

# Fizika i, 2023 tavasz, 1. gyakorlat - MEGOLDÁS

## Órai munkára javasolt feladatok

**F1.** Ha az  $r/2$  sugarú részt visszahelyezzük, akkor az  $r$  sugarú körlap középpontja lesz a tömegközéppont helye. Ezért ha az  $r/2$  sugarú és a lyukas körlapot tekintjük, akkor ezek közös tömegközéppontja a teljes körlap középpontjában van. Legyen a lyukas körlap tömegközéppontja  $x$  távolságra a teljes körlap középpontjától. Ha az  $r$  sugarú körlap tömege  $m$ , akkor az  $r/2$  sugarúé

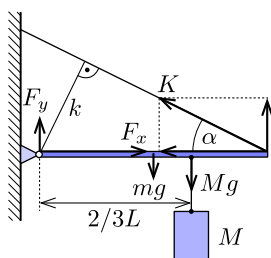
$$\frac{(r/2)^2 \pi}{r^2 \pi} \cdot m = \frac{m}{4}.$$

A közös tömegközéppontra felírhatjuk, hogy

$$\frac{m}{4} \cdot \frac{r}{2} = \frac{3m}{4} \cdot x$$

(a teljes körlapot középen alátámasztva, nem billen le, a forgatónyomatékok kiegyenlítik egymást). Ebből az egyenletből kapjuk a lyukas lemez tömegközéppontjának helyét:  $x = r/6$ .

**F2. a)** Rajzoljuk be a rúdra ható erőket. A rendszer egyensúlyban van, ezért a rudat az  $M$  tömegű test  $Mg$  erővel húzza az akasztási pontban.



A rúd akkor van egyensúlyban, ha nemcsak a rá ható erők eredője nulla, hanem bármelyik tengelyt tekintve a forgatónyomaték is eltűnik. Mivel a csuklóban ismeretlen  $F$  erő hat (az ábrán vízszintes és függőleges irányú komponensekre felbontva), ezért érdemes erre vonatkoztatva felírni a forgatónyomatékok egyensúlyát:

$$mg \cdot \frac{L}{2} + Mg \cdot \frac{2L}{3} = K \cdot k,$$

ahol  $k = L \sin \alpha$  a  $K$  fonálerő erőkarja. Innen kifejezhetjük a fonálerőt:

$$K = \frac{\frac{mg}{2} + \frac{2Mg}{3}}{\sin \alpha}.$$

b) Az erőegyensúly miatt függőleges irányban:

$$F_y + K \sin \alpha = (m + M)g,$$

ahonnan felhasználva az a) rész eredményét

$$F_y = (m + M)g - \frac{mg}{2} - \frac{2Mg}{3} = \frac{mg}{2} + \frac{Mg}{3}.$$

Vízszintes irányban:

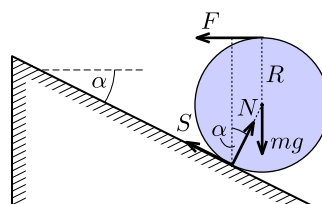
$$F_x = K \cos \alpha = \left( \frac{mg}{2} + \frac{2Mg}{3} \right) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

A csuklóban ható erő nagysága és iránya:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{F_y}{F_x},$$

ahol  $\varphi$  a csuklóerő vízszintessel alkotott szöge.

**F3.** Ismét a hengerre ható erők berajzolásával kezdjük a megoldást.



A forgatónyomatékok összege nulla a henger lejtővel érintkező pontjára:

$$mgR \sin \alpha = F(R + R \cos \alpha).$$

Tehát a kérdéses erő:

$$F = mg \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

A tapadási súrlódási erőre  $S \leq \mu_0 N$ . A henger középpontjára nézve a forgatónyomatékok egyensúlya:  $FR = SR$ , azaz  $S = F$ . A nyomóerőt a lejtőre merőleges irányban felírt erőegyensúlyból kapjuk:

$$N = mg \cos \alpha + F \sin \alpha.$$

Ezekből

$$F \leq \mu_0 (mg \cos \alpha + F \sin \alpha),$$

azaz a tapadási súrlódási együttható:

$$\mu_0 \geq \frac{1}{\sin \alpha + \frac{mg}{F} \cos \alpha}.$$

Behelyettesítve  $F$  kifejezését, majd átalakítások után

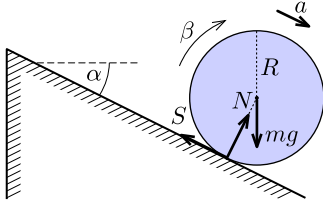
$$\mu_0 \geq \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

