Fizika feladatok

2014. november 24.

Ez a feladatgyűjtemény a villamosmérnök hallgatók korábbi jogos igényének megfelelve, nagy hiányt pótol. A kitűzött feladatok az I. féléves fizika tárgyának anyagához illeszkednek. Remélhetőleg érzékelhető segítséget jelent mind a hallgatók, mind a tárgyat oktatók számára, valamint hozzájárul az egységes oktatás megvalósításához. A gyűjteményben a * jelzés a magasabb nehézségi szintű feladatokat jelöli, míg a **-gal jelölt feladatokat a kihívásokat kedvelő megoldóknak ajánljuk. A feladatgyűjtemény folyamatosan bővül új feladatokkal és megoldásokkal. Javaslatokat új feladatokra, valamint megoldásokat és egyéb észrevételeket szívesen látunk. (Szerk.: Márkus Ferenc, Rakyta Péter, Krafcsik Olga)

1. Feladatok merev testek fizikájának tárgyköréből

Forgatónyomaték, impulzusmomentum, impulzusmomentum tétel

1.1. Feladat: (HN 10B-4) Egy $\mathbf{F} = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} + f_z\mathbf{k}$ ($f_x = 2$ N; $f_y = 3$ N; $f_z = 0$ N) erő hat egy testre. A test a z koordinátatengely mentén fekvő forgástengellyel van rögzítve. Az erő az $\mathbf{r} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ ($x = 4$ m; $y = 5$ m; $z = 0$ m) pontban támad. Határozzuk meg a forgatónyomaték nagyságát és irányát!

Megoldás: A forgatónyomaték definíciója $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ szerint a

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = (yf_z - zf_y)\mathbf{i} + (zf_x - xf_z)\mathbf{j} + (xf_y - yf_x)\mathbf{k} \tag{1.1.1}$$

determináns kiszámolását kell elvégezzük. A számszerű adatok behelyettesítésével forgatónyomaték vektor

$$\mathbf{M} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \tag{1.1.2}$$

azaz a vektor nagysága 2 Nm, iránya a z tengely irányításával megegyezik.

1.2. Feladat: Egy "L" hosszúságú kötél végén 0,2 kg tömegű test függőleges síkban körmozgást végez. A pálya csúcsán a kör középpontjára vett perdület fele akkora, mint a pálya alján, ahol a tömeg kinetikus energiája 4 J. Mekkora az "L"?

Megoldás: Jelölések: $m = 0,2$ kg, $E = 4$ J, valamint v_a az alsó, v_f a felső pontbeli sebességek. Mivel a pálya alsó pontján ismerjük a kinetikus energiát, így az

$$E = \frac{1}{2}mv_a^2 \tag{1.2.1}$$

összefüggésből az alsóponti sebesség

$$v_a = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{40}\,\mathrm{m/s} = 6,32\,\mathrm{m/s}. \tag{1.2.2}$$

Az impulzusmomentum $N = (L =)mvL$ definíciójából következik, hogy a felső pontban úgy lehet a fele az alsó impulzusmomentumnak, ha a felsőponti sebesség

$$v_f = \frac{v_a}{2} = \sqrt{10}\,\mathrm{m/s} = 3,16\,\mathrm{m/s}. \tag{1.2.3}$$

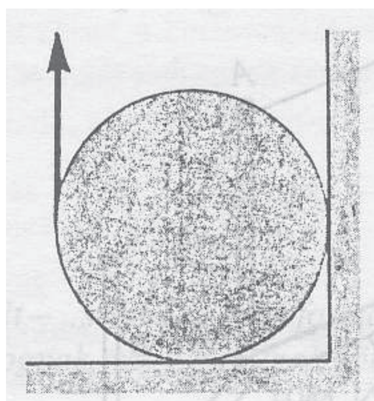
A két sebesség valamint az alsó és felső pontok magasssága közötti kapcsolatot a mechanikai energia megmaradását kifejező összefüggéssel teremthetjük meg:

$$\frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + mg \cdot 2L. \tag{1.2.4}$$

Az alsó és felső pontok közötti távolság $2L$. A behelyettesítések után a kötél hossza

$$L = 0,75\,\mathrm{m}. \tag{1.2.5}$$

1.3. Feladat: (HN 10C-48) A 1. ábra egy G súlyú homogén hengerre függőleges irányban ható F erőt mutat. A henger és a felületek közötti nyugalmi súrlódási együttható $\mu = 0,5$. Fejezzük ki a G függvényében azt a legnagyobb F erőt, amely még nem indítja meg a henger forgását!



1. ábra.

Megoldás: Jelölje N_1 a alsó érintkezési ponton felfele mutató támaszerőt, F_{s1} a balról jobbra mutató súrlódási erőt ugyanitt. Legyen N_2 a falnál jobbról balra mutató támaszerő, míg az itt ható felfele mutató súrlódási erő F_{s2}. E mennyiségek közötti kapcsolat

$$F_{s1} = \mu N_1 \tag{1.3.1}$$

és

$$F_{s2} = \mu N_2. \tag{1.3.2}$$

A henger akkor van egyensúlyban, ha a ható erők eredője és forgatónyomatéka zérus. Azaz előjel helyesen – pozitív az az erő, amely balról jobbra, illetve alulról felfele mutat – a függőleges irányban

$$0 = F - G + N_1 + F_{s2}, \tag{1.3.3}$$

a vízszintes irányban

$$0 = F_{s1} - N_2. \tag{1.3.4}$$

A forgatónyomatékra

$$0 = F_{s2}R + F_{s2}R - FR \tag{1.3.5}$$

A fenti öt egyenletből kell az F erőt kifejezni. A 1.3.1 és 1.3.2 súrlódási erők behelyettesítésével illetve az 1.3.5 egyenletben az R-rel való egyszerűsítés után kapjuk:

$$0 = F - G + N_1 + \mu N_2, \tag{1.3.6}$$

a vízszintes irányban

$$0 = \mu N_1 - N_2. \tag{1.3.7}$$

A forgatónyomatékra

$$0 = \mu N_2 + \mu N_1 - F \tag{1.3.8}$$

A 1.3.7 egyenletből N_2-őt kifejezve és a 1.3.6 valamint a 1.3.8 egyenletekbe helyettesítve

$$0 = F - G + (1 + \mu^2)N_1 \tag{1.3.9}$$

és

$$0 = \mu(\mu + 1)N_1 - F \tag{1.3.10}$$

adódik. Az N_1 eliminálásával az F erő

$$F = \frac{\mu(\mu+1)}{2\mu^2 + \mu + 1}G. \tag{1.3.11}$$

A $\mu = 0,5$ behelyettesítési értékkel az F erő maximális értéke

$$F = 0,375G. \tag{1.3.12}$$

1.4. Feladat: **Órai kidolgozásra 1. feladat** (HN 13B-7) Homogén tömör henger csúszás nélkül gördül le az α szög alatt hajló lejtőn. Bizonyítsuk be, hogy a csúszást gátló nyugalmi tapadási súrlódási együttható legkisebb értéke $\mathrm{tg}\alpha/3$ kell, hogy legyen! (A henger tehetetlenségi nyomatéka $\theta = \frac{1}{2}mR^2$.)

