

Síkhullámok reflexiója/transzmissziója sík határfelületen

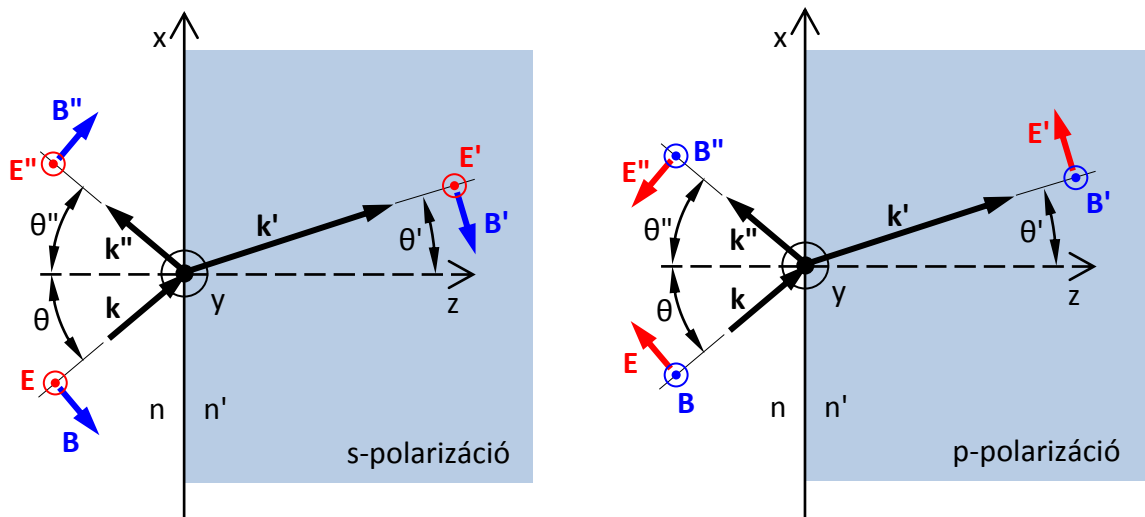
Dr. Koppa Pál, Dr. Erdei Gábor, 2018-09-14

Polarizációs sajátállapotok síkhullám-síkfelület találkozásánál

Hullámtanból ismert, hogy amennyiben a terjedési sebesség ugrásszerűen változik két közeg határfelülete mentén, reflexió és törés jelensége lép fel. A visszaverődés megjelenése kifejezetten az ugrásszerű törésmutató-változásnak köszönhető, amikor is a hullámnak a felületnél két feltételt kell egyszerre kielégíteni: az energiamegmaradását és az amplitúdó (megfelelő komponensének) folytonos áthaladását. Olyan esetben, amikor a törésmutató-átmenet lassú, nincs amplitúdófeltétel, ebből kifolyólag reflektált hullám sem jelenik meg. Az alábbiakban azt az esetet vizsgáljuk, amikor az optikai anyagjellemzők ugrásszerűen (azaz a hullámhossznál jóval kisebb tartományon belül) változnak egy sík felületre merőleges irányban.

Fény esetén a reflexió/transzmisszió tárgyalásakor nem hagyható figyelmen kívül az EM tér transzverzálitása, azaz a polarizáció. Polarizált sugárzásról akkor beszélünk, amikor az \mathbf{E} és \mathbf{B} térerősség vektorok rezgése hosszú távú időbeli és térbeli rendezettséget (periodicitást) mutat. A rendezettség legismertebb fajtája a lineáris polarizáció, amikor a térerősség vektorok rezgése állandóan egy síkban marad (erre utal a „polarizált”, régiesen „sarkított” kifejezés). A teljesen monokromatikus síkhullám mindig polarizált, általános esetben elliptikusan (ld. a polarizáció témakörét). Polarizálatlan fény létrehozásához nagy számú, véletlen fázisú és különböző irányú amplitúdóvektorral rendelkező síkhullámot kell összekevernünk. További feltétel, hogy a fáziskülönbség a síkhullám-komponensek között időben vagy térben gyorsan változzon. Az előbbi miatt a sugárzás hullámhosszspektruma kiszélesedik (már nem lesz monokromatikus), az utóbbi miatt divergens lesz az iránykarakterisztikája (többé már nem síkhullám). Ha a térbeli és időbeli véletlenszerűség egyidejűleg lép fel, a környezetünkben tapasztalható diffúz és polarizálatlan sugárzást kapjuk. (Ezekről a térbeli és időbeli koherenciánál lesz szó.)

A továbbiakban egy ideális (végtelen) síkhullámot bocsájtunk egy sík határfelületre, és vizsgáljuk a visszaverődés/törés törvényszerűségeit. A levezetésnél abszorpciómentes dielektrikum közegeket tételezünk fel (tehát n és \mathbf{k} valós). Mivel a síkhullám megoldása a Maxwell-egyenleteknek, eredményeink nem csupán a geometriai optikai közelítés keretein belül érvényesek (ld. egy későbbi óra), hanem általános hullámoptikai törvényszerűségek.



