$

alakú, amit a görbe paraméterezésének nevezünk. A fenti egyenletben $\mathbf{r}$ a fénysugár pályáját letapogató helyvektor. Mivel a fénysugár párhuzamos grad S-el, valamint grad$S(\mathbf{r}) \perp S(\mathbf{r})$ = const. (hullámfront) és d$\mathbf{r}(p)$/dp ‖ g görbe érintője (fénysugár), felírható, hogy:

$$\frac{d\mathbf{r}(p)}{dp}\sim \mathrm{grad}\ S(\mathbf{r}). \tag{37}$$

g-nek végtelen sok paraméterezése létezik, mert ha $\mathbf{r}$(p) paraméterezés, akkor $\mathbf{r}$(p(q)) is az, feltéve, hogy p(q) szig. mon., folytonos és a deriváltja is az. Emiatt a sugarak egyenlete tartalmaz egy határozatlan függvényt. Egy görbe két paraméterezésének a deriváltja között a következő összefüggés áll fönn:

$$\frac{d\mathbf{r}(p)}{dp}=\frac{d\mathbf{r}(q)}{dq}\cdot\frac{dq}{dp}, \tag{38}$$

ha $q(p)$ jelenti a kapcsolatot a két függvény között. Mivel dq/dp skalár mennyiség, a fenti kifejezés azt jelenti, hogy egy görbe különböző paraméterek szerinti deriváltvektorai mind ugyanabba az irányba mutatnak (a görbe érintője), csak a nagyságuk eltérő. Ezek szerint bizonyosan létezik egy olyan $\mathbf{r}$(q) paraméterezés, amire igaz, hogy

$$\frac{d\mathbf{r}(q)}{dq}=\mathrm{grad}\ S(\mathbf{r}). \tag{39}$$

A (38) összefüggést felhasználva, egy tetszőleges **r**(q(p)) paraméterezésre ez a következőképpen néz ki:

$$\frac{d\mathbf{r}(p)}{dp} = \frac{dq}{dp} \cdot \operatorname{grad} S(\mathbf{r}) = f(p) \cdot \operatorname{grad} S(\mathbf{r}) \,, \tag{40}$$

ahol f(p) egy tetszőleges föggvény, amely az **r**(p) görbe alakját nem befolyásolja, csak a paraméterezését. Amennyiben az $f(p) = 1/n(\mathbf{r})$ függvényt választjuk (40)-ből a következő lesz:

$$\frac{d\mathbf{r}(p)}{dp} = \frac{\operatorname{grad} S(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})} \,. \tag{41}$$

Az eikonál-egyenlet miatt ez egy egységvektor, és matematikából tudjuk, hogy egy görbe ívhossz szerinti szerinti deriváltja az az érintő irányú egységvektor. Vagyis ekkor $p = s$, ami a fénysugár mentén mért ívhossz. Ezt beírva az egyenletbe, és még egyszer ívhossz szerint deriválva a következőt kapjuk:

$$\frac{d}{ds}\left(n \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) = \frac{d}{ds} \nabla S \,. \tag{42}$$

Az egyenlet jobb oldala a következőképp írható:

$$\frac{d}{ds} \nabla S = \nabla \cdot \nabla S \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \tag{43}$$

d**r**(*s*)/d*s* helyére beírva (41) egyenletet, a fenti kifejezés a következően alakul:

$$\nabla \cdot \nabla S \cdot \frac{\nabla S}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \nabla \cdot [\nabla S]^2 \,. \qquad \left(\text{ld.} \, \frac{df^2}{dx} = 2f \cdot \frac{df}{dx} \right) \tag{44}$$

Az eikonál egyenlet felhasználásával a kifejezés tovább egyszerűsödik:

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \nabla\left(n^2\right) = \nabla n = \operatorname{grad} n \tag{45}$$

Ezt egyenlővé téve (42) baloldalával megkapjuk a sugarak ívhossz-szerinti paraméterezésben felírt differenciálegyenletét:

$$\boxed{\frac{d}{ds}\left(n \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) = \operatorname{grad} n} \,, \tag{46}$$

ahol **r**(*s*) a megoldásgörbe paraméterezése. Példa – homogén közegek esete (n = const.). Ekkor a sugarak differenciálegyenlete a következő alakra egyszerűsödik

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0 \,, \tag{47}$$

aminek a megoldását kétszeres integrálás után megkapjuk:

$$\mathbf{r} = s \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \,, \tag{48}$$

ahol **a** és **b** tetszőleges (a peremfeltételek által meghatározott) konstans vektorok. Ez azt jelenti, hogy homogén közegben a fénysugár egyenes vonal, amely áthalad a **b**-vel megjelölt ponton, és **a** irányba mutat.

