Fizika M1, BME, gépészmérnök mesterszak, 2018. őszi félév (v)

Pályi András
Elméleti Fizika Tanszék, BME
(Dated: November 10, 2018)

Ebben a fájlban az előadás menetrendjét követve gyűjtöm össze az egyes témakörökhöz kapcsolódó gyakorló feladatokat. A fájl hétről-hétre frissülni fog az adott hét feladataival. A zárthelyiken ehhez hasonló feladatok várhatók, feleletválasztós változatban.

(F-0/1) Nagyon ritkán, de előfordul, hogy egy gépészhallgató készülés és tudás nélkül megy el a zárthelyire. A zárthelyin feleletválasztós tesztet kap, 20 kérdéssel, és minden kérdésre 4 lehetséges válaszlehetőség közül kell kiválasztania az egyetlen helyes választ. 7 helyes válasz még elégtelen, 8 helyes válasz már elégségest ér, azaz 40%-tól eredményes a zárthelyi. Csupán véletlenül tippelgetve mekkora a valószínűsége, hogy eredményes lesz a zárthelyije?

TERV: TÉMÁK, MENETREND

- **Elektronok atomokban.** Klasszikus mechanika alapjai. Klasszikus atommodell. A kvantummechanika alapjai. Elektronállapotok a hidrogénatomban. A periódusos rendszer. (1.-3. előadás)
- **Elektronok kristályos szilárdtestekben.** A Sommerfeld-modell. A szorosкötésű modell. Elektronok sávszerkezete. Szigetelők, félvezetők, fémek. Elektromos vezetés. (4.-6. előadás)
- 1. zárthelyi (7. előadás)
- **Elektromechanika.** Elektromechanikai kölcsönhatási mechanizmusok: kapacitív, piezorezisztív, piezoelektromos. Szenzorok és aktuátorok. (8.-10. előadás)
- **Lézerek.** Lézerek működési elve, típusai, alkalmazásai. (11.-12. előadás)
- 2. zárthelyi (13. előadás)

I. ELEKTRONOK ATOMOKBAN

A. Az atomok abszorpciós színképe vonalas szerkezetet mutat

(F-I/1) Mik a jellemzői (k hullámszám, ω körfrekvencia, f frekvencia, T periódusidő) a $\lambda = 540$ nm hullámhosszú zöld fénynek?

(F-I/2) A két elektronvoltos energiakvantummal rendelkező elektromágneses sugárzásnak mennyi a hullámhossza és a frekvenciája?

B. Klasszikus mechanika: állapotjelzők, fizikai mennyiségek, mozgásegyenlet

(F-I/3) Egy méter magasból elengedünk egy egykilós testet. Mennyi idő múlva ér földet? Mekkora sebességgel csapódik be?

(F-I/4) Az előző feladatban leírt jelenség esetén melyek a rendszer állapotjelzői? Ezek milyen függvények, azaz honnan hova képeznek? Melyek a rendszer paraméterei?

(F-I/5) Írd fel a fenti rendszer mozgásegyenleteit $\dot{x}(t) = ...$, $\dot{v}(t) = ...$ alakban. Add meg a kezdeti feltételeket is. Legyen a koordinátarendszer origója a földfelszínen, és az x tengely legyen felfelé irányítva. Add meg a test teljes energiáját (mozgási energia és helyzeti energia) leíró formulát (a) a hely $x(t)$ és a sebesség $v(t)$ függvényeként, (b) a hely $x(t)$ és az impulzus $p(t) = mv(t)$ függvényeként. Itt m a test tömegét jelöli.

(F-I/6) Tekintsünk egy adott m tömegű, egydimenziós mozgást végző tömegpontot. A t időpontban $x(t)$ a helykoordinátája, $v(t)$ a sebessége, és $F(t)$ erő hat rá. Add meg a tömegpont helykoordinátáját és sebességét infinitezimálisan rövid Δt idő múlva: $x(t + \Delta t) =?$, $v(t + \Delta t) =?$

(F-I/7) Egy k rugóállandójú rugóra rögzített m tömegű testet $F(t) = F_0 \sin(2\pi f t)$ erővel gerjesztünk. Írd fel a mozgásegyenleteket, $\dot{x}(t) = ...$, $\dot{v}(t) = ...$ alakban.

- Példák: szabadesés (egydimenziós), harmonikus oszcillátor (egydimenziós), hidrogénatom (háromdimenziós).