A levezetés fontos eleme az a megfigyelés, hogy a felületi reflexiónak/transzmisszióknak vannak polarizációs sajátállapotai: az s-polarizáció (σ , vagy TE-polarizáció) amikor az elektromos térerősség merőleges a beesési síkra, és a p-polarizáció (π , vagy TM polarizáció), amikor az elektromos térerősség párhuzamos a beesési síkkal. Mindkét esetben a fény lineárisan polarizált, és mivel ezek sajátállapotok, visszaverődés és törés közben *nem változnak meg*, csak a rezgés komplex amplitúdója módosul (abszolút értékben és fázisban).

A beeső, megtört és visszavert síkhullámok, illetve hullámszámvektoraik:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (1)$$

$$\mathbf{k} = n \cdot \mathbf{k}_0 \Rightarrow \mathbf{k} = (k_x, 0, k_z) = n \frac{\omega}{c} (\sin \theta, 0, \cos \theta) \quad (2)$$

$$\mathbf{k}'' = (k_x'', k_y'', k_z'') \quad ; \quad k_x''^2 + k_y''^2 + k_z''^2 = n^2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2$$

$$\mathbf{k}' = (k_x', k_y', k_z') \quad ; \quad k_x'^2 + k_y'^2 + k_z'^2 = n'^2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2$$

A vektoramplitúdó komplex értéke ($\tilde{\mathbf{E}}_0$) azt fejezi ki, hogy összetevő komponenseinek kezdőfázisa elvben tetszőleges lehet, aminek a segítségével általános (lineáris, cirkuláris, elliptikus) polarizációt le lehet írni (erről bővebben a polarizációt bemutató előadáson lesz szó), valamint a beeső, visszavert és áthaladó hullámok relatív fázisa is eltérő lehet.

Kontinuitási egyenletek két dielektrikum határán

A Maxwell-egyenletek határfeltételei alapján:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_t = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}''_t &\rightarrow \frac{\mathbf{B}'_t}{\mu'} = \frac{\mathbf{B}_t}{\mu} + \frac{\mathbf{B}''_t}{\mu} \rightarrow \mathbf{E}'_t = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}''_t \\ \mathbf{H}'_t = \mathbf{H}_t + \mathbf{H}''_t &\rightarrow \frac{\mathbf{B}'_t}{\mu'} = \frac{\mathbf{B}_t}{\mu} + \frac{\mathbf{B}''_t}{\mu} \rightarrow \mathbf{B}'_t = \mathbf{B}_t + \mathbf{B}''_t \end{aligned}$$

ahol feltételeztük, hogy a közegek nem mágnesezhetők, azaz $\mu = \mu' = \mu_0$. (A két amplitúdófeltétel helyett használhatnánk az egyiket az energiamegmaradás törvényével együtt. Levezetésünkben ez utóbbit a kapott képletek alapján fogjuk ellenőrizni.) A fenti összefüggésekre akkor van szükségünk, ha az anyagjellemzők a hullámhosszal összemérhető, vagy annál kisebb tartományon belül változnak (azaz ugrásszerűen). (1)-t behelyettesítve:

$$\tilde{\mathbf{E}}'_{t0} \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})} = \tilde{\mathbf{E}}_{t0} \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} + \tilde{\mathbf{E}}''_{t0} \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r})}$$

$z = 0$ határfelület, $k_y = 0$, $e^{i\omega t}$ -vel egyszerűsítve

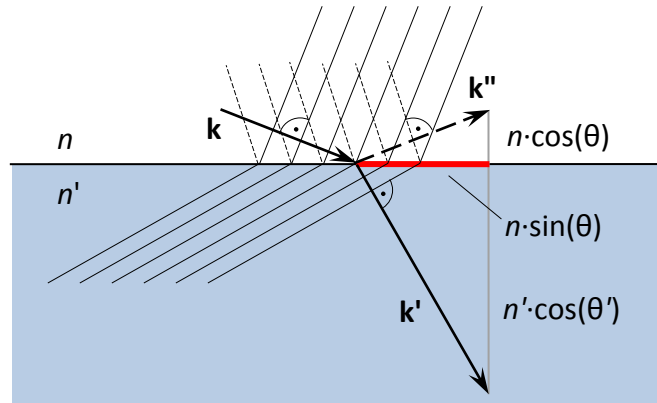
$$\tilde{\mathbf{E}}'_{t0} \cdot e^{-i(k'_x x + k'_y y)} = \tilde{\mathbf{E}}_{t0} \cdot e^{-i(k_x x)} + \tilde{\mathbf{E}}''_{t0} \cdot e^{-i(k''_x x + k''_y y)}. \quad (3)$$