Megoldás: A hengerre az mg súlyerő, az $N = mg\cos\alpha$ támaszerő és az F_s tapadási súrlódási erő hat. A mozgásegyenletek a haladó mozgásra

$$ma = mg\sin\alpha - F_s, \tag{1.4.1}$$

és a forgómozgásra
$$\theta\beta = F_s R. \tag{1.4.2}$$
A tiszta gördülés feltétele az
$$a = R\beta. \tag{1.4.3}$$
összefüggéssel fogalmazható meg. A három egyenletből az F_s erő alakja
$$F_s = \frac{mg\sin\alpha}{1+\frac{mR^2}{\theta}}. \tag{1.4.4}$$
Figyelembe véve, hogy a tapadási erő maximális, ha
$$F_s = \mu mg\cos\alpha, \tag{1.4.5}$$
így ezt behelyettesítve a minimális μ tapadási együttható értékére – felhasználva a tehetetlenségi nyomaték kifejezését –
$$\mu = \frac{mg\sin\alpha}{(1+\frac{mR^2}{\theta})mg\cos\alpha} = \frac{\mathrm{tg}\theta}{1+\frac{mR^2}{\theta}} = \frac{\mathrm{tg}\theta}{3}. \tag{1.4.6}$$
adódik. Q.E.D.

1.5. Feladat: Egy tömör hengert és egy vékony falú csövet egyszerre engedünk el egy adott hajlásszögű lejtő tetejéről. Mindkét tárgy tisztán gördül.
(a) Határozza meg a henger tömegközéppontjának gyorsulását!
(b) Határozza meg a cső tömegközéppontjának gyorsulását!
(c) Milyen messze gurul el a cső, míg a henger s_h utat tesz meg?

Megoldás: Jelölje α a lejtő hajlásszögét, θ_h a henger és θ_{cs} a cső tehetetlenségi nyomatékát, F_s a tapadási súrlódási erőt. Az m és R a gördülő test tömege és sugara. ($\theta_h = \frac{1}{2}mR^2$; $\theta_{cs} = mR^2$)
A lejtőn legördülő test mozgásegyenlete a haladómozgásra
$$ma = mg\sin\alpha - F_s, \tag{1.5.1}$$
és a forgómozgásra – θ a gördülő test tehetetlenségi nyomatéka –
$$\theta\beta = F_s R. \tag{1.5.2}$$
A tiszta gördülés feltétele az
$$a = R\beta. \tag{1.5.3}$$

összefüggéssel fogalmazható meg. E három egyenletből a gyorsulás

$$a = \frac{m}{m + \frac{\theta}{R^2}} g \sin\alpha. \tag{1.5.4}$$

(a) A henger gyorsulása

$$a_h = \frac{m}{m + \frac{\theta_h}{R^2}} g \sin\alpha = \frac{2}{3} g \sin\alpha. \tag{1.5.5}$$

(b) A cső gyorsulása

$$a_{cs} = \frac{m}{m + \frac{\theta_{cs}}{R^2}} g \sin\alpha = \frac{1}{2} g \sin\alpha. \tag{1.5.6}$$

(c) A henger az s_h utat

$$t = \sqrt{\frac{2s_h}{a_h}} \tag{1.5.7}$$

idő alatt teszi meg. Ezalatt a cső

$$s_{cs} = \frac{1}{2} a_{cs} t^2 = \frac{1}{2} a_{cs} \frac{2s_h}{a_h} = \frac{3}{4} s_h \tag{1.5.8}$$

utat tesz meg.

1.6. Feladat: Egy jojó külső R sugara tízszerese belső r sugarának. A jojó orsója körüli tehetetlenségi nyomatéka jó közelítéssel $\theta = \frac{1}{2} mR^2$, ahol m a jojó teljes tömege. A fonál vége nem mozog.
(a) Számítsa ki a jojó tömegközéppontjának gyorsulását!
(b) Határozza meg a fonálban ébredő erőt!

Megoldás: Jelölés: a kötélerő K és $r = R/10$.
(a) A jojó tömegközéppontja körüli forgásra vonatkozó mozgásegyenlet

$$\theta\beta = Kr, \tag{1.6.1}$$

azaz a kötélerő hozza létre a β szöggyorsulású forgást. A haladó mozgásra felírható, hogy

$$ma = mg - K. \tag{1.6.2}$$

A haladó és forgómozgás közötti kapcsolat (tiszta gördülés)

$$a = r\beta. \tag{1.6.3}$$

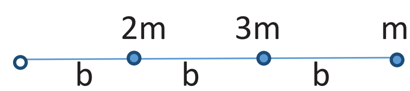
A három egyenletből a gyorsulás

$$a = \frac{g}{\frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2}+1} = \frac{1}{51}g. \tag{1.6.4}$$

(b) A kötélerő

$$K = \frac{50}{51}mg. \tag{1.6.5}$$

1.7. Feladat: Egy elhanyagolható tömegű merev rúdra három pontszerű testet erősítettek. Az egyik végén csapágyazott rúd függőleges síkban lenghet.
(a) Mekkora a tehetetlenségi nyomaték a csapágyra nézve?
(b) Mekkora lesz az alsó test sebessége a rúd függőleges helyzeten való áthaladásakor, ha a 2. ábrán látható helyzetből kezdősebesség nélkül elengedjük?



2. ábra.

Megoldás:
(a) A felfüggesztési pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\theta = \sum_i m_i r_i^2 = 2mb^2 + 3m(2b)^2 + m(3b)^2 = 23mb^2. \tag{1.7.1}$$

(b) A testek helyzeti energiájának összes megváltozása:

$$\Delta E_h = 2mgb + 3mg \cdot 2b + mg \cdot 3b = 11mgb. \tag{1.7.2}$$

E helyzeti energiaváltozás alakul forgási energiává:

$$\Delta E_h = \frac{1}{2}\theta\omega^2, \tag{1.7.3}$$

amelyből behelyettesítés után a szögsebességre kapjuk:

$$\omega = \sqrt{\frac{22g}{23b}}. \tag{1.7.4}$$

Az m tömegű test sebessége az alsó pontban:

$$v = R\omega = 3b\omega = 3\sqrt{\frac{22gb}{23}}. \tag{1.7.5}$$

1.8. Feladat: Homogén tömör tárcsa sugara 6 cm, tömege 1,5 kg. Nyugalomból indul a motor által kifejtett 0,6 Nm forgatónyomaték hatására. Mennyi idő alatt éri el az 1200 1/perc fordulatszámot? ($\theta = \frac{1}{2}mr^2$)

Megoldás: Jelölések: $r = 6$ cm = 0,06 m, $m = 1,5$ kg, $M = 0,6$ Nm és $f = 1200$ 1/perc = 20 1/s. A forgómozgás alapegyenlete szerint

$$\theta\beta = M, \tag{1.8.1}$$

ahonnan a β szöggyorsulás

$$\beta = \frac{M}{\theta} = \frac{2M}{mr^2} = 222,2\,1/\mathrm{s}^2. \tag{1.8.2}$$

A szögsebesség és a fordulatszám közötti összefüggés

$$\omega = 2\pi f, \tag{1.8.3}$$

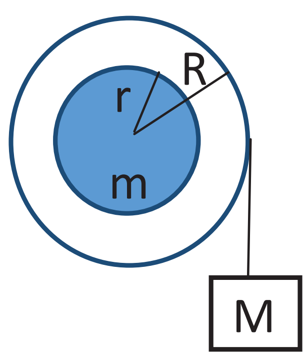
másrészt

$$\omega = \beta t. \tag{1.8.4}$$

A kérdéses fordulatszám eléréséhez szükséges idő

$$t = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = 0,565\,\mathrm{s}. \tag{1.8.5}$$

1.9. Feladat: Egy $r = 20$ cm "tehetetlenségi" sugarú, $m = 40$ kg tömegű kerék sugara $R = 30$ cm. Az R sugárhoz tartozó keréktömeget hanyagoljuk el.) Függőlegesen helyeztük egy vízszintes tengelyre. Egy $M = 2.0$ kg tömegű testet erősítettünk a szélére tekert kötélre a 3. ábrának megfelelően. Határozza meg a kerék elengedés utáni kezdeti szöggyorsulását! (A kerékre: $\theta = mr^2$.)



