

1. gyakorlat

1.1. Feladat: (HN 24B-19) A $+Q$ töltés egy L hosszúságú egyenes szakasz mentén oszlik el egyenletesen (ld. 1. ábra.). Számítsuk ki az E elektromos térerősséget a vonal



1. ábra. 24B-19 feladat

irányában lévő, annak végpontjától d távolságra lévő P pontban!

Megoldás: Mivel a P pont a szakasz meghosszabbításában van és a szakasz töltése pozitív a térerősség vektora a szakasztól el mutat. Válasszuk a koordinátarendszerünket úgy, hogy a szakasz az x tengelyén fekjűdjön és a P pont legyen az origóban! Osszuk fel a szakaszt kis dx hosszúságú darabokra! Egy ilyen darab töltése $dQ = dx \cdot \frac{Q}{L}$. A teljes térerősség ezen kis dx szakaszok térerősségeinek összegével közelíthető ami integrállá válik, amennyiben $dx \rightarrow 0$. A P ponttól x távolságban levő szakasz darabtól származó térerősség nagysága:

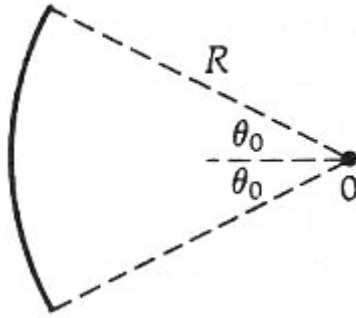
$$dE(x) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dQ}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dx Q}{L x^2} \quad (1.1.1)$$

A teljes térerősség

$$E(x) \approx -\sum_{x=d}^{x=d+L} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q dx}{L x^2} = -\frac{Q}{4L\pi\epsilon_0} \sum_{x=d}^{x=d+L} \frac{dx}{x^2} \quad (1.1.2)$$

$$\begin{aligned} E(x) &= -\frac{Q}{4L\pi\epsilon_0} \int_{x=d}^{x=d+L} \frac{dx}{x^2} = -\frac{Q}{4L\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{x} \right]_d^{d+L} \\ &= -\frac{Q}{4L\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{d+L} + \frac{1}{d} \right) = -\frac{Q}{4L\pi\epsilon_0} \left(\frac{L}{d(d+L)} \right) \end{aligned}$$

$$E(x) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d(d+L)} \quad (1.1.3)$$



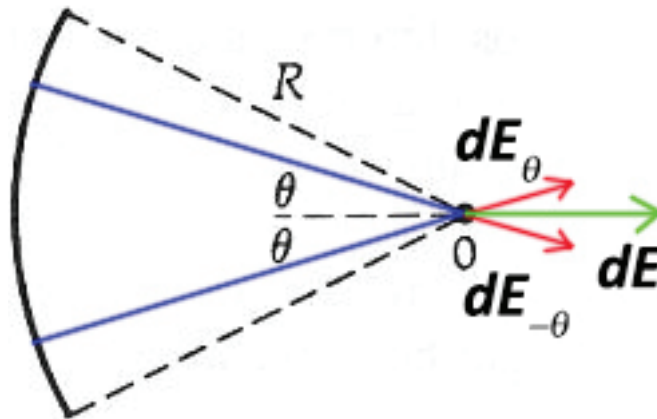
2. ábra. 24B-20 feladat

1.2. Feladat: (HN 24B-20) Egy vékony, nem vezető rudat a 2. ábrán vázolt módon meghajlítunk úgy, hogy az egy R sugarú kör íve legyen, mely e kör középpontjából $2\theta_0$ szög alatt látszik. Legyen e hajlított rúdon egyenletes pozitív λ töltéssűrűség. Számítsuk ki az E elektromos tér térerősséget a kör O középpontjában. (Útmutatás: számítsuk ki a $dl = R d\theta$ hosszúságú szakasz dq töltésétől származó dE térerősséget. Használjuk ki a rendszer szimmetriatulajdonságát a $\theta = -\theta_0$ és $\theta = +\theta_0$ közötti integrál kiszámításakor.)