C. Kvantummechanika: állapotjelzők, fizikai mennyiségek, mozgásegyenlet

(F-I/8) Egy dimenzióban mozgó elektron dinamikáját szeretnénk leírni a kvantummechanika eszközeivel. Az elektron pillanatnyi hullámfüggvénye honnan hova képez? Mi a dimenziója (mértékegysége) az argumentumainak és az értékének? Az elektron állapotának időfüggését leíró hullámfüggvény honnan hova képez?

(F-I/9) Egy elektron egy proton közelében tartózkodik a háromdimenziós térben. Az elektron dinamikáját szeretnénk kvantummechanikailag leírni. Mi az állapotjelző a kvantummechanikai leírásban? Milyen függvény, azaz honnan hova képez? Mik a fizikai mennyiségek? Milyen függvények, honnan hova képeznek?

(F-1/10) Milyen operátorok ábrázolják a három helykoordinátát és a három impulzuskoordinátát a kvantummechanikai leírásban?

(F-I/11) Egy egy dimenzióban mozgó elektront írunk le kvantummechanikailag. Egy adott pillanatban ismerjük az elektront leíró $\psi(x)$ hullámfüggvényt. Hogyan fejezhető ki a hely (azaz az x koordináta) várhatóértéke a hullámfüggvény segítségével?

(F-I/12) Legyen $\chi_{[a,b]}(x)$ az $[a,b]$ *intervallum karakterisztikus függvénye*, azaz az a függvény aminek értéke 1 ha $x \in [a,b]$, és 0 egyébként. Legyen $\psi_1(x) = N_1\chi_{[0,a]}(x)$. Mekkorára kell választani N_1-et, hogy ψ_1 normált legyen? Rajzold fel a normált hullámfüggvényt a hely függvényeként, jelölve a nevezetes tengelymetszeteket is. Rajzold fel az elektron $|\psi(x)|^2$ megtalálási valószínűségét a hely függvényeként, jelölve a nevezetes tengelymetszeteket is.

(F-I/13) Legyen $\psi_2(x) = \frac{i}{\sqrt{2a}}\chi_{[0,2a]}$. Számold ki ψ_1 és ψ_2 skalárszorzatát: $\langle\psi_1|\psi_2\rangle =?$

(F-I/14) Egy dimenzióban mozgó elektron hullámfüggvénye egy adott pillanatban

$$\psi(x) = \begin{cases} N\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), & \text{ha } 0 < x < L, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{1}$$

Normált-e a ψ hullámfüggvény, ha $N = 1$? Hogyan válasszuk N-t, hogy ψ normált legyen? Rajzold fel a normált hullámfüggvényt. Rajzold fel az elektron $|\psi(x)|^2$ megtalálási valószínűségét a pozíció függvényeként.

(F-I/15) Egy dimenzióban mozgó elektron hullámfüggvénye egy adott pillanatban

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), & \text{ha } 0 < x < L, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{2}$$

Ebben az állapotban mekkora a valószínűsége annak, hogy az elektront a $[0, L/4]$ szakaszon találjuk?

(F-I/16) Az előző ψ hullámfüggvénnyel jellemzett állapotban mennyi a pozíció várhatóértéke? Mennyi az impulzus várhatóértéke?

(F-I/17) Egy dimenzióban mozgó elektron dinamikáját szeretnénk leírni a klasszikus mechanika eszközeivel. Az elektron helyzeti energiájának helyfüggése $V(x) = -V_0 e^{-\frac{x^2}{2\ell^2}}$ alakú. Add meg az elektron teljes energiáját a sebessége (v) és a pozíciója (x) függvényeként. Fejezd ki ezt a teljes energiát az impulzusa (p) és a pozíciója függvényeként.

(F-I/18) Írd fel az előző példában szereplő elektron időfüggő Schrödinger-egyenletét. Milyen differenciálegyenlet ez? Közönséges vagy parciális? Melyik változóban hányadrendű? Lineáris vagy nemlineáris?

(F-I/19) Három dimenzióban mozgó elektron dinamikáját szeretnénk leírni a kvantummechanika eszköztárával. Az elektron hullámfüggvénye honnan hova képez? Mi a dimenziója (mértékegysége) az argumentumainak és az értékének?