3. ábra.

Megoldás: Jelölés: a kötelben ébredő erő K. A kerék forgómozgására felírhatjuk, hogy

$$\theta\beta = KR, \tag{1.9.1}$$

míg az m tömegű test haladó mozgására

$$Ma = Mg - K. \tag{1.9.2}$$

A tiszta gördülés feltétele, hogy

$$a = R\beta. \tag{1.9.3}$$

E három egyenletből a kiszámolt szöggyorsulás

$$\beta = \frac{MgR}{\theta + MR^2} = \frac{MgR}{mr^2 + MR^2} = 3,37\,1/\mathrm{s}^2. \tag{1.9.4}$$

1.10. Feladat: Egy lendkerék fordulatszáma 60 rad/s-ról 180 rad/s-ra növekedett a rajta történt 100 J munkavégzés következtében.
(a) Mekkora a tehetetlenségi nyomatéka?
(b) Ezt követően egy 3-szor nagyobb tehetetlenségi nyomatékú álló kereket nyomunk a lendkerékhez. Mekkora lesz a kialakuló közös fordulatszám?

Megoldás: a, A végzett munka a kinetikus energiát változtatja meg, azaz

$$W = \frac{1}{2}\theta\omega_2^2 - \frac{1}{2}\theta\omega_1^2, \tag{1.10.1}$$

ahol ω_1 a kezdeti, ω_2 a végső szögsebesség, θ a tehetetlenségi nyomaték. Innen a tehetetlenségi nyomaték

$$\theta = \frac{2W}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = 0,00694\,\mathrm{kgm}^2. \tag{1.10.2}$$

b, Az impulzusmomentum megmaradása miatt

$$\theta\omega_2 = (\theta + 3\theta)\omega', \tag{1.10.3}$$

amelyből

$$\omega' = \frac{1}{4}\omega_2 = 45\,\mathrm{rad/s}. \tag{1.10.4}$$

1.11. Feladat: Egy m tömegű, $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ tehetetlensési nyomatékú kereket ω_0 szögsebességgel megforgatunk és zérus kezdősebességgel a μ súrlódási együtthatójú talajra engedjük.
(a) Mennyi idő múlva fog tisztán gördülni a kerék?
(b) Mekkora utat tesz meg eközben?

Megoldás:

(a) A kerék és a talaj között ébredő μmg súrlódási erő kezdi haladó (transzlációs) mozgásában gyorsitani a kereket, másrészt az súrlódási erő miatt ébredő forgatónyomaték fékezi forgó (rotációs) mozgásában. A kerék haladó mozgására érvényes dinamikai egyenlet

$$ma = \mu mg, \tag{1.11.1}$$

ahol a poziztív előjel a sebesség növekedését fejezi ki. Míg a forgómozgásra felírható egyenlet – a forgómozgás alapegyenlete – a

$$\theta\beta = M = -\mu mgR, \tag{1.11.2}$$

ahol a negatív előjel azt fejezi ki, hogy a súrlódási erő által létrehozott forgatónyomaték csökkenti a szögsebességet. Ezekből a kerék a gyorsulása és β szöggyorsulása

$$a = \mu g \tag{1.11.3}$$

és

$$\beta = -\frac{\mu mgR}{\theta}. \tag{1.11.4}$$

A $v(t)$ sebesség és az $\omega(t)$ szögsebesség egyszerűen

$$v(t) = \mu gt \tag{1.11.5}$$

és

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{\mu mgR}{\theta}t. \tag{1.11.6}$$

A tiszta gördülés feltétele, hogy az

$$v(t) = R\omega(t) \tag{1.11.7}$$

feltétel teljesüljön, azaz

$$\mu gt = R\left(\omega_0 - \frac{\mu mgR}{\theta}t\right). \tag{1.11.8}$$

A θ behelyettesítésével a kérdezett eltelt idő

$$t = \frac{R\omega_0}{3\mu g}. \tag{1.11.9}$$

(b) Az eközben megtett út

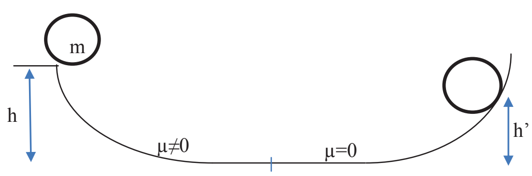
$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\mu g \frac{R^2\omega_0^2}{9\mu^2 g^2} = \frac{1}{18}\frac{R^2\omega_0^2}{\mu g}. \tag{1.11.10}$$

1.12. Feladat: **Órai kidolgozásra 2. feladat** A 4. ábrán látható módon az m tömegű $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ tehetetlenségi nyomatékú korongot egy lejtőn h magasságban elengedünk. A lejtő tapadási súrlódási együtthatója $\mu \neq 0$, ezért a korong itt tisztán gördül. A pálya második fele viszont súrlódásmentes.

(a) Mekkora sebessége és szögsebessége van a korongnak a lejtő alján?

(b) Milyen h' magasra megy fel a súrlódásmentes emelkedőn a korong?

(c) Mennyi a lejtő tetején a korong impulzus momentuma?



4. ábra.

Megoldás:

(a) A korong a lejtőn tisztán gördül, ezért sebesség és szögsebesség között fenn áll a $v = R\omega$. A mechnikai energia megmaradás tétele miatt:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{1.12.1}$$

A két összefüggés segítségével kifejezhető a sebesség

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} \tag{1.12.2}$$

és

$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh}. \tag{1.12.3}$$

(b) A lejtő jobb oldala súrlódásmentes, ami azt jelenti, hogy a test a lejtőn felszalad h' és ott egyhelyben forog ω szögsebességgel. Azaz transzlációs kinetikus energiája alakul csak át helyzeti energiává:

$$mgh' = \frac{1}{2}mv^2. \tag{1.12.4}$$

Innen az emelkedés magassága

$$h' = \frac{2}{3}h. \tag{1.12.5}$$

(c) A lejtő tetején forgó korong az impulzusmomentuma:

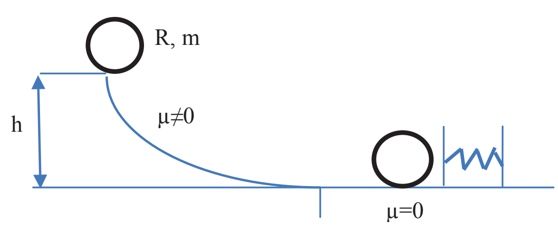
$$N = \theta\omega = \frac{1}{2}mR^2\frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh} = mR\sqrt{\frac{gh}{3}}. \tag{1.12.6}$$

1.13. Feladat: Egy $R = 10$ cm sugarú, $m = 1$ kg tömegű tömör korong ($\theta = \frac{1}{2}mR^2$) tisztán legördül egy $h = 0,3$ m magasságú lejtős pályán. A lejtő alján nekiütközik a 5. ábrán látható fékezőrugónak, amelynek ütközője és a pálya ezen szakasza súrlódásmentes. A $k = 400$ N/m rugóállandójú rugó nyugalmi hossza $l_0 = 20$ cm.