Megoldás: Osszuk fel a körívet egyenlő dl hosszúságú kis darabokra! A körív középpontjában minden ilyen kis darab térerőssége ugyanakkora:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\theta}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\theta}{R} \quad (1.2.1)$$

nagyságú és az O pontból a körívvel ellentétes irányba mutat. Mivel a vízszintes tengelyre szimmetrikusan, θ és $-\theta$ szögben elhelyezkedő szakaszoktól származó térerősség nagysága ugyanakkora, és irányuk a vízszintes tengelyre szimmetrikus ezek függőleges komponensei kiejtik egymást: vízszintes komponenseik nagysága pedig összeadódik, az



3. ábra. Az eredő térerősség kiszámításához

eredő térerősség kiszámításához elegendő a pozitív θ értékekre, vagyis fél körívre összegezni a dE_θ térerősségek vízszintes komponensének kétszeresét, azaz $2 dE_\theta \cdot \cos \theta$ -t. A $dl \rightarrow 0$ határesetben egy integrált kapunk:

$$E = 2 \int_0^{\theta_0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \cos \theta d\theta = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} [\sin \theta]_0^{\theta_0}, \quad (1.2.2)$$

azaz

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \sin \theta_0. \quad (1.2.3)$$

1.3. Feladat: (HN 24C-26) Két (fix helyzetű) $+Q$ nagyságú ponttöltés egymástól d távolságra helyezkedik el. Egy harmadik, pozitív q töltést a két előbbi töltést összekötő egyenes mentén mozgatunk.

(a) Mutassuk meg, hogy ha a q töltést egyensúlyi helyzetéből kissé (x távolságnyra, $x \ll d$) kimozdítjuk, akkor közelítőleg egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez.

(b) Számítsuk ki az ehhez a mozgáshoz rendelhető k „rugóállandót”.

Megoldás: Legyen mindegyik töltés az x tengelyen! Ekkor a q töltés által érzékelt térerősség is x irányú. Mivel mindegyik töltés azonos előjelű a q töltésre a két Q töltéstől ható erők ellentétes irányúak:

$$F_{bal\ oldali\ Qtol} = K \frac{Qq}{r_{bal\ oldali\ Qtol}^2} F_{jobb\ oldali\ Qtol} = -K \frac{Qq}{r_{jobb\ oldali\ Qtol}^2} \quad (1.3.1)$$

q egyensúlyi helyzete a két $+Q$ töltés között éppen félúton van, ahol a két erő kiegyenlíti egymást. Térítsük ki a q töltést egyensúlyi helyzetétől pozitív irányba. Ekkor a rá ható erők eredője már nem lesz 0, hanem :

$$F = F_{bal\ oldali\ Qtol} + F_{jobb\ oldali\ Qtol} = K \left[\frac{Qq}{\left(\frac{d}{2} + x\right)^2} - \frac{Qq}{\left(\frac{d}{2} - x\right)^2} \right]. \quad (1.3.2)$$

Ha $x \ll d$, akkor $x \ll \frac{d}{2}$ is igaz. Legyen $d = 2L$! Ekkor $\frac{d}{2} = L$ és a nevezők az előző képletben közelíthetők a következő módon:

$$\frac{1}{(L \pm x)^2} = \frac{1}{L^2} \cdot \frac{1}{\left(1 \pm \frac{x}{L}\right)^2} \approx \frac{1}{L^2} \cdot \frac{1}{\left(1 \pm 2\frac{x}{L}\right)} \approx \frac{1}{L^2} \cdot \left(1 \mp 2\frac{x}{L}\right). \quad (1.3.3)$$

Ez konkrét példákon is ellenőrizhető¹. Tehát

$$F \approx \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{L^2} \left(\left(1 - 2\frac{x}{L}\right) - \left(1 + 2\frac{x}{L}\right) \right) = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{L^2} 4\frac{x}{L} = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{d^2} 8\frac{x}{d}. \quad (1.3.5)$$