D. Stacionárius állapotok a kvantummechanikában

(F-I/20) A három Pauli-mátrix:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Határozd meg mindhárom Pauli-mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

(F-I/21) Vizsgáljunk egy egydimenzióban mozgó elektront. Legyen a pillanatnyi hullámfüggvénye egy Gauss-hullámcsomag, azaz $\psi(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{a}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$. Sajátfüggvénye ez a hullámfüggvény az $\hat{x}$ helyoperátornak? Sajátfüggvénye ez a hullámfüggvény a $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\partial_x$ impulzusoperátornak?

E. A klasszikus Rutherford-modell nem magyarázza az atomok vonalas színképét

(F-I/22) Egy elektron a hidrogénatom klasszikus Rutherford-modelljének megfelelően körpályán mozog egy rögzítettnek tekintett proton körül. Tegyük fel, hogy a mozgás az xy síkban történik, és a pálya sugara $R = 0.2$ Å. Mekkora az elektron sebessége m/s egységekben? Hányadrésze ez a fénysebességnek? Mekkora és milyen irányú az elektron $\boldsymbol{L}$ perdülete (pontosabban perdület-vektora) SI egységekben, illetve $\hbar$ egységekben? Mekkora az elektron mozgási energiája elektronvoltban kifejezve? Mekkora az elektron helyzeti energiája elektronvoltban kifejezve?

(F-I/23) Tekintsük az előző feladatban vizsgált egyenletes körmozgást. Hogyan függ az elektron teljes energiája az $L = |\boldsymbol{L}|$ perdületétől?

F. A félklasszikus Bohr-modell megmagyarázza a vonalas színképet

(F-I/24) A félklasszikus Bohr-modell szerint milyen frekvenciájú és hullámhosszú elektromágneses sugárzást bocsát ki a hidrogénatom elektronja, amikor az első gerjesztett állapotból az alapállapotba relaxál?

G. A hidrogénatom kvantummechanikai modellje

(F-I/25) Egy dimenzióban mozgó elektron dinamikáját szeretnénk leírni a klasszikus mechanika eszközeivel. Az elektron helyzeti energiájának helyfüggése $V(x) = -V_0 e^{-\frac{x^2}{2\ell^2}}$ alakú, ahol $V_0 > 0$. Add meg az elektron teljes energiáját a sebessége (v) és a pozíciója (x) függvényeként. Fejezd ki ezt a teljes energiát az impulzusa (p) és a pozíciója függvényeként.

(F-I/26) Ha az előző példában az elektronról tudjuk, hogy kötött állapotban van, akkor mit tudunk a teljes energiájáról? Ha tudjuk, hogy szórási állapotban van, akkor mit tudunk a teljes energiájáról?

(F-I/27) Írd fel a rögzített proton Coulomb-erőterében mozgó elektron időfüggetlen Schrödinger-egyenletét. Mik az ismeretlenek?

H. Elektronállapotok a hidrogénatomban

(F-I/28) A hidrogénatomban levő egyetlen elektron kötési energiája az alapállapotban 1 Rydberg. Hány Rydberg a kötési energiája az elektronnak az első gerjesztett állapotban?

(F-I/29) Hányszorosan degenerált a hidrogénatom $n = 2$ főkvantumszámú nívója, a spin szabadsági fokot is figyelembe véve? Hányszorosan degenerált az $n = 3$ főkvantumszámú nívó?

(F-I/30) Legyen egy egydimenzióban mozgó elektron pillanatnyi hullámfüggvénye egy Gauss-hullámcsomag és egy síkhullám szorzata: $\psi(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{a}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} e^{ikx}$. Számold ki és ábrázold a $\rho(x) = |\psi(x)|^2$ részecskesűrűséget az x helykoordináta függvényeként. Számold ki és ábrázold a $j(x) = \mathrm{Re}\left(\psi^*(x)\frac{\hat{p}}{m}\psi(x)\right)$ részecskeáram-sűrűséget az x helykoordináta függvényeként.

I. Periódusos rendszer

(F-I/31) Hány Rydberg a kötési energiája az egyszeresen pozitívan töltött héliumion egyetlen elektronjának az alapállapotban és az első gerjesztett állapotban?