(a) Mekkora a korong sebessége és szögsebessége a lejtő alján?

(b) Mekkora a korong impulzusmomentuma a rugó összenyomódása után?

(c) Mennyivel nyomódott össze a rugó?



5. ábra.

Megoldás:
(a) A korong a lejtőn tisztán gördül, ezért sebesség és szögsebesség között fenn áll a $v = R\omega$. A mechnikai energia megmaradás tétele miatt:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{1.13.1}$$

A két összefüggés segítségével kifejezhető a sebesség

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = 2\text{m/s} \tag{1.13.2}$$

és

$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh} = 20\,\mathrm{rad/s}. \tag{1.13.3}$$

(b) A lejtő jobb oldala súrlódásmentes, ami azt jelenti, hogy a test a rugót összenyomja és ott egyhelyben forog ω szögsebességgel:

$$N = \theta\omega = \frac{1}{2}mR^2\frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh} = mR\sqrt{\frac{gh}{3}} = 0,1\,\mathrm{kg\ m^2/s}. \tag{1.13.4}$$

(c) A fentiek szerint a transzlációs kinetikus energiája alakul csak át rugalmas energiává:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(l_0 - l)^2. \tag{1.13.5}$$

Innen az összenyomódás mértéke:

$$\Delta = l_0 - l = \sqrt{\frac{mv^2}{k}} = 0,1\,\mathrm{m}. \tag{1.13.6}$$

1.14. Feladat: Egy R sugarú, m tömegű homogén tömegeloszlású nem forgó kereket tengelyre merőlegesen v_0 sebességgel meglökünk és a μ súrlódási együtthatójú talajra engedjük. A kerék tehetetlenségi nyomatéka $\theta = \frac{1}{2}mR^2$.
(a) Mennyi idő múlva fog tisztán gördülni a kerék?
(b) Mekkora utat tesz meg eközben?

Megoldás:
(a) A kereket a talajra engedve a v_0 sebességgel ellentétes $F_s = -\mu mg$ súrlódási erő hat, amely egyrészt csökkenti a sebességet, másrészt a kerék középpontjára forgatónyomatékot ad, amely a kereket forgásba hozza. A transzlációra vonatkozó mozgásegyenlet

$$ma = F_s = -\mu mg, \tag{1.14.1}$$

amelyből a gyorsulás

$$a = -\mu g. \tag{1.14.2}$$

Így a kerék sebessége a

$$v(t) = v_0 - \mu gt \tag{1.14.3}$$

függvény szerint változik. A forgómozgásra a forgómozgás alapegyenlete írható fel, amely – figyelembe véve a forgatónyomaték előjelét –

$$\theta\beta = \mu mgR. \tag{1.14.4}$$

A tehetetlenségi nyomaték behelyettesítésével, valamint az egyenlet rendezésével a szöggyorsulás

$$\beta = \frac{2\mu g}{R}. \tag{1.14.5}$$

A kerék szögsebessége az

$$\omega(t) = \frac{2\mu g}{R} t \tag{1.14.6}$$

függvény szerint változik. A tiszta gördülés feltétele, hogy a

$$v(t) = R\omega(t) \tag{1.14.7}$$

összefüggés teljesüljön, azaz a

$$v_0 - \mu g t = R \frac{2\mu g}{R} t \tag{1.14.8}$$

fennálljon. Ebből a tiszta gördülésig eltelt időt kifejezve kapjuk, hogy

$$t = \frac{v_0}{3\mu g}. \tag{1.14.9}$$

(b) A megtett út az

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \tag{1.14.10}$$

négyzetes úttörvénybe helyettesítve

$$s = \frac{5}{18} \frac{v_0^2}{\mu g} \tag{1.14.11}$$

1.15. Feladat: ** A m tömegű R sugarú homogén korongot forgástengelye körül ω_0 szögsebességgel megforgatunk, majd lapjával – a tengely merőleges a felületre – a sík asztalra helyezzük. A korong és asztal között μ súrlódási tényező van. Feltételezve, hogy korong egyenletesen nyomja az asztalt, mennyi idő múlva áll meg a korong? (A korong tehetetlenségi nyomatéka $\theta = \frac{1}{2} m R^2$.)

Megoldás: A feladat megoldásának kulcsa az eredő forgatónyomaték kiszámolása. Vezessük be a felületi tömegsűrűséget, amely

$$\eta = \frac{m}{R^2 \pi}. \tag{1.15.1}$$

A korongból tekintsünk egy r sugarú dr szélességű körgyűrűt. Ennek tömege

$$dm = \eta 2 r \pi dr. \tag{1.15.2}$$

A körgyűrű érintője mentén ébredő dF_s súrlódási erő

$$dF_s = \mu\, dm\, g, \tag{1.15.3}$$

amely erő a körgyűrű középpontjára vonatkoztatva

$$dM = \mu\, dm\, gr = 2\pi\mu\eta g r^2 dr \tag{1.15.4}$$

forgatónyomatékot hoz létre. A korongra ható teljes forgatónyomaték

$$M = \int_0^R 2\pi\mu\eta g r^2 dr = \frac{2\pi}{3}\mu\eta g R^3 = \frac{2}{3}\mu m g R. \tag{1.15.5}$$

Felírva a forgómozgás alapegyenletét

$$\theta\beta = M = \frac{2}{3}\mu m g R \tag{1.15.6}$$

a szögsebesség kiszámolható:

$$\beta = \frac{4}{3}\frac{\mu g}{R}. \tag{1.15.7}$$

A megállásig eltelt idő

$$t = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{3}{4}\frac{\omega_0 R}{\mu g}. \tag{1.15.8}$$

Impulzusmomentum megmaradása

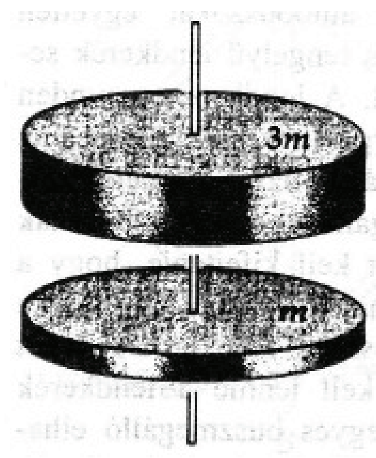
1.16. Feladat: Órai kidolgozásra 3. feladat (HN 12B-28) A 6. ábrán látható két tömör tárcsa sugara R, egyik tömeg m, a másiké $3m$. A bemutatott módon súrlódásmentes csapágyazással közös tengelyre vannak szerelve. A felső tárcsának ω_0 kezdő szögsebességet adunk, majd nagyon kis magasságból ráejtjük a kezdetben nyugalomban lévő alsó tárcsára. A tárcsák – a közöttük fellépő súrlódás hatására – végül közös ω szögsebességgel együtt forognak.
(a) A megadott mennyiségekkel fejezzük ki a végső ω szögsebességet, és
(b) a tárcsák egymáson való súrlódása közben végzett munkát!
(c) Mi lenne az egyenesvonalú analogonja ennek a forgási "ütközésnek"?