Hasonlóan \mathbf{B}_t -re. (3) akkor teljesül tetszőleges (x, y) értékre, ha azonosak kitévők:

$$k'_x x + k'_y y = k_x x = k''_x x + k''_y y$$

Ez az ún. fázisillesztés, ami azt jelenti, hogy a felület mentén mind a beeső, a visszavert és az áthaladó hullámok fázisa azonos mértékben változik a határfelület mentén (azaz az x -tengelyre vetített hullámhossz ill. hullámszámvektor mindhárom esetben egyforma):

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } k'_y = k''_y = 0 \\ \text{II. } k_x = k''_x \\ \text{III. } k_x = k'_x \end{array} \right\}$$



I.-ből következik, hogy a törési és tükrözési sík egybeesik a beesési síkkal.

II.-ből megkapjuk a tükrözési törvényt:

$$\sin(\theta) = \sin(\theta'') \Rightarrow \theta = \theta''$$

III.-ből a törési törvényt (Snellius-Descartes törvény):

$$n \frac{\omega}{c} \sin(\theta) = n' \frac{\omega}{c} \sin(\theta') \Rightarrow n \cdot \sin(\theta) = n' \cdot \sin(\theta'),$$

mivel θ és $\theta'' \in [0; \pi/2]$. Ha a fázisok egyenlőek, egyszerűsíthetünk velük (3)-ban. Így kapjuk az amplitúdókra vonatkozó feltételt:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}'_{t0} &= \tilde{\mathbf{E}}_{t0} + \tilde{\mathbf{E}}''_{t0} \\ \tilde{\mathbf{B}}'_{t0} &= \tilde{\mathbf{B}}_{t0} + \tilde{\mathbf{B}}''_{t0} \end{aligned} \quad (4)$$

S-polarizáció, azaz E merőleges a beesési síkra

$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_y$; $E_x = 0$ csak $E_y \rightarrow E_y = E$, azaz (4) alapján:

$$\boxed{\tilde{E}'_0 = \tilde{E}_0 + \tilde{E}''_0} \quad (5)$$

A II. Maxwell-egyenletből meghatározzuk \mathbf{B} értékét (a beeső, megtört és visszavert síkhullámokra egyaránt):

$$\text{rot}\tilde{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} \rightarrow -i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}_0 = -i\omega\tilde{\mathbf{B}}_0 \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_0 = \frac{\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}_0}{\omega}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ k_x & 0 & k_z \\ 0 & \tilde{E}_0 & 0 \end{vmatrix} = -k_z\tilde{E}_0\hat{\mathbf{x}} - 0 \cdot \hat{\mathbf{y}} + k_x\tilde{E}_0\hat{\mathbf{z}} \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_0 = \frac{-k_z\tilde{E}_0\hat{\mathbf{x}} + k_x\tilde{E}_0\hat{\mathbf{z}}}{\omega}. \quad (6)$$

(4)-ből a \mathbf{B} -re vonatkozó feltétel:

$$\tilde{\mathbf{B}}'_{0x} = \tilde{\mathbf{B}}_{0x} + \tilde{\mathbf{B}}''_{0x}$$

Ide behelyettesítve (6) x-komponensét, és ω -val egyszerűsítve ($\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y$; $B_y = 0$):

$$-k'_z\tilde{E}'_0 = -k_z\tilde{E}_0 - k''_z\tilde{E}''_0$$

A tükrözési törvény alapján $k''_z = -k_z$:

$$-k'_z\tilde{E}'_0 = -k_z\tilde{E}_0 + k_z\tilde{E}''_0$$

Mindkét oldalt elosztva $-k_z$ -vel:

$$\boxed{\frac{k'_z}{k_z}\tilde{E}'_0 = \tilde{E}_0 - \tilde{E}''_0} \quad (7)$$

(5) és (7) kétismeretlenes egyenletrendszer alkot, amelyeket megoldhatunk \tilde{E}'_0 -ra és \tilde{E}''_0 -ra:

$$\tilde{E}'_0 = \frac{2}{1 + \frac{k'_z}{k_z}}\tilde{E}_0 \quad ; \quad \tilde{E}''_0 = \frac{2}{1 + \frac{k'_z}{k_z}}\tilde{E}_0 - \tilde{E}_0 \quad (8)$$

Bevezetjük az „a” segédváltozót:

$$a \equiv \frac{k'_z}{k_z},$$

amivel a (8) összefüggések egyszerűbb alakba írhatók:

$$\tilde{E}'_0 = \frac{2}{1+a}\tilde{E}_0 \quad ; \quad \tilde{E}''_0 = \frac{1-a}{1+a}\tilde{E}_0$$