*Megjegyzés:* A tapadási súrlódási tényezőt úgy is megkaphatjuk, ha  $F$  támadási pontjára alkalmazzuk a forgatónyomatékok eltűnésének feltételét. Ez csak úgy lehetséges, ha a súrlódási erő és a nyomóerő eredője átmegy ezen a ponton, hiszen az  $mg$  és  $F$  erőkre ez teljesül. Ebből a kerületi és középponti szögek tételével adódik, hogy  $\mu_0 \geq \tan(\alpha/2)$ . Belátható, hogy ez az eredmény a fentivel azonos.

**F4. a)** A felrajzolt erőkkel felírva a henger mozgásegyenleteit ( $\sum F = ma$  a lejtővel párhuzamos és arra

merőleges irányban, valamint a tömegközéppontra a  $\sum M = \Theta\beta$  forgásegyenletet):

$$\begin{aligned} mg \sin \alpha - S &= ma, \\ N &= mg \cos \alpha, \\ SR &= \frac{1}{2}mR^2\beta. \end{aligned}$$



Mivel a henger nem csúszik meg (de nem biztos, hogy a tapadási súrlódási erő maximuma hat)

$$a = \beta R.$$

Ezekből az egyenletekből a gyorsulás  $a = \frac{2}{3}g \sin \alpha$ .

b) A tapadási súrlódási erő az a) rész alapján:

$$S = \frac{1}{2}ma = \frac{1}{3}mg \sin \alpha \leq \mu_0 N = \mu_0 mg \cos \alpha.$$

Ebből

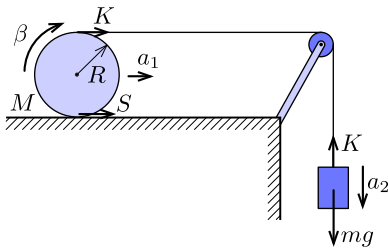
$$\mu_0 \geq \frac{1}{3} \tan \alpha.$$

c) Mivel a  $\mu = \frac{1}{6} \tan \alpha$  súrlódási együttható kisebb, mint a tiszta gördüléshez szükséges érték, ezért a henger csúszva gördül lefelé. Tehát az  $a = \beta R$  összefüggés nem érvényes, de ismerjük a (csúszási) súrlódási erőt:  $S = \mu N = \mu mg \cos \alpha$ . Tehát:

$$mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma,$$

azaz  $a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = \frac{5}{6}g \sin \alpha$ .

**F5.** Legyen a henger tömegközéppontjának gyorsulása  $a_1$ , a testé pedig  $a_2$ . A testekre ható erőket az ábra mutatja.



A függőlegesen mozgó testre:

$$(1) \quad mg - K = ma_2.$$

A hengerre:

$$(2) \quad K + S = Ma_1,$$

$$(3) \quad (K - S)R = \frac{1}{2}MR^2\beta.$$

A henger legfelső pontjának érintőirányú gyorsulása a talajról nézve  $a_1 + \beta R$ . Mivel a fonál nem nyúlik

meg, azért ugyanakkora gyorsulással mozog az  $m$  tömegű test, azaz  $a_2 = a_1 + \beta R$ . Másrészt a henger tisztán gördül, ezért  $a_1 = \beta R$ . Tehát  $a_2 = 2a_1$ .

A (2) és (3) egyenlet összeadásával és a kényszerfeltétellel:

$$K = \frac{1}{2}Ma_1 + \frac{1}{4}MR\beta = \frac{3}{4}Ma_1.$$

Ezt felhasználva (1)-ben:

$$mg - \frac{3}{4}Ma_1 = 2ma_1,$$

ahonnan a henger gyorsulása

$$a_1 = \frac{4m}{8m + 3M}g.$$

**F6. a)** A lejtő első felén legördülve a tapadási súrlódási erő nem végez munkát, hiszen a henger talajjal érintkező pontja áll. Ezért ebben az esetben alkalmazhatjuk a mechanikai energiamegmaradás törvényét. A helyzeti energia nullszintjét a pálya aljához választva:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2,$$

ahol  $v = R\omega$ , mivel a henger tisztán gördül. Innen a sebesség és a szögsebesség a pálya alján:

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}, \quad \omega = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{gh}{R^2}}.$$

b) A súrlódásmentes részen mozogva a henger pálya eljén elért szögsebességét megtartja, hiszen nincs olyan erő, ami ezt megváltoztatná. Tehát amikor a henger eléri a legmagasabb helyzetét, sebessége nulla lesz, de szögsebessége ugyanakkora, mint legalul. Mechanikai energiamegmaradás most is alkalmazható (a forgási energiát nem kell felírni, mert az a mozgás során változatlan):

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh'.$$

Ebből – felhasználva az a) rész eredményét:

$$h' = \frac{v^2}{2g} = \frac{2}{3}h.$$

**F7. a)** a korongok között fellépő súrlódási erő forgatónyomatéka az egyik korong forgását lassítja, a másikat gyorsítja. A teljes rendszert tekintve ezen forgatónyomatékok összege nulla, valamint a külső erők forgatónyomatékai is nullák, ezért a rendszer összerpöndülete nem változik. Azaz

$$\Theta_m\omega_0 = (\Theta_m + \Theta_M)\omega,$$

ahol  $\Theta_m = \frac{1}{2}mr^2$  és  $\Theta = \frac{1}{2}MR^2$  az egyes korongok tehetetlenségi nyomatéka a középpontjukon átmenő forgástengelyükre vonatkoztatva. Innen:

$$\omega = \frac{mr^2}{mr^2 + MR^2}\omega_0.$$

b) A kezdeti energia

$$E_0 = \frac{1}{2}\Theta_m\omega_0^2 = \frac{1}{4}mr^2\omega_0^2.$$

Az ütközés utáni energia:

$$E = \frac{1}{2}(\Theta_m + \Theta_M)\omega^2.$$

Az a) rész eredményével:

$$E = \frac{1}{4}mr^2\omega_0^2 \frac{mr^2}{mr^2 + MR^2}.$$

A disszipálódott energia relatív nagysága:

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{E_0 - E}{E_0} = 1 - \frac{E}{E_0} = 1 - \frac{mr^2}{mr^2 + MR^2}.$$

**F8.** a) Az ütközés során a zsanérokön átmenő tengelyre vonatkoztatva a perdület megmarad.

$$mv_0(L - d) = \left[ \frac{1}{3}ML^2 + m(L - d)^2 \right] \omega,$$

ahonnan a szögsebesség:

$$\omega = \frac{mv_0(L - d)}{\frac{1}{3}ML^2 + m(L - d)^2} = 6,6 \frac{1}{s}.$$

b) Az ütközés előtti energia:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = 25 \text{ kJ}.$$

Az ütközés utáni energia:

$$E = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3}ML^2 + m(L - d)^2 \right] \omega^2.$$

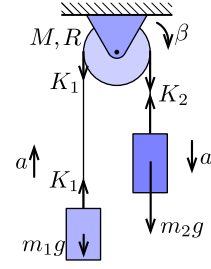
Felhasználva az a) rész eredményét:

$$E = \frac{1}{2} \frac{m^2v_0^2(L - d)^2}{\frac{1}{3}ML^2 + m(L - d)^2} = 0,13 \text{ kJ}.$$

Vagyis a disszipálódott energia:

$$\Delta E = E - E_0 = -24,87 \text{ kJ}.$$

**F9.** Mivel a csiga tömege nem elhanyagolható, a két oldalán lévő kötélrészben különböző erő lép fel.



Az ábrán látható jelöléseket használva a mozgásegyenletek a testekre:

$$(4) \quad K_1 - m_1g = m_1a,$$

$$(5) \quad m_2g - K_2 = m_2a.$$

A csiga forgására:

$$(6) \quad (K_2 - K_1)R = \Theta\beta.$$

Mivel a kötélnem csúszik meg a csigán, ezért a csiga éritnőirányú gyorsulása a kötélné gyorsulásával egyezik meg:  $a = \beta R$ .

A (4) és (5) egyenletek összegéből:

$$K_2 - K_1 = (m_2 - m_1)g - (m_1 + m_2)a.$$

Ezt és a kényszerfeltételt kihasználva (6)-ban:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{\Theta}{R^2}}g.$$

Ha a csiga (henger) tehetetlenségi nyomatéka  $\frac{1}{2}MR^2$ , akkor a gyorsulás:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}g.$$

Látható, hogy ha  $M = 0$ , akkor visszakapjuk a könnyű csigára vonatkozó eredményt.