A GEOMETRIAI OPTIKA ALKALMAZÁSI TERÜLETEI

- képalkotó rendszerek (mi ezzel foglalkozunk)
- megvilágító rendszerek

Képalkotó / megvilágító rendszerek geometriai modellezésénél a tárgyat / fényforrást térben koherens források (pontforrások) összegére bontjuk.

GEOMETRIAI OPTIKAI KÖZELÍTÉSEK A KÉPALKOTÁSBAN

- valós sugárátvezetés (törés, terjedés ismételgetése) → képalkotási hibák, optimalizáció
- harmadrendű közelítés (aberráció elmélet) → képalkotási hibák analízise
- elsőrendű (paraxiális) közelítés → nagyítás, tárgy-kép helyzet, fényerő, max. felbontás

IDEÁLIS KÉPALKOTÁS – egyszerűsített definíció

- pontot pontba képez le, azaz a képpont és a tárgypont „konjugáltjai" egymásnak
- a képalkotó rendszerben van egy önmagába képződő tengely (pl. forgászimmetrikus), ez az ún. optikai tengely
- optikai tengelyre merőleges síkban lévő alakzatok hasonló alakzatokba képződnek le (azaz torzításmentesen)

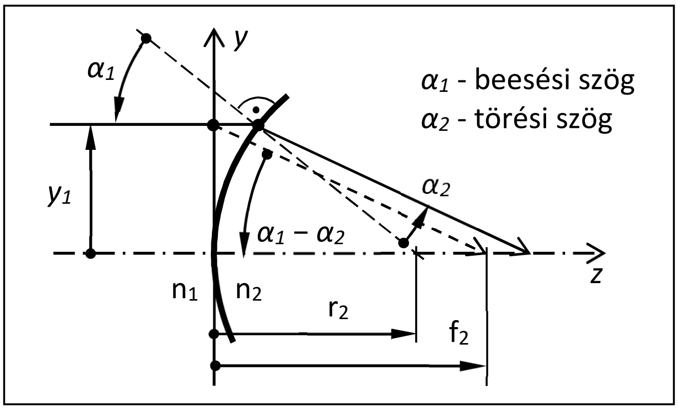
ELSŐRENDŰ (PARAXIÁLIS) KÖZELÍTÉS (GAUSS-OPTIKA)

A paraxiális közelítés feltételei:

$\theta \approx \sin(\theta) \approx \mathrm{tg}(\theta)$ $[\theta] = \mathrm{rad}$; (ezért „elsőrendű" a közelítés)

$y << r$ előjeles mennyiségek!

Azaz fénysugarak az optikai tengely közelében, vele kis szöget bezárva haladnak, és a felületek *síkkal közelíthetőek*. Ezekből következik: gömbhullám ~ paraboloid felület.



Fókuszpont: az optikai tengelyen lévő, végtelen távoli tárgypont képe (parax. közelítésben!)

Fókusztávolság meghatározása egyetlen törőfelület esetén:

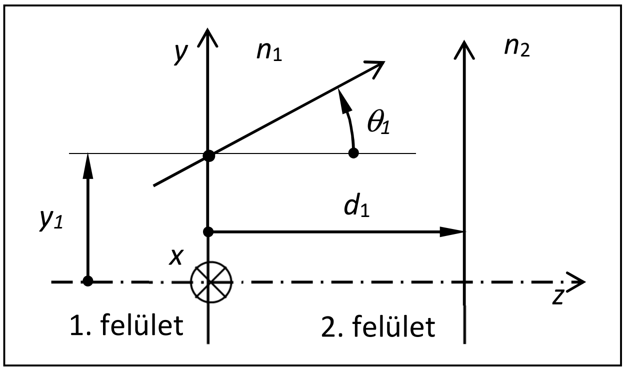
$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{n}_1 \cdot \alpha_1 = \mathrm{n}_2 \cdot \alpha_2 & \text{(fénytörés)} \\ \alpha_1 \cdot \mathrm{r}_2 = y_1 & \text{(felületnormális)} \\ \mathrm{f}_2 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2) = y_1 & \text{(ideális leképzés)} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f_2 = r_2 \cdot \frac{n_2}{n_2 - n_1} \qquad [\alpha] = \mathrm{rad}\ ! \tag{49}$$