(F-I/32) Tekintsük a H, He, Li, Be, Ne atomok elektronrendszerét, és hanyagoljuk el az elektron-elektron-kölcsönhatást. Mindegyik atomra válaszoljuk meg a következő kérdéseket: Hányszorosan degenerált az atom alapállapota? Hány törzsi elektronnal, hány lezárt héjjal, és hány vegyértékelektronnal rendelkezik az atom? Mekkora (hány Rydberg) az alapállapoti kötési energia? Hányszorosan degenerált az első gerjesztett állapot? Mekkora (hány Rydberg) az első gerjesztett állapot kötési energiája?

II. ELEKTRONOK KRISTÁLYOS SZILÁRDTESTEKBEN

A. Elektromos vezetés fémekben: a klasszikus Drude-modell

(F-II/1) A réz fajlagos ellenállása $\rho_{\mathrm{Cu}} \approx 17 \times 10^{-9}\ \Omega$ m. Mekkora a fajlagos vezetőképessége? Mekkora egy 1 m hosszú, 1 mm^2 átmérőjű rézdrót ellenállása és vezetőképessége?

(F-II/2) Egy adott típusú fém egyszerű köbös rácsban kristályosodik, melynek rácsállandója 2Å. Tegyük fel, hogy atomonként egyetlen elektron vesz részt a elektromos vezetésben; hívjuk ezeket *vezetési elektronoknak*. Mekkora a vezetési elektronok részecskesűrűsége (1/m^3 egységekben) és töltéssűrűsége (C/m^3 egységekben) ebben az anyagban? Hány vezetési elektron van egy ilyen anyagból készült, 1 m hosszú, 1 mm^2 átmérőjű drótban?

(F-II/3) Tekintsük az előző feladatban leírt fémet. Ha tudjuk róla, hogy a fajlagos vezetőképessége megegyezik a réz fajlagos vezetőképességével, akkor mennyi a vezetési elektronokat jellemző ütközési idő, $\tau =$? Használd a Drude-modellt.

(F-II/4) Mekkora áram folyik ebben a drótban, ha 1 mV feszültséget kapcsolunk a két vége közé? Mekkora a vezetési elektronok drift-sebessége ilyenkor?

(F-II/5) Az ekvipartíció tétele alapján adott T hőmérsékletű egyatomos ideális gázban a részecskék tipikus mozgási energiája nagyságrendileg $E_{\mathrm{mozg}} \approx k_B T$, ahol k_B a Boltzmann-állandó. Becsüld meg ebből a szobahőmérsékletű ideális elektrongáz elektronjainak tipikus sebességét.

B. Geometriai piezorezisztivitás

(F-II/6) Egy fémdarabot homogén izotrop módon összenyomunk, úgy hogy mindhárom iránybeli kiterjedése 1%-ot csökken. Nő vagy csökken az ellenállása az összenyomás hatására? Hány százalékkal? Válaszodat alapozd a geometriai Ohm-törvényre és a Drude-féle vezetőképesség-formulára.

C. A vezetési elektronok kvantummechanikai Sommerfeld-modellje

(F-II/7) Tekintsük az egydimenziós üresrács-modellt, elemi cellánként egyetlen atommal, legyen a rácsállandó 2 Å, és tegyük fel hogy minden atom egyetlen vezetési elektront ad. Hány vezetési elektron található egy 1 cm hosszú mintában? Ebben a mintában mekkora a hullámszám-kvantum, $\delta k =$? Mekkora a Fermi-hullámszám, $k_F =$? Mekkora a Fermi-hullámhossz, $\lambda_F =$? Mekkora a Fermi-sebesség, $v_F =$? Mekkora a Fermi-energia, $\varepsilon_F =$? (Vedd figyelembe az elektronok spin szabadsági fokát is.)

(F-II/8) Tegyük fel, hogy a fenti mintára külső elektromos teret kapcsolunk, melynek hatására a betöltött állapotok a hullámszámtérben eltolódnak, és így a $[-k_F + \Delta k, k_F + \Delta k]$ hullámszám-intervallumban helyezkednek el (az egyensúlyt jellemző $[-k_F, k_F]$ intervallum helyett). Tegyük fel hogy $\Delta k_F = 0.01 k_F$. Becsüld meg, hogy mekkora áram folyik a mintán.

D. Elektronok az egyatomos láncban

Emlékeztető: az "egyatomos lánc" azt jelenti, hogy egyfajta atomból áll a lánc, nem pedig azt, hogy egyetlen atomból.