Megoldás:
(a) Külső forgatónyomatékok hiányában az impulzusmomentum megmaradás tételét alkalmazhatjuk. Kezdetben a $3m$ tömegű test forog ω_0 szögsebességgel. Az impulzusmomentum

$$N_1 = \theta_{3m}\omega_0 = \frac{1}{2}3mR^2\omega_0, \tag{1.16.1}$$

ahol θ_{3m} a $3m$ tömegű test tehetetlenségi nyomatéka. Az összetapadás után együtt forog a két test, az együttes impulzusmomentum

$$N_2 = (\theta_m + \theta_{3m})\omega = (\frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{2}3mR^2)\omega, \tag{1.16.2}$$



6. ábra.

ahol θ_m az m tömegű test tehetetlenségi nyomatéka. Mivel $N_1 = N_2$, így

$$\frac{1}{2}3mR^2\omega_0 = (\frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{2}3mR^2)\omega, \tag{1.16.3}$$

amelyből

$$\omega = \frac{3}{4}\omega_0. \tag{1.16.4}$$

(b) A kezdeti kinetikus energia

$$E_1 = \frac{1}{2}\theta_{3m}\omega_0^2 = \frac{1}{4}3mR^2\omega_0^2 = \frac{3}{4}mR^2\omega_0^2, \tag{1.16.5}$$

míg az összetapadás után

$$E_2 = \frac{1}{2}(\theta_m + \theta_{3m})\omega^2 = \frac{1}{4}4mR^2\omega^2 = \frac{9}{16}mR^2\omega_0^2. \tag{1.16.6}$$

A két energia különbsége, amennyi belső energia formájában jelenik meg:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{3}{4}mR^2\omega_0^2 - \frac{9}{16}mR^2\omega_0^2 = \frac{3}{16}mR^2\omega_0^2. \tag{1.16.7}$$

(c) Az egyenesvonalú analogon: a $3m$ tömegű v_0 sebességű test ütközése a nyugvó m tömegű testtel. Ekkor a közös sebesség:

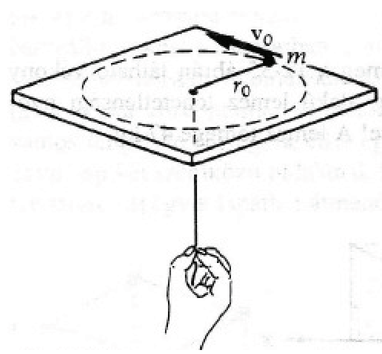
$$v = \frac{3}{4}v_0. \tag{1.16.8}$$

1.17. Feladat: (HN 12C-50) A 7. ábra egy r_0 sugarú körpályán v_0 sebességgel vízszintes súrlódásmentes felületen mozgó m tömegű testet mutat. A testre rögzített és kicsiny lyukon átvezetett fonál biztosítja a centripetális erőt. Most a fonalat lassan húzzuk úgy, hogy a test az $r_0/2$ sugarú körpályára kerüljön. Számítsuk ki az m, az r_0 és v_0 függvényében

(a) a test végső sebességét és

(b) a fonál új helyzetve húzása során végzett munkát!

(c) Mutassuk meg, hogy a végzett munka egyenlő a test kinetikus energiájának megváltozásával!



7. ábra.

Megoldás:

(a) Mivel jelen esetben a mozgás során mindvégig a kötélerő sugárirányú, azaz centrális, így az impulzusmomentum megmaradásának tétele alkamazható

$$mv_0r_0 = mv\frac{r_0}{2}. \tag{1.17.1}$$

Ebből a test végső sebessége

$$v = 2v_0. \tag{1.17.2}$$

(b) A munka kiszámolásához először a K kötélerőt egy közbenső r sugarú pályára kell megadni. Ehhez egyrészt újra alkalmazni kell az impulzusmomentum megmaradásának tételét

$$mv_0r_0 = mvr, \tag{1.17.3}$$

másrészt fel kell írni a körpályán való mozgásra a

$$K = m\frac{v^2}{r} \tag{1.17.4}$$

mozgásegyenletet. E kettőből az origó felé mutató K kötélerő

$$K = m\frac{v_0^2r_0^2}{r^3}. \tag{1.17.5}$$

A végzett munka – figyelembe véve az erő és a radiális egységvektor ellentétes irányát –

$$W = -\int_{r_0}^{r_0/2} m\frac{v_0^2 r_0^2}{r^3}\mathrm{d}r = \frac{1}{2}mv_0^2 r_0^2\left[\frac{1}{r^2}\right]_{r_0}^{r_0/2} = \frac{3}{2}mv_0^2. \tag{1.17.6}$$

(c) A kinetikus energia megváltozása

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}m(2v_0)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{3}{2}mv_0^2 = W, \tag{1.17.7}$$

ahogy annak lennie is kell.

1.18. Feladat: Órai kidolgozásra 4. feladat Az L hosszúságú m tömegű rúd függőlegesen áll, az alsó pontja súrlódásmentes csapággyal csatlakozik a talajhoz. Az egyensúlyi helyzetből kimozdul és a talajba csapódik. Mekkora a rúd szögsebessége a becsapódás pillanatában? A rúd tehetetlenségi nyomatéka a rúd végére vonatkoztatva $\theta = \frac{1}{3}mL^2$.

Megoldás: A talajszintet választva a potenciális energia zérus pontjának a rúd – a rúd tömegközéppontjának – potenciális energiája álló helyzetben

$$E_{p1} = mg\frac{L}{2}, \tag{1.18.1}$$

míg a fekvő helyzetben

$$E_{p2} = 0. \tag{1.18.2}$$

A kezdeti kinetikus energia

$$E_{k1} = 0, \tag{1.18.3}$$

míg a végső kinetikus energia a forgásból származó

$$E_{k2} = \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{1.18.4}$$

A mechanikai energiamegmaradás tételét alkalmazva ($E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$) kapjuk, hogy

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{1.18.5}$$

A tehetetlenségi nyomaték behelyettesítése és az egyenlet rendezése után a szögsebességre

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} \tag{1.18.6}$$

adódik.

1.19. Feladat: * Az L szárhosszúságú, száranként m tömegű létra egyik lába a falnál áll, míg a másik lába súrlódásmentesen csúszhat a vízszintes talajon. A kezdetben 2α szögre szétnyitott létra szára csúszik, és a létra teljesen szétnyílva a talajba csapódik. Mekkora a létra szárainak szögsebessége a becsapódás pillanatában? (A rúg végpontjára vett tehetetlenségi nyomatéka $\frac{1}{3}mL^2$.)

Megoldás: A létra a becsapódás pillanatában csak forgómozgást végez. Ez belátható, ha végiggondoljuk a következőt. Ha a létra csúcsa – a két szár találkozási pontja – v_x sebességgel halad, akkor csúszó talppont sebessége $2v_x$. A csúcspont a becsapódás pillanatában csak függőleges mozgást végez ($v_x = 0$), így a csúszó talppont sebessége ugyancsak zérus. Azaz a létra egyetlen pontja sem végez haladó mozgást. A kezdeti helyzeti energia alakul át forgási energiává:

$$2mg\frac{L}{2}\cos\alpha = 2\frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{1.19.1}$$

Egyszerűsítés és átrendezés után mindkét rúd szögsebessége

$$\omega\sqrt{\frac{3g}{L}}. \tag{1.19.2}$$

1.20. Feladat: * A h magasságú toronyugró a palló szélén áll és összegörnyedés nélkül – merev rúdként – a vízbe fordul. (A lába a pallón nem csúszik meg a dőlés során.) Mekkora szögnél válik el a pallótól?