¹Egy példa: legyen $d = 10$, vagyis $L = 5$ és $x = 0,01$. Ekkor

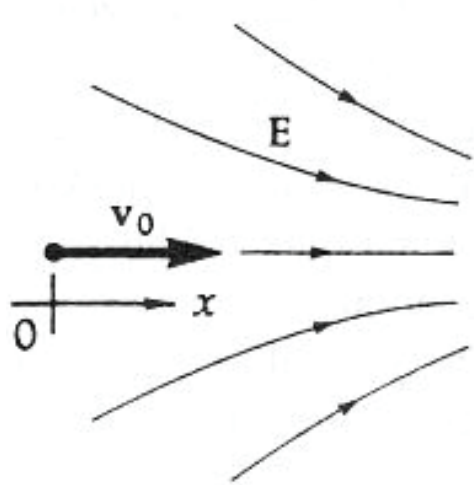
$$\frac{1}{(L+x)^2} = 0,0398404 \frac{1}{L^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + 2\frac{x}{L}\right)} = 0,0398406 \frac{1}{L^2} \cdot \left(1 - 2\frac{x}{L}\right) = 0,0398400. \quad (1.3.4)$$

$$F = -\frac{8Qq}{\pi\epsilon_0} \frac{x}{d^3}. \quad (1.3.6)$$

Mint látjuk, amennyiben a kitérés sokkal kisebb, mint d , az erő ellentétes irányú és arányos a kitéréssel vagyis valóban harmonikus rezgőmozgásról van szó amelynek "rugóállandója"

$$k = \frac{8Qq}{d^3 \pi\epsilon_0}. \quad (1.3.7)$$

1.4. Feladat: (HN 24C-29) Miként az a 4. ábrán látható, egy elektron, amelynek az $x_0 = 0$ helyen $v_0 = 10^6 \text{ m/s}$ a kezdősebessége, az x tengely pozitív irányában halad olyan tértartományban, ahol az elektromos térerősséget az $E_x = (4V/m) \cdot (1 + 10^3 x)$ függvény adja meg (az x távolságot méterben kell megadni). Számítsuk ki azt a távolságot, ahol az elektron sebessége (legalábbis egy pillanatra) zérussá válik.



4. ábra. 24C-29 feladat

Megoldás: Az elektrosztatikus tér helytől függő potenciálja

$$\Phi(x) = -\int E(x)dx = -\int 4(1 + 10^3 x) dx = -4(x + 500x^2). \quad (1.4.1)$$

Az elektron helyfüggő potenciális energiája ebben a térben (az elektron töltése negatív)

$$E_{pot} = -e\Phi(x) = 4e(x + 500x^2). \quad (1.4.2)$$

Az elektron abban az x koordinátájú pontban áll meg amikor minden kinetikus energiáját elveszti. Az elektron potenciális energiájának megváltozása $\Delta x = x - x_0$ úton

tehát egyenlő a kezdeti kinetikus energiájával:

$$\begin{aligned} \Delta E_{pot} &= E_{kin,kezdeti} \\ \Delta E_{pot} &= E_{pot}(x) - E_{pot}(x_o) = 4e(x + 500x^2) - 0 \\ 4e(x + 500x^2) &= \frac{1}{2}mv_o^2 \\ 500x^2 + x - \frac{1}{8}\frac{m}{e}10^{12} &= 0. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

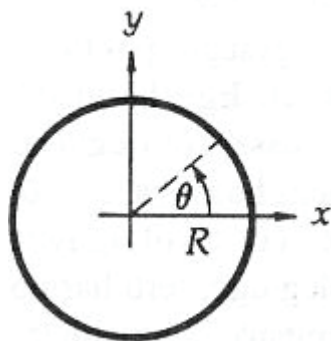
A másodfokú egyenlet megoldása

$$\begin{aligned} x_{\pm} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{8}\frac{m}{e}10^{12} \cdot 500}}{1000} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{2}\frac{m}{e}10^{12} \cdot 500}}{1000} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{1422,408}}{1000} = \frac{-1 \pm 37,715}{1000} \\ x_+ &= 3,67 \cdot 10^{-2} \text{m} \\ x_- &= -3,871 \cdot 10^{-2} \text{m}. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

A mi esetünkben csak a pozitív eredmény jöhet szóba.