(F-II/9) Legyen egy egyatomos lánc rácsállandója a, és az elektronok szomszédos atomok közti alagutazási mátrixeleme $t < 0$. Ábrázold az elektronok diszperziós relációját az első Brillouin-zónában. Az ábrán tüntesd fel a nevezetes tengelymetszeteket.

(F-II/10) Legyen egy egyatomos lánc rácsállandója $a = 2$ Å, és a szomszédos atomok közti alagutazási mátrixelem $t = -1\,\mathrm{eV}$. Rajzold fel az elektronok diszperziós relációját az első Brillouin-zónában. Jelöld a nevezetes tengelymetszeteket.

(F-II/11) Mekkora az elektronok effektív tömege a sáv alján az (F-II/10) példában?

(F-II/12) Mekkora a $k = 0$, $k = \pi/(2a)$, és a $k = \pi/a$ hullámszámú elektronok csoportsebessége az (F-II/10) példában?

(F-II/13) Add meg az általános formulát, ami kifejezi a sáv alját jellemző effektív tömeget az alagutazási mátrixelem és a rácsállandó függvényében. E formula alapján meg tudod-e mondani, hogy a rács összenyomása esetén az effektív tömeg nő vagy csökken?

(F-II/14) A fenti egyatomos láncban minden atom egy elektront ad a vizsgált vezetési sávba. Fém vagy szigetelő ez az anyag? Vedd figyelembe az elektronok spinjét is. Mekkora az elektronok Fermi-sebessége? Mekkora az elektronok Fermi-energiája (a sáv aljához viszonyítva)?

(F-II/15) Fém vagy szigetelő a fenti egydimenziós lánc, ha minden atom két elektront ad ad a vezetési sávba?

(F-II/16) Tekintsünk egy hat atomból álló egyatomos láncot, és az alagutazási mátrixelemet jelölje t. Írd fel a 2. atomra vonatkozó hullámfüggvény-amplitúdó időderiváltját tartalmazó mozgásegyenletet. Írd fel a 6. atomra vonatkozót is.

E. Félvezetők

(F-II/17) Egy donoratomokkal adalékolt félvezető anyag vezetési sávjának alján az elektronok tömege $0.1\, m_\mathrm{e}$, és az anyag dielektromos állandója $\epsilon_r = 10$. Hány rydberg, illetve hány eV távolságra vannak a donornívók a vezetési sáv aljától $\epsilon_1 =$?

(F-II/18) A gallium-arzenid (GaAs) egy kristályos félvezető vegyület. Jó közelítéssel igaz, hogy a vezetési sáv alját jellemző effektív tömeg $m_n^* \approx 0.06\, m_\mathrm{e}$, míg a vegyértéksáv tetejét jellemző effektív tömeg $m_p^* \approx 0.5\, m_\mathrm{e}$. A tiltott sáv nagysága ebben az anyagban $E_g \approx 1.43$ eV. Az előadáson megismert összefüggésből határozd meg, hogy mennyi az n-típusú töltéshordozók (azaz a vezetési sávban levő elektronok) n sűrűsége 300 K hőmérsékleten. Hányszorosára nő ez a sűrűség, ha 10 K-nel felmelegítjük az anyagot?

(F-II/19) Gallium (Ga) szennyezőket ültetünk szilícium kristályba, egy-egy szilíciumatom helyére. Donorként vagy akceptorként viselkednek ezek a szennyező atomok?

(F-II/20) Egy akceptoratomokkal adalékolunk, azaz p-típusúvá tesszük. Az akceptoratomok sűrűsége ν_a. Legyen a minta szobahőmérsékleten. Jelölje a vezetési sáv elektronjainak sűrűségét n, az akceptornívókon található elektronok sűrűségét n_a, és a vezetési sávban található lyukak sűrűségét p. Milyen összefüggés áll fenn a fenti mennyiségek között? Útmutatás: (i) Hanyagoljuk el az elektron-elektron-kölcsönhatást. (ii) A vegyértéksávban található lyukak vagy a donornívókon, vagy a vezetési sávban jelentkezik többlet-elektronként.

(F-II/21) Éjjellátó szemüveghez szeretnénk olyan LED fényforrást építeni, ami $1\,\mu$m hullámhosszú infravörös sugárzást bocsát ki. Mekkora tiltott sávú félvezető anyagot tudnánk erre a célra használni?