Megoldás: Jelölje α azt a függőlegessel bezárt szöget, amelynél éppen elvélik a pallótól a toronyugró lába. Első lépésként számítsuk ki mekkora ebben a pillanatban a szögsebessége. A palló szintjét tekintve a potenciális energia zérus pontjának a kezdeti helyzeti energia

$$E_{p1} = mg\frac{L}{2}, \tag{1.20.1}$$

míg a dőlt helyzetben

$$E_{p2} = mg\frac{L}{2}\cos\alpha. \tag{1.20.2}$$

A kezdeti kinetikus energia

$$E_{k1} = 0, \tag{1.20.3}$$

míg az elválás pillanatához tartozó forgásból származó kinetikus energia

$$E_{k2} = \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{1.20.4}$$

A mechanikai energiamegmaradás tételét alkalmazva ($E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$) kapjuk, hogy

$$mg\frac{L}{2} = mg\frac{L}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{1.20.5}$$

A tehetetlenségi nyomaték behelyettesítése és az egyenlet rendezése után a szögsebességre azt kapjuk, hogy

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(1-\cos\alpha)}. \tag{1.20.6}$$

A rúd tömegközéppontjának sebessége

$$v = \frac{L}{2}\omega = \sqrt{\frac{3}{4}gL(1-\cos\alpha)}. \tag{1.20.7}$$

Az elválás pillanatában – egyetlen erőként – az mg súlyerő rúdirányú (radiális) komponense hat és tartja körpályán a rúd tömegközéppontját, azaz

$$m\frac{v^2}{(\frac{L}{2})} = mg\cos\alpha. \tag{1.20.8}$$

A sebesség behelyettesítése és az egyszerűsítések után

$$\cos\alpha = \frac{3}{7} \tag{1.20.9}$$

adódik, amelyből az elválás pillanatához tartozó szög $\alpha = 64,62^0$.

2. Feladatok a rezgőmozgás és a mechanikai hullámok tárgyköréből

Harmonikus rezgőmozgás

2.1. Feladat: (HN 15A-1) 20 g tömegű részecske harmonikus rezgőmozgást végez 3 rezgés/másodperc frekvenciával és 5 cm amplitúdóval.

(a) Mekkora teljes távolságot fut be a részecske egy teljes periódus folyamán?

(b) Mekkora a legnagyobb sebessége? Hol lép ez fel?

(c) Határozzuk meg a részecske legnagyobb gyorsulását! Hol lép fel a mozgás során a legnagyobb gyorsulás?

Megoldás: Jelölések: $m = 20$ g = 0,02 kg, $f = 3$ 1/s és $A = 5$ cm = 0,05 m. A rezgés körfrekvenciája $\omega = 2\pi f = 18,85$ 1/s.

(a) Egy teljes periódus alatt 4-szer futja be az amplitúdónyi kitérést, így a megtett út

$$s = 4A = 20\,\text{cm} = 0,2\,\text{m}. \tag{2.1.1}$$

(b) A sebesség maximális értéke

$$v_{max} = A\omega = 0,94\,\text{m/s}. \tag{2.1.2}$$

Ezt az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor éri el a részecske.
(c) A gyorsulás maximális értéke

$$a_{max} = A\omega^2 = 17,77\,\text{m/s}^2. \tag{2.1.3}$$

Ezt a maximális kitérésű helyeken való áthaladáskor éri el a részecske.

2.2. Feladat: Pontszerűnek tekinthető 1 kg tömegű testre $F = -Dx$ alakú rugalmas erő hat. A rugóállandó $D = 0,25$ N/cm. A $t = 0$ pillanatban a kitérés 20 cm, a sebesség 2,83 m/s. Mekkora a rezgés amplitúdója?

Megoldás: Jelölések: $m = 1$ kg, a $t = 0$ pillanathoz tartozó kitérés és sebesség értékek $y_0 = 20$ cm és $v_0 = 2,83$ m/s.
A rezgés körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 5\,1/\text{s}. \tag{2.2.1}$$

A rezgés kitérése és sebessége

$$y(t) = A\sin(\omega t + \varphi), \tag{2.2.2}$$

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi), \tag{2.2.3}$$

ahol A az amplitrúdó és φ a kezdőfázis. A $t = 0$ pillanatra

$$y_0 = A\sin\varphi, \tag{2.2.4}$$

$$v_0 = A\omega\cos\varphi. \tag{2.2.5}$$

E két egyenletből behelyettesítés után az amplitúdó

$$A = \frac{\sqrt{y_0^2\omega^2 + v_0^2}}{\omega} = 0,6\,\text{m}. \tag{2.2.6}$$

2.3. Feladat: A 4 N/m rugóállandójú rugóra egy 0,8 kg tömegű testet függesztünk. Nyugalmi helyzetéből 12 cm-t kitérítjük és itt 0,4 m/s kezdősebességgel indítva harmonikus rezgőmozgásba hozzuk. Mézbe merítve megáll a test. Mekkora a súrlódás által disszipált mechanikai energia?

Megoldás: Jelölések: $k = 4$ N/m, $m = 0,8$ kg, $x = 12$ cm = 0,12 m és $v = 0,4$ m/s.
A mozgás kezdetén a teljes mechanika energia a rugalmas energiából és a mozgási energiából áll

$$E_{mech} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = 0,0928\,\mathrm{J}. \tag{2.3.1}$$

Mivel a text megáll és a kitérése zérus lesz, így éppen ennyi a súrlódás következtében disszipált ("szétszórt") mechanikai energia.

2.4. Feladat: Mutassa meg, hogy a $F = -kx$ rugalmas erejű rugóra akasztott m tömegű test g homogén nehézségi erőtérben harmonikus rezgőmozgást végez!

Megoldás: Fordítsuk lefelé az y tengely irányítását. Tegyük a rugó végére a testet és engedjük megnyúlni y hosszal, amíg el nem éri az egyensúlyi (gyorsulásmentes) helyzetét. Ekkor érvényes, hogy

$$0 = mg - ky. \tag{2.4.1}$$

Ezt követően húzzuk lejjebb további x távolsággal, aminek következtében, ha elengedjük, a test gyorsulni fog. Az erre a helyzetre felírható mozgásegyenlet

$$ma = mg - k(x + y). \tag{2.4.2}$$

Figyelembe az ezt megelőző egyenletet végül az

$$ma = -kx \tag{2.4.3}$$

egyenletre jutunk, amely éppen a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. *Megjegyzés:* A megoldásból az is kiolvasható, hogy egyrészt a rezgés az egyensúlyi helyzet körül jön létre, másrészt a homogén nehézségi erőtér jelenléte ellenére a mozgás harmonikus.

2.5. Feladat: Egy harmonikus rezgőmozgást végző test legnagyobb gyorsulása 8π m/s^2, legnagyobb sebessége 1,6 m/s.
(a) Határozza meg a rezgésidőt és az amplitúdót!
(b) Mennyi a rezgés összenergiája?

Megoldás:
(a) A maximális gyorsulás illetve sebesség

$$a_{max} = A\omega^2 \tag{2.5.1}$$

illetve

$$v_{max} = A\omega, \tag{2.5.2}$$

ahol A az amplitúdó, ω a körfrekvencia. E két egyenletből

$$\omega = \frac{a_{max}}{v_{max}} = \frac{8\pi}{1,6} = 15,7\,\mathrm{rad/s} \tag{2.5.3}$$

és

$$A = \frac{v_{max}^2}{a_{max}} = \frac{2,56}{8\pi} \sim 0,1\,\mathrm{m}. \tag{2.5.4}$$

A rezgésidő

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \sim 0,4\,\mathrm{s}. \tag{2.5.5}$$

(b) Jelölje m a tömeget kg-ban. A rezgés teljes energiája

$$E = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = 1,28 m\,\mathrm{J}. \tag{2.5.6}$$

Megjegyzés: Látható, hogy a kinematikai adatok önmagukban nem elegek a dinamikai mennyiségek meghatározásához!