1.5. Feladat: (HN 24C-37) Egy vékony, nem vezető, R sugarú gyűrűn nem egyenletes a λ lineáris töltéssűrűség: $\lambda = \lambda_0 \sin \theta$, ahol a θ szög a 5. ábra szerint értelmezendő.

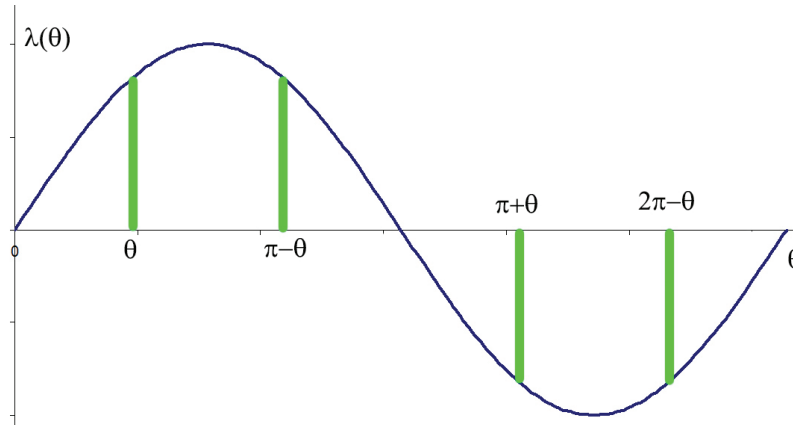
- Vázoljuk a gyűrű töltéseloszlását.
- Milyen az E elektromos térerősség iránya a gyűrű középpontjában?
- Mutassuk meg, hogy az elektromos térerősség nagysága a gyűrű középpontjában $\frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R}$.



5. ábra. 24-C37 feladat

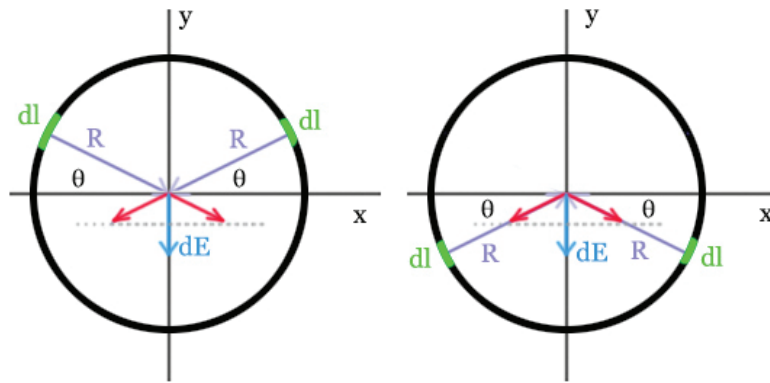
Megoldás:

- A töltéssűrűség a szög függvényében a 6. ábrán látható.



6. ábra. Töltéssűrűség a szög függvényében. A zöld vonalak 4 olyan szöget jeleznek, ahol a töltéssűrűség abszolút értéke ugyanakkora

(b) Osszuk fel a kör kerületét infinitézimálisan kicsi dl szakaszokra. Egy tetszőleges θ szögnél elhelyezkedő szakasztól származó térerősség iránya vagy megegyezik a szakasztól a középpontig húzott vektor irányával ($0 \leq \theta \leq \pi$) vagy ellentétes vele ($0 \leq -\theta \leq \pi$). A teljes térerősség az egyes szakaszoktól származó térerősségek összege. A 7 ábrán látható, hogy az eredő térerősségben csak az egyes szakaszoktól származó



7. ábra. Különböző infinitezimális dl szakaszoktól származó térerősségek összegzése.

térerősségek függőleges, $-y$ irányú összetevője marad meg. Tehát az eredő térerősség a negatív y tengely irányába mutat.