(F-II/22) Egy GaAs-alapú LED-re egyenfeszültséget kapcsolunk, és 1 mA áramot folyatunk át rajta. Feltéve hogy minden áthaladó elektron fotonkibocsátással rekombinálódik az intrinszik tartományban, becsüld meg a kisugárzott fotonok áramát (foton/másodperc) és a sugárzási teljesítményt.

III. ELEKTROMECHANIKA

A. Piezorezisztivitás az egyatomos láncban

(F-III/1) Mi a mechanikai deformáció (ε) dimenziója (mértékegysége) egydimenziós/kétdimenziós/háromdimenziós modellekben?

(F-III/2) Mi a mechanikai feszültség (σ) dimenziója (mértékegysége) egydimenziós/kétdimenziós/háromdimenziós modellekben?

(F-III/3) Mi a részecskesűrűség dimenziója (mértékegysége) egydimenziós/kétdimenziós/háromdimenziós szilárdtest esetében?

(F-III/4) Mi az elektromos áramsűrűség dimenziója (mértékegysége) egydimenziós/kétdimenziós/háromdimenziós szilárdtest esetében?

(F-III/5) Mi a fajlagos vezetőképesség dimenziója (mértékegysége) egydimenziós/kétdimenziós/háromdimenziós szilárdtest esetében?

(F-III/6) Mi az elektromos ellenállás dimenziója (mértékegysége) egydimenziós/kétdimenziós/háromdimenziós minta esetében?

(F-III/7) Ha egy fémdrótot megnyújtunk (azaz ε mértékű longitudinális mechanikai deformációt alkalmazunk), akkor az ellenállása ennek hatására megváltozik, $R = R(\varepsilon)$. Kis deformáció esetén az ellenállásváltozás lineáris függvénye a deformációnak:

$$R(\varepsilon) = R(0)(1 + c\varepsilon), \tag{4}$$

ahol c a *piezorezisztív együttható* vagy egyszerűen *piezorezisztivitás*:

$$c = \frac{R(\varepsilon) - R(0)}{R(0)\varepsilon} \tag{5}$$

A klasszikus Drude-modellben kapott vezetőképesség-formula és a geometriai Ohm-törvény alapján mi c értéke? Mi az előjele? Hogyan függ az anyagi minőségtől? Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a relaxációs idő és a vezetési elektronok száma nem függ a deformációtól.

(F-III/8) Háromdimenziós vezető esetén a geometriai Ohm-törvény alakja $R = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{A}$, ahol R a minta ellenállása, σ a minta anyagának fajlagos vezetőképessége, L a minta hossza, A a minta keresztmetszete. Hogy néz ki ez a geometriai Ohm-törvény, ha a vezetőnk egydimenziós, például egy egyatomos lánc?

(F-III/9) Tekintsük egy 1 cm hosszú egyatomos lánc vezetési elektronjait. Legyen a rácsállandó $a_0 = 2$ Å, és az alagutazási mátrixelem $t_0 = -1$ eV. Tegyük fel, hogy a vezetési sáv 5%-os betöltöttségű, és hogy $\varepsilon = 0.01$ deformáció esetén, azaz 1%-os megnyújtásra, az alagutazási mátrixelem 1%-ot csökken: $t(\varepsilon) = t_0(1-\varepsilon)$. (a) Mekkora a vezetési elektronok sűrűsége ebben a láncban? (b) Mekkora ennek a láncnak az ellenállása, ha benne a relaxációs idő $\tau = 1\,\mathrm{fs}$? (c) Hogyan változik a sáv alját jellemző effektív tömeg, ha 1%-kal megnyújtjuk a láncot? (d) Hogyan változik a lánc ellenállása, ha 1%-kal megnyújtjuk a láncot? (e) Mekkora ennek a láncnak a piezorezisztív együtthatója, azaz $c =$? A kérdések megválaszolásához használjuk a Drude-féle vezetőképesség formulát, a vákuumbeli elektrontömeget (m_e) helyettesítve a vezetési sáv alját jellemző effektív tömeggel (m^*). Itt is tegyük fel, hogy a relaxációs idő nem függ a deformációtól, és vegyük figyelembe hogy egydimenziós a modell.