Az s-polarizáció esetén definiált transzmissziós (τ_s) és reflexiós (ρ_s) tényezők ezzel:

$$\tau_s \equiv \frac{\tilde{E}'_0}{\tilde{E}_0} = \frac{2}{1+a} \quad ; \quad \rho_s \equiv \frac{\tilde{E}''_0}{\tilde{E}_0} = \frac{1-a}{1+a}$$

$$a \equiv \frac{k'_z}{k_z} = \frac{n' \cdot \cos(\theta')}{n \cdot \cos(\theta)}$$

$$\boxed{\tau_s = \frac{2n \cdot \cos(\theta)}{n \cdot \cos(\theta) + n' \cdot \cos(\theta')}} \quad ; \quad \boxed{\rho_s = \frac{n \cdot \cos(\theta) - n' \cdot \cos(\theta')}{n \cdot \cos(\theta) + n' \cdot \cos(\theta')}}. \quad (9)$$

Fontos észrevenni, hogy dielektrikumok határfelületén a transzmissziós és reflexiós tényezők értéke valós, tehát a beeső, visszavert és áthaladó hullámok között konstans fázistolás sincsen.

P-polarizáció, azaz E párhuzamos a beesési síkkal

$\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y$; $B_x = 0$ csak $B_y \rightarrow B_y = B$, azaz (4) alapján:

$$\tilde{\mathbf{B}}'_0 = \tilde{\mathbf{B}}_0 + \tilde{\mathbf{B}}''_0$$

A fentiekhez hasonlóan levezethetők a p-polarizációs transzmissziós (τ_p) és reflexiós (ρ_p) tényezők:

$$\tau_p \equiv \frac{\tilde{E}'_0}{\tilde{E}_0} = \frac{2}{1+b} \frac{n}{n'} ; \quad \rho_p \equiv \frac{\tilde{E}''_0}{\tilde{E}_0} = \frac{1-b}{1+b}$$

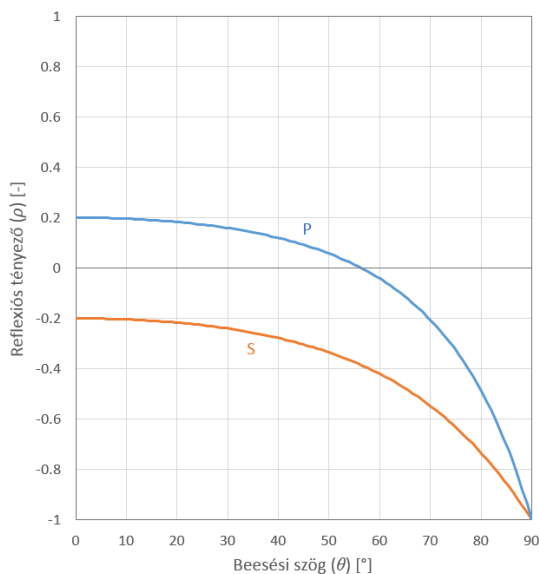
$$b \equiv \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \frac{k'_z}{k_z} = a \cdot \left(\frac{n}{n'}\right)^2 = \frac{n \cdot \cos(\theta')}{n' \cdot \cos(\theta)}$$

$$\boxed{\tau_p = \frac{2n \cdot \cos(\theta)}{n' \cdot \cos(\theta) + n \cdot \cos(\theta')}} ; \quad \boxed{\rho_p = \frac{n' \cdot \cos(\theta) - n \cdot \cos(\theta')}{n' \cdot \cos(\theta) + n \cdot \cos(\theta')}} \quad (10)$$

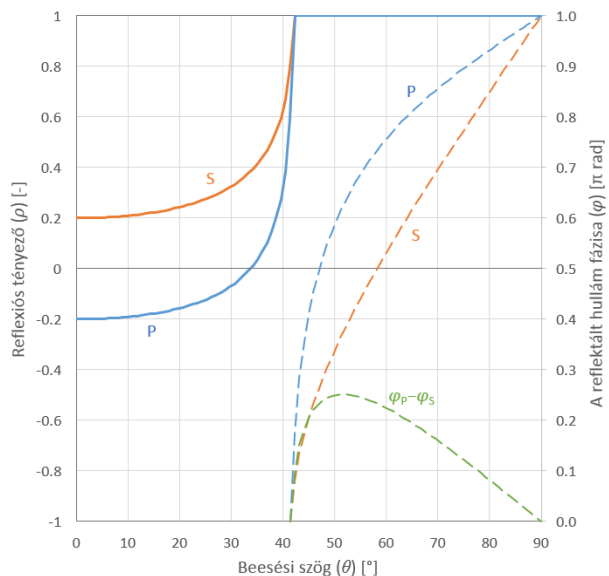
A (9) és (10) összefüggéseket együttesen Fresnel-formuláknak nevezzük.