(c) Ennek nagysága egy adott θ szög esetén

$$dE_y(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(\theta) dl}{R^2} \sin \theta \quad (1.5.1)$$

ahol $dl = R d\theta$. Szimmetria okok miatt $dE_y(\theta)$ ugyanakkora és ugyanolyan irányú a θ , $\pi - \theta$, $\pi + \theta$ és $2\pi - \theta$ szögek esetén, ezért elegendő a $0 \dots \frac{\pi}{2}$ tartományra integrálni és

az eredményt négyszerezni:

$$\begin{aligned}
 E_y &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(\theta) R}{R^2} \sin \theta d\theta = \\
 &= 4 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{R} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \\
 &= 4 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{R} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \\
 &= \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 R} \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = \\
 &= \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 R} \left[\frac{\pi}{2} - 0 - 0 + 0 \right]
 \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

ahol felhasználtuk a $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ összefüggést². A végeredmény

$$E_y = \frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R}. \tag{1.5.3}$$

1.6. Feladat: (HN 24C-39) Tekintsünk egy egyenletesen feltöltött R sugarú körgyűrűt, és annak tengelye mentén az elektromos teret. Mutassuk meg, hogy a térerősség maximuma $E_{x,max}$ a tengelyen, a gyűrű középpontjától $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ távolságban van. Vázzuk E változását x függvényében (negatív és pozitív x értékekre).

Megoldás: Bontsuk fel a körgyűrűt infinitezimálisan kis dl szakaszokra. A körgyűrű tengelyének minden pontja a körgyűrű összes pontjától - és így az összes szakasztól is - azonos távolságban van. A körgyűrű áttelleges pontjaitól (szakaszaitól) származó térerősségek x tengelyre merőleges komponensei kiejtik egymást, ezért elegendő az E_x komponenseket összegezni. Egy dl szakasz térerőssége a 8 ábra szerint:

$$\begin{aligned}
 dE_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{R^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x \lambda dl}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.
 \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

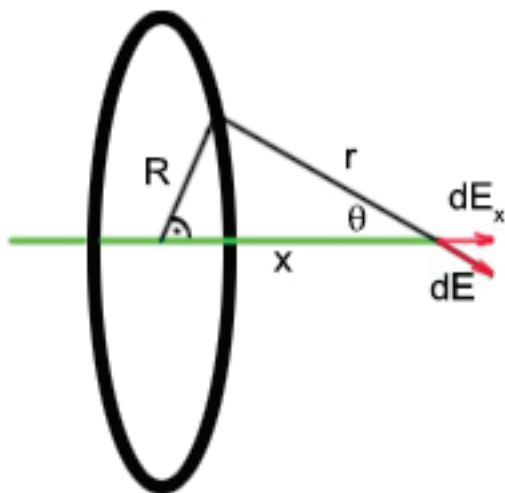
A teljes térerősség

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 R \pi x \lambda}{(R^2 + x^2)^{3/2}}. \tag{1.6.2}$$

Ennek akkor van maximuma, ha a deriváltja nulla. Ha a derivált nulla, akkor a konstansok nem számítanak, ezért azokat el is hagyhatjuk

$$\frac{dE_x}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = 0 \tag{1.6.3}$$

²Ezt levezethetjük a következő két egyenlőségből: $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ és $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$



8. ábra. Térerősség egy egyenletesen töltött körgyűrű tengelyén

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} &= \frac{(R^2 + x^2)^{3/2} - x \frac{3}{2}(R^2 + x^2)^{1/2} 2x}{(R^2 + x^2)^3} \\ &= \frac{(R^2 + x^2) - 3x^2}{(R^2 + x^2)^{5/2}} = 0 \end{aligned} \tag{1.6.4}$$

A nevező sosem lehet nulla, ezért átszorozhatunk vele

$$R^2 - 2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{R}{\sqrt{2}}. \tag{1.6.5}$$

Eszerint E_x szélsőértéke lehet az $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ helyen. Ez akkor valóban maximum ha a második derivált ezen a helyen negatív.

Házi feladat (gyakorlásra):

HN 24- 7, 9, 15, 23, 27, 31, 34, 35, 36