Tükör tárgyalása formálisan: $n_2 = -n_1$. Törőerő: $P \equiv \frac{n_2}{f_2} = \frac{n_2 - n_1}{r_2}$ $[\text{dioptria} = \mathrm{m}^{-1}]$ (50)

Két, közvetlenül egymás mögé helyezett (1. és 2. sz.) felület esetén:

$$P_{eredő} = P_1 + P_2 \tag{51}$$

Paraxiális közelítésben a fénytörés ill. szabadtéri terjedés az X-Z és Y-Z síkokban egymástól függetlenül számolható! Ez a közelítés teljesíti az ideális leképzés feltételeit! (A levezetést ld. Richter, Bevezetés a modern optikába, I. kötet, 2.3.4 fejezet.)



A paraxiális közelítés alapkérdése az, hogy ha egy adott 1. síkon adott a fénysugár pozíciója és iránya (y_1 ; θ_1), akkor egy további 2. síkon mekkora (y_2 ; θ_2). Mivel a közelítés lineáris, a válasz mátrixos formában fogalmazható meg. Az X-Z / Y-Z függetlenség miatt csak az Y-Z irányban felírva:

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ n_2\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ n_1\theta_1 \end{bmatrix} \tag{52}$$

A fénysugár irányát leíró $n \cdot \theta$ mennyiséget *optikai iránykoszinusznak* nevezzük. Forgásszimmetrikus rendszerben az X-Z irányban felírt egyenletrendszernek is ugyanez az *ABCD* mátrixa a vizsgált 1.-2. síkok között. (52) alapján a fénysugarak helykoorináta-transzformációja a következő egyenlettel írható le:

$$\begin{aligned} y_2 &= A \cdot y_1 + B \cdot (n_1\theta_1) \\ n_2\theta_2 &= C \cdot y_1 + D \cdot (n_1\theta_1) \end{aligned} \tag{53}$$

Amennyiben két síkpár között leképezés áll fönn, az y_2 helykoorináta mindig független a fénysugár indulási irányától, ami csak akkor lehet igaz, ha $B = 0$. Ekkor igen könnyen belátható, hogy:

$$\begin{aligned} A &= m \\ D &= m_\alpha \cdot \frac{n_2}{n_1} \quad ha \quad y_1 = 0 \end{aligned} \tag{54}$$

A gömbi felületen létrejövő fénytörés *ABCD* mátrixa (ha a két sík egy törőfelületnél éppen egybeesik):

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{55}$$

ahol P_1 a felület törőereje (értelmezést ld. fentebb). Szabadtéri terjedés *ABCD* mátrixa:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & d_1/n_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{56}$$

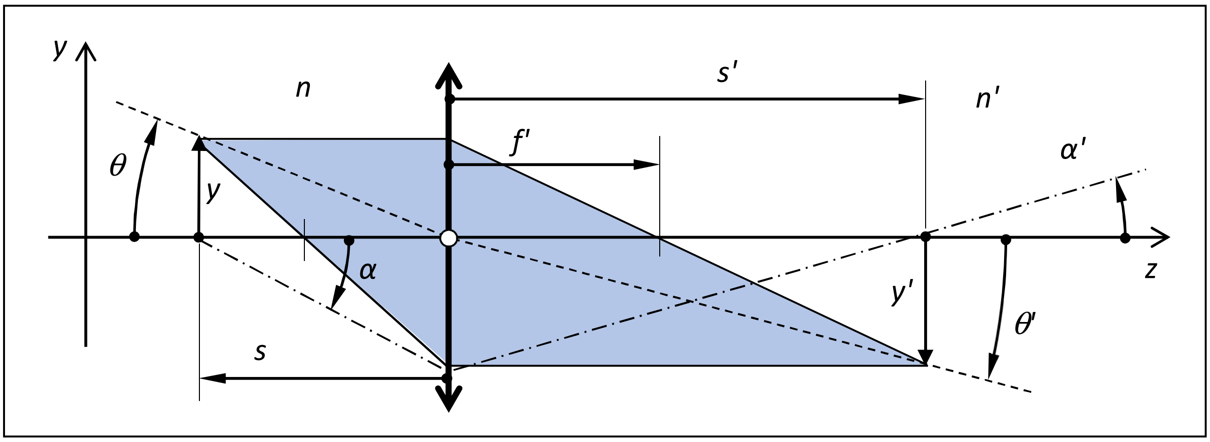
ahol d_2 az 1. és 2. sík távolsága, n_1 a közöttük mért törésmutató. Egy *N* felületből álló összetett rendszer **M** mátrixát értelemszerűen a fenti elemi mátrixok szorzata adja:

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}_N \cdot \mathbf{R}_N \cdot \ldots \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{T}_1 . \tag{57}$$

VÉKONYLENCSÉK JELLEMZŐI

vastagság << lencseátmérő és görbületi sugár

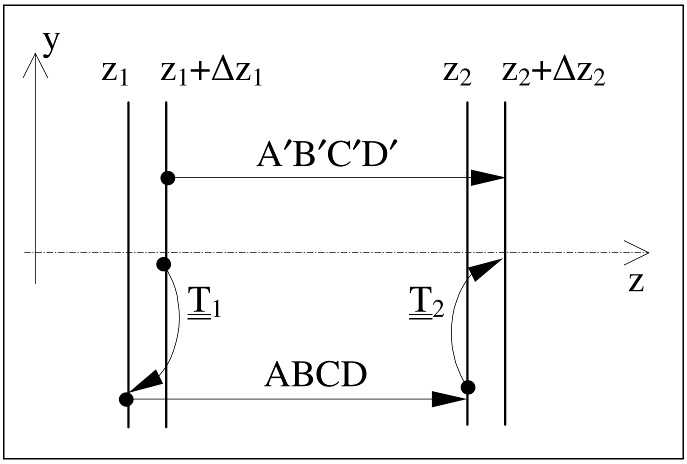
s, s'	– tárgy-, képtávolság
y, y'	– tárgy-, képmagasság
θ, θ'	– tárgyszög, képszög (törési törvényből: $n\cdot\theta = n'\cdot\theta'$)
m	– transzverzális nagyítás ($m \equiv y'/y$)
m_L	– longitudinális nagyítás ($m_L \equiv \partial s'/\partial s$)
m_α	– szögnagyítás ($m_\alpha = \alpha'/\alpha$)
f'	– képoldali fókusztávolság ($f' = s'$, ha $s = -\infty$)
NA	– tárgyoldali numerikus apertúra ($NA \equiv n\cdot\sin\theta$) – ez nem paraxiális mennyiség



A távolságok és szögek előjeles mennyiségek! Tehát $s' > 0$, de $s < 0$, és $\alpha' > 0$ de $\alpha < 0$.

IDEÁLIS LEKÉPEZÉS ÖSSZETETT RENDSZERREL

Tétel: paraxiális közelítésben minden optikai rendszer ideálisan képezi le egy homogén tárgytér minden pontját egy homogén képtérbe, ha létezik legalább egy olyan sugár, amelyik mind a tárgytérben mind a képtérben metszi az optikai tengelyt. Az alábbiakban megnézzük e tétel levezetését. Legyen egy optikai rendszernél a z_1 és z_2 síkpár az, ahol e metszés bekövetkezik, és jellemezzük e két sík közötti fényterjedést az *ABCD* mátrixszal.



Magyarázat *A'B'C'D'* felírásához.

A z_1-z_2 síkpárt *referenciasíkoknak* tekintve most azt vizsgáljuk meg, hogy egy tetszőleges másik $z_1 + \Delta z_1$ helyzetű tárgysíkhoz létezik-e képsík. Ezen feltételezett képsík helye legyen $z_2 + \Delta z_2$. Mivel a (z_1; z_2) síkokhoz tartozó *ABCD* mátrixot tekintjük adottnak, ezzel fejezzük ki az eltolt síkpárhoz tartozó *A'B'C'D'* mátrixot:

$$A'B'C'D' = \mathbf{T}_2 \cdot ABCD \cdot \mathbf{T}_1 . \tag{58}$$

A szabadtéri terjedés mátrixának (56) általános alakja alapján:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{\Delta z_1}{n_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\Delta z_2}{n_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{59}$$