A Fresnel-formulák diszkutálása

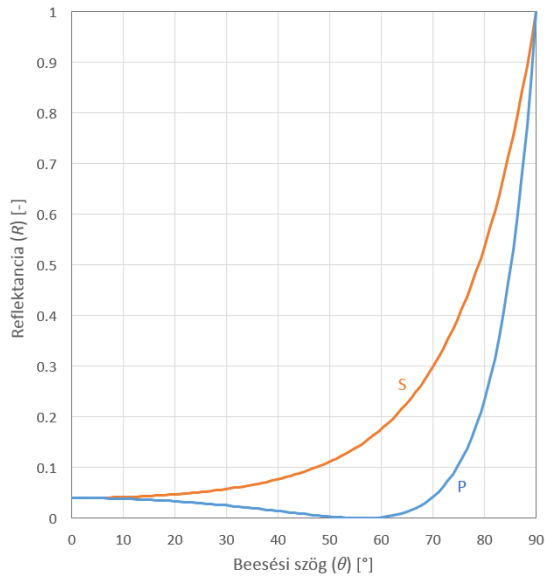
Az alábbi ábrán üveg esetére ($n = 1$ és $n' = 1,5$) bemutatjuk a reflexiós és transzmissziós tényezők szögfüggését. Az első amit érdemes megfigyelni, hogy külső visszaverődés esetén ($n < n'$), az elektromágneses tér a beeső sugárzashoz képest *ellenfázisban* verődik vissza (ld. ρ_s előjele). A második, hogy a beesési szög növekedésével az s-reflexiós tényező abszolút értékben nő és 1-hez tart. A harmadik, hogy egy adott szögnél $\rho_p = 0$, azaz a visszavert sugárzás teljesen polarizált, *csak s-komponenst* tartalmaz. Ez az ún. Brewster-effektus, amiről később részletesebben lesz szó. A negyedik, hogy belső visszaverődésnél ($n > n'$) a reflexió nem 90°-os szögnél éri el a maximumát (1-et), hanem jóval korábban. Ezt *teljes belső visszaverődésnek* nevezzük, és alább szintén részletesen tárgyaljuk.