(F-III/10) Általánosítsuk az előző feladatot: tegyük fel, hogy az alagutazási mátrixelem deformáció-függése $t(\varepsilon) = t(0)(1-\beta\varepsilon)$ alakú. Nő vagy csökken a sáv alját jellemző effektív tömeg, ha nyújtuk a láncot? Nő vagy csökken az ellenállás, ha nyújtjuk a láncot?

B. Elektromos vezetés a vákuumon keresztül: a kvantummechanikai alagút-effektus

(F-III/11) Az arany fajlagos ellenállása szobahőmérsékleten $\rho \approx 23\times10^{-9}\,\Omega\,\mathrm{m}$. Mekkora az ellenállása (R) egy 2 cm hosszú, 100 μm átmérőjű, henger alakú aranyszálnak? Mekkora a vezetőképessége (G)? Mekkora a vezetőképessége a *vezetőképesség-kvantum* $G_0 = 2e^2/h$ egységgel kifejezve? Azaz $G/G_0 =$?

(F-III/12) Tegyük fel, hogy két, egymástól 100 pm távolságra lévő arany elektróda között megmérjük az ellenállást, ami $R \approx 1{,}3\,\mathrm{M}\Omega$-nak adódik. Mekkora vezetőképességnek felel ez meg? Mekkora ez a vezetőképesség G_0 egységekben? Ha 100 mV feszültséget kapcsolunk a két arany elektróda közé, akkor mekkora áram folyik át az elektródákon? Másodpercenként hány elektron jut át az elektródák közti résen? Becsüljük meg, hogy mekkora ellenállást illetve vezetőképességet mérünk, ha 200 pm-re távolítjuk el egymástól az elektródákat. Használjuk ki, hogy aranyban a kilépési munka kb. 4,5 eV.

C. Atomi pontos mechanikai szabályozás piezolektromosan

(F-III/13) Az inverz piezoelektromos hatást leíró ‘mikroszkopikus’ összefüggés a következő. Egy piezoelektromos anyag egy $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, E_z)$ homogén elektromos tér hatására mechanikai deformációt szenved, és a kialakuló mechanikai deformáció tenzorának elemei

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma\in\{x,y,z\}} \tilde{d}_{\alpha\beta\gamma} E_\gamma, \text{ ahol } (\alpha,\beta\in\{x,y,z\})\,, \tag{6}$$

és $\tilde{d}$ az *inverz piezoelektromos tenzor*. Az előadáson bemutatott kísérletben (aranyszál elszakítása, közben vezetőképesség mérése) egy olyan piezoelektromos hasáb szerepelt, melynek dimenziói $l_x = l_y = 3{,}5\,\mathrm{mm}$, $l_z = 18\,\mathrm{mm}$. A hasábnak az yz síkkal párhuzamos oldallapjaira 1 V feszültséget kapcsolva a hasáb z irányban 160 nm-t nyúlik meg (vagy húzódik össze, a feszültség előjelétől függően). Becsüld meg ebből a felhasznált anyag inverz piezoelektromos tenzorának $\tilde{d}_{zzx}$ elemét.

(F-III/14) Ha a fenti rendszerben 1V feszültséget kapcsolunk az oldallapokra, akkor mekkora és milyen irányú elektromos teret keltünk a hasáb belsejében? Mennyi ebben az esetben a mechanikai deformáció tenzorának ϵ_{zz} eleme?

(F-III/15) Mekkora lenne a fenti piezoelektromos hasáb z irányú megnyúlása, ha ugyanazon oldallapjai közé ugyanazt az 1 V feszültséget kapcsolnánk, de megdupláznánk a hasáb kiterjedését (a) az x irányban, (b) az y irányban, (c) a z irányban?

(F-III/16) Tegyük fel, hogy a kísérletben elszakított aranyszál 1 cm hosszú, és a laprugó, amire rá van ragasztva, szintén ugyanilyen hosszú. Tegyük fel továbbá, hogy a laprugóhoz éppen hozzáér a piezoelektromos hasáb teteje, amikor a hasábra kapcsolt feszültség nulla. Kapcsoljunk 40 V feszültséget a hasábra. Becsüljük meg, hogy mennyivel nyúlik meg az aranyszál (illetve a laprugó)? A becsléshez tegyük fel hogy az aranyszál (és a laprugó) végtelenül vékony, és egyenlő szárú háromszög alakban deformálódik.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönet Mihály Györgynek, Orosz Lászlónak, és Sánta Botondnak a tananyag összeállításában nyújtott segítségért.