Vagyis *A′B′C′D′*-re a következőt kapjuk:

$$\begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + \dfrac{\Delta z_2}{n_2} C & \dfrac{\Delta z_2}{A \cdot n_2} - \left(A + \dfrac{\Delta z_2}{n_2} C \right) \dfrac{\Delta z_1}{n_1} \\ C & D - \dfrac{\Delta z_1}{n_1} C \end{bmatrix} . \tag{60}$$

Mivel a fenti összefüggés alapján $C' = C$, értéke tárgy és képsík helyzet-független, tehát C a vizsgált optikai rendszer egy jellemző paramétere, melynek jelentősége a következő alfejezetben nyer értelmet. Ha a Δz_1 és Δz_2-vel eltolt síkok között is leképezés áll fönn, akkor $B' = 0$, amiből:

$$\boxed{\frac{n_2}{\Delta z_2} - \frac{1}{A^2} \frac{n_1}{\Delta z_1} = -\frac{C}{A}} . \tag{61}$$

Ez a lencsetörvény általános alakja, tetszőleges leképezést leíró referenciasíkokhoz képest.

ÖSSZETETT LENCSERENDSZEREK TÁRGYALÁSA FŐSÍKOK SEGÍTSÉGÉVEL

Fősíkok: az a tárgy-képsík pár, amelyre igaz: $m \equiv +1$. Ilyen minden optikai rendszernél meghatározható. A fősíkok helyzete *egyértelmű*.

Ha referenciasíknak a fősíkokat választottuk ($A = +1$), (61) az alábbi egyszerű alakot ölti:

$$\frac{n_2}{\Delta z_2} - \frac{n_1}{\Delta z_1} = -C \ . \tag{62}$$

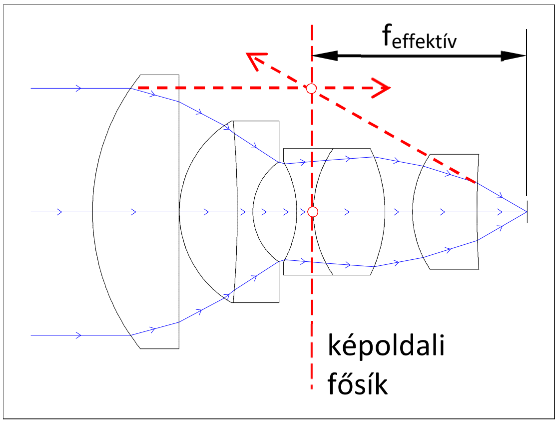
Tartson Δz_1 a végtelenhez. Ekkor Δz_2 definíció szerint a képoldali fókuszpont helyzetét adja:

$$f' \equiv \Delta z_2 \ ; \ C = -\frac{n'}{\Delta z_2} = -\frac{n'}{f'} \ ; \ P \equiv \frac{n'}{f'} , \tag{63}$$

ahol bevezettük a törőerő fogalmát (P), valamint a tárgy és képoldali törésmutatókat: $n = n_1$ és $n' = n_2$. Az f' képoldali fősíktól mért távolságot *effektív fókusztávolságnak* nevezzük. Ezekkel megkapjuk a lencsetörvény jól ismert, Gauss-féle alakját ($s = \Delta z_1$ és $s' = \Delta z_2$):

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'}{f'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{n'}{s'} = \frac{n'}{f'} + \frac{n}{s}} . \tag{64}$$

Ha tehát a fősíkoktól mérjük a tárgy és képtávolságot, illetve a fókusztávolságot (effektív fókusztávolság), akkor tetszőleges lencserendszer esetén érvényes a lencsetörvény!



A fősíkok helyzetének grafikus meghatározása

Alapvető paraxiális törvényszerűségek:

$$m_L = \frac{n'}{n} \cdot m^2$$

$$m_\alpha \cdot m = \frac{n}{n'} \quad \text{(Lagrange - Helmholtz - egyenlet)} \tag{65}$$

$$\frac{n}{f} = -\frac{n'}{f'}$$

Speciális lencserendszerek: **teleobjektív**, $f_{effektív}$ > szerkezeti hossz (ld. fényképezőgép)
inverz teleobjektív, hátsó fókusztávolság > $f_{effektív}$ (ld. projektor)