2.6. Feladat: Órai kidolgozásra 5. feladat Két, azonos amplitúdójú rezgés, melyek frekvenciája $\nu_1 = 40$ Hz és $\nu_2 = 60$ Hz, egyszerre kezdi meg rezgését az egyensúlyi helyzetből. Mikor lesz legelőször ismét azonos a kitérésük?

Megoldás: A rezgések kitérését az $y(t) = A\sin 2\pi\nu_1 t$ illetve $y(t) = A\sin 2\pi\nu_2 t$ alakba írjuk fel. Az első találkozási idő a kettő egyenlőségéből számolható

$$A\sin 2\pi\nu_1 t = A\sin 2\pi\nu_2 t. \tag{2.6.1}$$

Az egyenletet átrendezve és a szögek szinusza különbségére vonatkozó összefüggést alkalmazva

$$0 = \sin 2\pi\nu_2 t - A\sin 2\pi\nu_1 t = 2\cos\frac{2\pi\nu_2 + 2\pi\nu_1}{2}t\,\sin\frac{2\pi\nu_2 - 2\pi\nu_1}{2}t \tag{2.6.2}$$

írható. Leghamarabb akkor teljesül az egyenlőség, ha

$$\cos\frac{2\pi\nu_2 + 2\pi\nu_1}{2}t = 0, \tag{2.6.3}$$

azaz

$$\frac{2\pi\nu_2 + 2\pi\nu_1}{2}t = \frac{\pi}{2}. \tag{2.6.4}$$

Innen az első találkozás időpontja

$$t = \frac{1}{2(\nu_2 + \nu_1)} = 0,005\mathrm{s}. \tag{2.6.5}$$

2.7. Feladat: (HN 15A-19) Határozzuk meg a 2,3 m hosszú fonálinga

(a) frekvenciáját és

(b) lengésidejét a Hold felszínén, ahol a gravitációtól származó nehézségi gyorsulás 1,67 m/s^2.

Megoldás:

(a) A kitérített inga pályagörbéje kör. A g nehézségi gyorsulású erőtérben α szöggel kitérített l hosszúságú fonálingán az m tömegű testet a testre ható gravitációs erőnek a pályagörbe érintője irányába eső erőkomponense fogja az egyensúlyi irányba mozgatni. A mozgásegyenlet

$$ma_t = -mg\sin\alpha, \tag{2.7.1}$$

ahol a tangenciális (érintő irányú) gyorsulás, a negatív előjel pedig arra utal, hogy a növekvő szögekkel ellentétes irányú az erőkomponens. A tangenciális gyorsulás

$$a_t = l\beta = l\ddot{\alpha}, \tag{2.7.2}$$

ahol $\beta = \ddot{\alpha}$ a szöggyorsulás. Így az

$$l\ddot{\alpha} = -g\sin\alpha, \tag{2.7.3}$$

differenciál egyenlet kapható. Ez az egyenlet kis szögekre – ha $\alpha << 5^0$, akkor $\sin\alpha \sim \alpha$ – a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenletébe megy át, azaz

$$l\ddot{\alpha} = -g\alpha. \tag{2.7.4}$$

Innen az inga körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{2.7.5}$$

A frekvencia

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = 0,135\,1/\mathrm{s}. \tag{2.7.6}$$

(b) A periódusidő

$$T = \frac{1}{f} = 7,4\,\mathrm{s}. \tag{2.7.7}$$

2.8. Feladat: A földi Egyenlítőn egy zárt épületben egy fonálinga segítségével hogyan állapíthatnánk meg, hogy a Hold felettünk vagy a Föld túlsó oldalán van?

Megoldás: Ha a Hold a Föld túlsó oldalán van, akkor a Holdtól származó vonzó kölcsönhatás hozzáadódva a Földéhez a g nehézségi gyorsulásnál nagyobb g' értékkel kell számolni. Így a kialakuló rezgés ω' körfrekvenciája nagyobb mint az az ω, amely csak a Föld hatását veszi figyelembe:

$$\omega' = \sqrt{\frac{g'}{l}} > \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{2.8.1}$$

Ennek megfelelően a periódusidőkre az áll fenn, hogy $T' < T$.

2.9. Feladat: (HN 15A-20) Egy világítótorony látogatója meg akarja mérni a torony magasságát. Van nála egy orsó cérna, erre kis kavicsot köt, és a torony spirál-lépcsőházának közepén – mint fonálingát – lelógatja. A lengésidő 9,4 s. Milyen magas a torony?

Megoldás: A fonálinga ω körfrekvenciája az l fonálhosszal és a g nehézségi gyorsulással

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{2.9.1}$$

A T periódusidő

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{2.9.2}$$

Innen az inga hossza, ami most a torony h magassága is egyben

$$h = l = \frac{T^2}{4\pi^2}g = 22,38\,\mathrm{m}. \tag{2.9.3}$$

2.10. Feladat: **Órai kidolgozásra 6. feladat** (HN 15B-26) Vékony, 20 cm sugarú karikát vízszintesen álló késélre helyezünk a 8. ábra szerint úgy, hogy fizikai ingaként a karika síkjában leng.

(a) Határozzuk meg kis amplitúdójú lengéseinek periódusidejét.

(b) Mekkora annak a fonálingának a hossza, amelynek azonos a lengésideje?

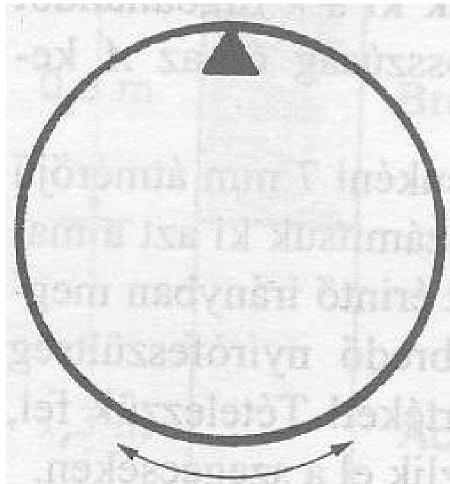
Megoldás: Jelölés: $R = 20$ cm $= 0{,}2$ m; m a karika tömege, $\theta_0 = mR^2$ a szimmetria tengelyére vett tehetetlenségi nyomatéka; φ a kitérés szöge a függőlegeshez viszonyítva.