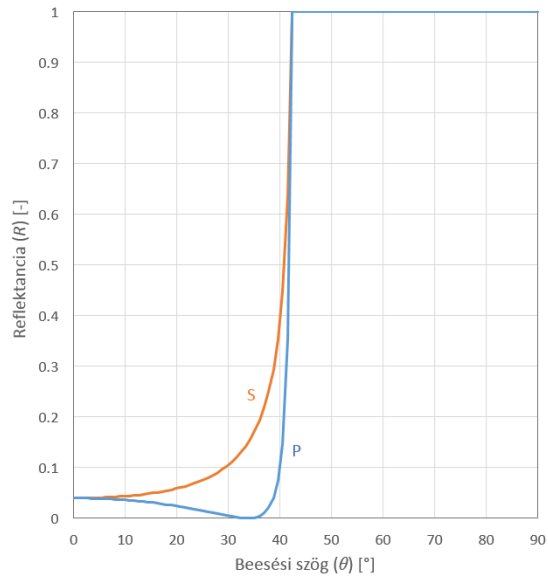
külső visszaverődés



belső visszaverődés



külső visszaverődés



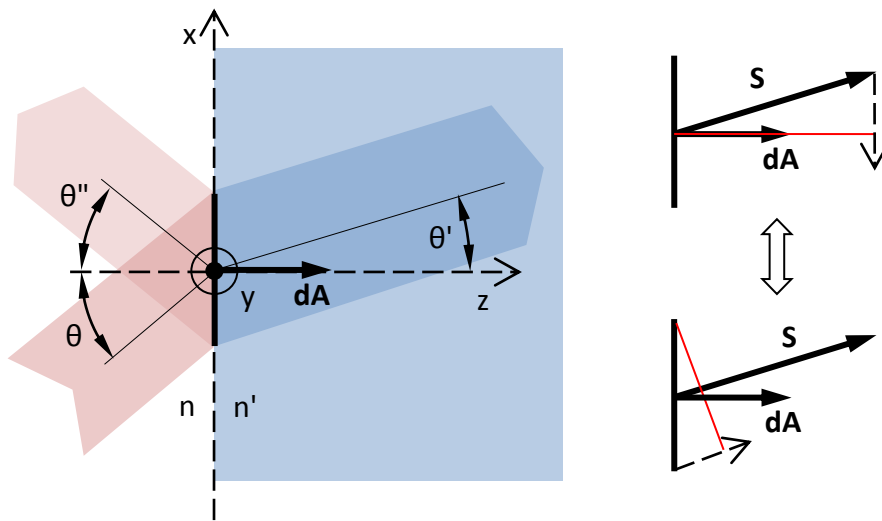
belső visszaverődés

Az előző órán bevezettük az abszorbens közegek leírására alkalmas *komplex hullámszámvektort és törésmutatót*. Merőlegestől eltérő beesési szög esetén a hullámszám vektor valós és képzetes komponensei nem mutatnak egy irányba, emiatt a $\vec{k} = \vec{n} \cdot \mathbf{k}_0$ összefüggés sem igaz. Ebből az következik, hogy a Fresnel-formulák levezetésénél kiindulásul használt (2) abszorbens közeg esetén nem érvényes tetszőleges beesési szög mellett, csak ha $\theta \approx 0^\circ$! Ettől függetlenül, a reflexiós és transzmissziós tényezők mindenképpen komplex mennyiségek lesznek, azaz fémek felületéről történő visszaverődés után *a rezgés fázisa megváltozik*. Ennek további következménye, hogy míg dielektrikum-felületekről történő visszaverődés esetén a beeső nem s- vagy p-polarizációjú lineárisan polarizált sugárzás mindig lineáris marad (csak a rezgés síkja fordul el), fémek esetében a visszavert sugárzás az s- és p-komponensek közötti fáziskülönbség miatt elliptikussá változik. A tetszőleges szögre alkalmazható általános formulák levezetése megtalálható az alábbi referenciákban:

P.C.Y Chang, J.G. Walker, K.I. Hopcraft, „Ray tracing in absorbing media”, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, vol. **96**, pp. 327-341, 2005.

M. Born, E. Wolf, „Principles of Optics”, Pergamon Press, pp. 611-664.

Az intenzitásra vonatkozó Fresnel-formulák



A múlt óra alapján a detektálható, idő szerint átlagolt teljesítmény-sűrűség vektor (valós hullámszám vektorú közegek esetére):

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{\mu} \frac{k}{\omega} \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_0|^2}{2}.$$

Az alábbiakban az $x = y = z = 0$ pontban vizsgálódunk és továbbra is feltételezzük, hogy a közeg nem mágneses: $\mu = \mu' = \mu_0$. Ekkor beeső nyalábbból dA felületegységen merőlegesen áthaladó átlagos teljesítmény (ami pontosan ekvivalens azzal, mintha a dA felületelemnek a nyalábra merőleges vetületét vennék):

$$dP = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0} \frac{k}{\omega} \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_0|^2}{2} \cdot \cos(\theta) \cdot dA.$$

Ugyanez a megtört nyalábra:

$$dP' = \langle \mathbf{S}' \rangle \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0} \frac{k'}{\omega} \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_0'|^2}{2} \cdot \cos(\theta') \cdot dA,$$

és a visszavert nyalábra:

$$dP'' = \langle \mathbf{S}'' \rangle \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0} \frac{k''}{\omega} \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_0''|^2}{2} \cdot \cos(\theta'') \cdot dA$$

A felületegységre merőlegesen beeső és visszavert fénytjeljesítmény komponensek hányadosa a *reflektancia* (R):

$$R \equiv \frac{dP''}{dP} = \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_0''|^2}{|\tilde{\mathbf{E}}_0|^2} = |\rho|^2 \quad (10)$$

A felületegységre merőlegesen beeső és áthaladó (megtört) fénytjeljesítmény komponensek hányadosa a *transzmittancia* (T):

$$T \equiv \frac{dP'}{dP} = \frac{\langle \mathbf{S}' \rangle \cdot \cos(\theta')}{\langle \mathbf{S} \rangle \cdot \cos(\theta)} = \frac{k' |\mathbf{E}'_0|^2 \cdot \cos(\theta')}{k |\mathbf{E}_0|^2 \cdot \cos(\theta)} = |\tau|^2 \cdot \frac{n' \cos(\theta')}{n \cos(\theta)} \quad (11)$$

Érdeemes megfigyelni, hogy a fénynyaláb keresztmetszete törés után *megváltozik*. Ezt fejezi ki a koszinuszos tag a (11) képletben. Emiatt törés után akkor is megváltozik a fénynyaláb intenzitása (azaz $\langle S' \rangle$), ha a transzmisszió 100%-os (pl. reflexiócsökkentő réteg alkalmazása esetén): $n < n'$ esetén csökken, fordított esetben pedig nő. Az effektus használható többek között fénynyaláb egyirányú nyújtására (ld. lézerdiódák nyalábformálása).

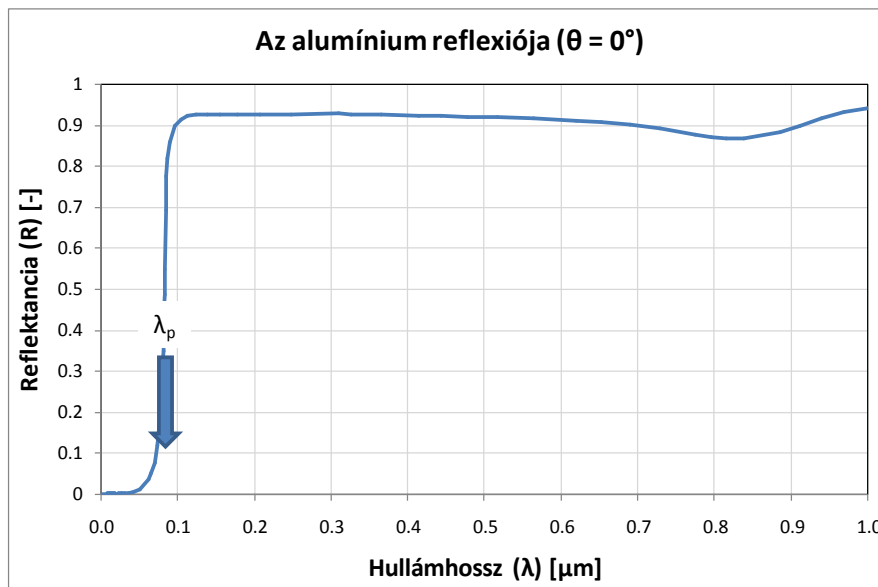
A fentiekből az is könnyen belátható, hogy T -re és R -re teljesül az energiamegmaradás törvénye:

$$T + R = 1.$$

Merőleges beesés esetén:

$$T = \left| \frac{2n}{n+n'} \right|^2 \cdot \frac{n'}{n} \quad \text{és} \quad R = \left| \frac{n-n'}{n+n'} \right|^2 \quad (12)$$

Ha az első közeg levegő ($n = 1$), a második közeg üveg ($n' = 1,5$), akkor $\rho = -0,2$ és $R = 0,04$ (azaz 4%).



A reflektancia (12) képletével az alumínium komplex törésmutatója alapján számolva, merőleges beesés esetén (ld. múlt óra).

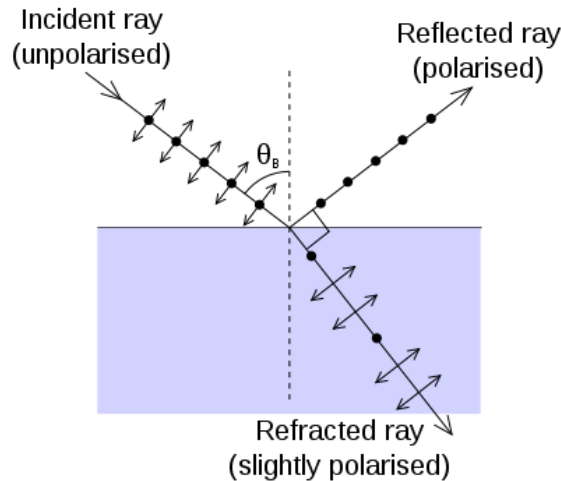
Brewster-effektus

A fény törése és visszaverődése mikroszkopikusan úgy értelmezhető, hogy a beeső sugárzást a második közegben lévő atomokat reprezentáló elektromos dipólusok elnyelik (azaz rezgésbe jönnek) majd visszasugározzák. A sugárzó dipólus nem bocsájt ki energiát a rezgés tengelyének irányában. Ha a visszavert sugárzás iránya éppen merőleges a megtört irányára ($\theta + \theta' = 90^\circ$), és a beeső sugárzás p-polarizációjú (azaz nincs a beesési síkra merőleges komponense), akkor a második közegben lévő dipólusok éppen a visszavert sugárzás irányára merőlegesen rezegnek. Ebből az következik, hogy a visszavert p-polarizációjú sugárzásnak zérus az energiataralma, azaz $R_p = 0$. Ezt a jelenséget Brewster-effektusnak

nevezik a felfedezőjéről, a rá jellemző beesési szöget pedig θ_B -vel jelölik. A törési törvény felhasználásával könnyen levezethető:

$$\operatorname{tg}\theta_B = \frac{n'}{n}$$

A már korábban vizsgált levegő-üveg határfelület esetére: $\theta_B = 56,3^\circ$. Ha polarizálatlan fény esik Brewster-szög alatt egy felületre, akkor a visszavert sugárzás lineárisan polarizált lesz, hiszen csak s-polarizációjú komponenszt tartalmaz.



forrás: wikipedia

Teljes belső visszaverődés (totálreflexió): $n' < n$

A (9)-(10) Fresnel-formulákban alkalmazott „ a ” segédváltozó értéke $n' < n$ esetén (ld. s-polarizáció), bizonyos beesési szögekre komplex értéket vesz fel. Ennek matematikai magyarázata „ a ” definíciójában rejlik, aminek megértéséhez rendezzük át a formulát:

$$a \equiv \frac{k'_z}{k_z} = \frac{n' \cdot \cos(\theta')}{n \cdot \cos(\theta)} = \frac{n' \cdot \sqrt{1 - \sin^2(\theta')}}{n \cdot \cos(\theta)} = \frac{\sqrt{n'^2 - n^2 \cdot \sin^2(\theta)}}{n \cdot \cos(\theta)} \quad (13)$$

Ha a beesési szög (θ) meghalad egy bizonyos kritikus értéket (θ_c), akkor (13)-ban a gyökjel alatt negatív szám áll. A kritikus szög könnyen meghatározható, ha megnézzük mikor nulla a gyökjel alatti kifejezés:

$$n' = n \cdot \sin(\theta_c) \rightarrow \theta_c = \operatorname{asin}\left(\frac{n'}{n}\right)$$

Most azokat az eseteket vizsgáljuk, amikor $\theta_c < \theta$, hogy megértsük fizikailag mit takar „ a ” komplex értéke. A (13) egyenletet átalakítva:

$$a \equiv \frac{\sqrt{-1 \cdot (n^2 \cdot \sin^2(\theta) - n'^2)}}{n \cdot \cos(\theta)} = \pm i \cdot \frac{\sqrt{(n^2 \cdot \sin^2(\theta) - n'^2)}}{n \cdot \cos(\theta)} \equiv \pm i \cdot \gamma.$$

Itt a negatív előjelet kell választanunk, mert az alábbiakból ki fog derülni, hogy ennek van fizikai jelentése (csillapodó hullám). Ekkor a második közegben lévő hullámszámvektorra a következőt kapjuk:

$$k'_z = -i \cdot k_z \gamma.$$

A fenti összefüggést a komplex hullámszám vektornál tanultak alapján úgy értelmezhetjük, hogy teljes visszaverődésnél a kisebb törésmutatójú (n') közegben a hullám z-irányban erősen csillapodik. A fázisillesztés miatt továbbra is igaz, hogy $k'_x = k_x$, azaz a hullámszám vektor valós része x-irányba, a felülettel párhuzamosan mutat (azaz $\mathbf{k}_{re} \perp \mathbf{k}_{im}$):

$$\mathbf{E}'(x, z, t) = \mathbf{E}'_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} = \mathbf{E}'_0 e^{i(\omega t - k_x x + i\gamma k_z z)} = \mathbf{E}'_0 e^{i(\omega t - k_x x)} e^{-\gamma k_z z}.$$

Az ilyen tereket nevezzük elhaló hullámnak (*evanescent wave*). A behatolási mélység (δ) múlt órai definíciója alapján:

$$\delta \equiv \frac{1}{k'_{im}} = \frac{1}{|k'_z|} = \frac{1}{k_z} \frac{n \cdot \cos(\theta)}{\sqrt{(n^2 \cdot \sin^2(\theta) - n'^2)}}.$$

Üveg/levegő határfelületen ($n = 1,5$; $n' = 1,0$) a határszög $\theta_c = 41,8^\circ$. $\theta = 45^\circ$ -os beesés esetén:

$$\delta = \frac{3}{k_z} = \lambda \cdot 0,48 = 263 \text{ nm},$$

ahol $\lambda = 550$ nm-es közepes (zöld) hullámhosszt tételeztünk fel. Mivel a Fresnel-formulák felírásánál bevezetett „ a ” és ebből kifolyólag „ b ” értéke is komplex, a reflexió tényezőik is azok lesznek:

$$\rho_s \equiv \frac{\tilde{E}_0''}{\tilde{E}_0} = \frac{1-a}{1+a} = \frac{1+i\gamma}{1-i\gamma} = \frac{A \cdot e^{i\varphi_s/2}}{A \cdot e^{-i\varphi_s/2}} = e^{i\varphi_s},$$

$$\rho_p \equiv \frac{\tilde{E}_0''}{\tilde{E}_0} = \frac{1-b}{1+b} = \frac{1+i\gamma \left(\frac{n}{n'}\right)^2}{1-i\gamma \left(\frac{n}{n'}\right)^2} = \frac{B \cdot e^{i\varphi_p/2}}{B \cdot e^{-i\varphi_p/2}} = e^{i\varphi_p}. \quad (14)$$

Ez azt jelenti, hogy a visszavert fény *fázistolást* szenved. Mivel általában $\varphi_s \neq \varphi_p$ (hanem beesésiszög-függő), a felületre nem s- vagy p-polarizációban beeső lineárisan polarizált síkhullám visszaverődés után elliptikusan polarizált lesz. A (14) összefüggésekből az is látszik, hogy a reflexió tényezőik abszolút értéke $R_{s,p} = 1$, azaz minden beeső energia visszaverődik. Emiatt az effektust teljes belső visszaverődésnek nevezik (*total internal reflection*).

A teljes visszaverődés jelenségét egyebek mellett pl. fény terelésére szolgáló prizmánál (ld. SLR azaz tükörreflexes kamerák betekintője, binokuláris távcsövek képfordítója), illetve fény- és hullámvezető szálakban használják. A polarizációs sajátállapotok eltérő fázistolásának kihasználásával építhető egy speciális prizma, az ún. Fresnel-rombusz, amely hullámhossz független $\lambda/4$ -es retarderként működik (a lineárisan polarizált fényt cirkulárisá alakítja.)