(a) A kés élén felfüggesztett inga karja – felfüggesztés és tömegközéppont távolsága – az R sugár, a felfüggesztésre vett θ tehetetlenségi nyomaték a Steiner-tétel szerint

$$\theta = \theta_0 + mR^2 = 2mR^2. \tag{2.10.1}$$

Kitérítve φ szöggel a karikát

$$M = -mgR\sin\varphi \tag{2.10.2}$$



8. ábra.

forgatónyomaték fog hatni. A negatív előjel éppen arra utal, hogy a nyomaték az egyensúlyi helyzet felé mozgat. A forgómozgás alapegyenlete szerint

$$\theta\beta = M = -mgR\sin\varphi, \tag{2.10.3}$$

ahol β a szöggyorsulás. Mivel $\beta = \ddot{\varphi}$, így

$$\theta\ddot{\varphi} = -mgR\sin\varphi, \tag{2.10.4}$$

amely "majdnem" a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. Ha kis szögkitérésekre szorítkozunk, akkor alkalmazhatjuk a $\sin\varphi \sim \varphi$ közelítést, így a

$$\theta\ddot{\varphi} = -mgR\varphi \tag{2.10.5}$$

egyenlet harmonikus rezgomozgást ír le. Az ω körfrekvencia közvetlenül leolvasható:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{\theta}} = \sqrt{\frac{g}{2R}}. \tag{2.10.6}$$

A periódusidő

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}. \tag{2.10.7}$$

(b) A fonálinga (matematikai inga) lengésideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{2.10.8}$$

ahonnan a kérdéses fonál hossz

$$l = 2R. \tag{2.10.9}$$

2.11. Feladat: (HN 15C-37) Egy meg nem feszített l hosszúságú, k rugóállandójú homogén rugót úgy vágunk két részre, hogy az egyik darab kétszer akkora, mint a másik.
(a) Fejezzük ki rugódarabok k_1 és k_2 rugóállandóját!
(b) Ha mindkét darab egyik végére azonos tömegű testet akasztanánk, mi lenne a frekvenciák aránya?

Megoldás:
(a) Elég csak gondolatban szétválasztani az l hosszúságú rugót egy l_1 és l_2 hosszúságú darabra, ahol legyen $l_1 = 2l_2$. Ha a rugót F erővel húzzuk, akkor jelölje a megnyúlást Δx, azaz

$$F = k\Delta x. \tag{2.11.1}$$

Az l_1 és l_2 szakaszok megnyúlása Δx_1 és Δx_2

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2, \tag{2.11.2}$$

amelyekre, mivel az F erő a rugó teljes hosszában hat – fennáll, hogy

$$F = k_1\Delta x_1 \tag{2.11.3}$$

és

$$F = k_2\Delta x_2. \tag{2.11.4}$$

A Δx_1 és Δx_2 megnyúlások arányosak az l_1 és l_2 szakaszok hosszaival, így

$$\Delta x_1 = 2\Delta x_2. \tag{2.11.5}$$

A fenti egyenletekből

$$k_1 = 1,5k, \tag{2.11.6}$$

míg

$$k_2 = 3k. \tag{2.11.7}$$

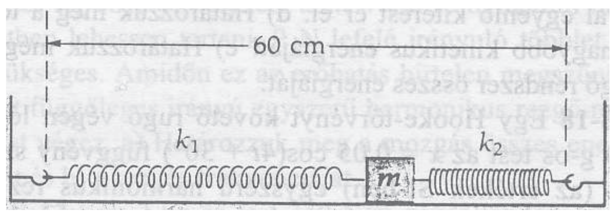
(b) A frekvenciák aránya

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{\frac{k_1}{m}}}{\sqrt{\frac{k_2}{m}}} = \sqrt{\frac{1}{2}}. \tag{2.11.8}$$

2.12. Feladat: (HN 15C-38) Két rugó mindegyike feszítetlen állapotban $l_0 = 20$ cm hosszú, de rugóállandóik különbözőek: $k_1 = 40$ N/m és $k_2 = 80$ N/m. A rugókat vízszintes súrlódásmentes felületen nyugvó $m = 0,60$ kg tömegű kicsiny testhez rögzítik. A rugókat ellentétes irányban megfeszítik és egymástól $L = 60$ cm távolságban lévő kampókhoz rögzítik a 9. ábra szerint. Feltéve, hogy a test mérete elhanyagolható.

(a) A balodali kampótól milyen távol lesz a test egyensúlyi helyzete?

(b) Mekkora a test rugóirányú harmonikus rezgőmozgásának a körfrekvenciája?



9. ábra.

Megoldás:

(a) Jelölje az egyes rugók megnyúlását x_1 illetve x_2. A teljes megnyúlás

$$D = L - 2l_0 = x_1 + x_2. \tag{2.12.1}$$

Az egyensúlyi helyzetben a rugókban ugyanakkora nagyságú erő ébred, azaz

$$k_1 x_1 = k_2 x_2. \tag{2.12.2}$$

A test baloldali faltól való távolságának meghatározásához az x_1 kiszámolására van szükség

$$x_1 = \frac{Dk_2}{k_1 + k_2} = 12\,\mathrm{cm}. \tag{2.12.3}$$

Tehát a test egyensúlyi helyzete a faltól

$$l_0 + x_1 = 32\,\mathrm{cm} \tag{2.12.4}$$

távolságra van.

(b) Mozdítsuk ki a testet az egyensúlyi helyzetéből a pozitív irányba x-szel és írjuk fel a mozgásegyenletet a ható erőkkel – figyelembe véve az irányokat és azt, hogy a megnyúlások megváltoztak –

$$ma = -k_1(x_1 + x) + k_2(x_2 - x). \tag{2.12.5}$$

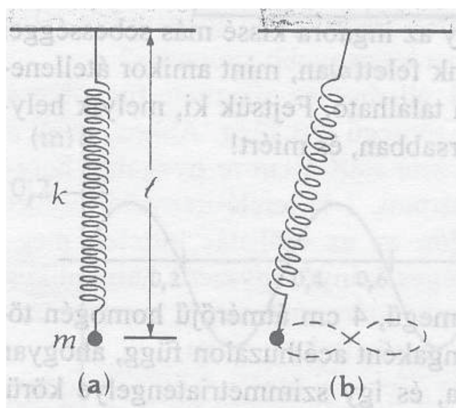
Alkalmazva a (2.12.2) egyenletbeli összefüggést az

$$ma = -(k_1 + k_2)x \tag{2.12.6}$$

egyenletre jutunk, amely a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. Innen a rezgés körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}. \tag{2.12.7}$$

2.13. Feladat: (HN 15C-39) Egy k rugóállandójú rugó végére akasztott m tömegű test a rugót (nyugalmi állapotban) l hosszúságúra nyújtja a 10.a ábra szerint. A testet most mozgásba hozzuk úgy, hogy fel-le rezeg és ingaként ide-oda leng. A test a 10.b ábra szerint a függőleges síkban mozogva "nyolcasokat" ír le. Fejezzük ki a k rugóállandót az m, l és g függvényében!



10. ábra.

Megoldás: A mozgás egy rezgésre és egy ingalengésre bontható. A rezgés ω_r körfrekvenciája

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{2.13.1}$$

az ingamozgás ω_i körfrekvenciája

$$\omega_i = \sqrt{\frac{g}{l}}, \tag{2.13.2}$$

alakban írható fel. A "8"-as leírása során egy ingalengéshez két rezgés tartozik, tehát

$$\omega_r = 2\omega_i, \tag{2.13.3}$$

vagyis

$$\frac{k}{m} = 4\frac{g}{l}. \tag{2.13.4}$$

Innen a rugóállandó

$$k = 4\frac{mg}{l}. \tag{2.13.5}$$

Csillapodó és gerjesztett rezgések

2.14. Feladat: Órai kidolgozásra 7. feladat (HN 15B-28) Egy 2 kg tömegű testet 200 N/m rugóállandójú rugóra függesztünk. Súrlódás miatt a test csillapított harmonikus mozgást végez. A rezgés amplitúdója a t = 0 s időpillanatban 0,20 m, majd ezt követően 6 másodperc múlva 0,16 m-re csökken.
(a) Határozzuk meg a súrlódási erőtől származó csillapítási együtthatót.
(b) Határozzuk meg a rendszer rezonanciafrekvenciáját.

Megoldás: Jelölések: $m = 2$ kg; $k = 200$ N/m; $A = 0,2$ m; $t = 6$ s és $A(t) = 0,16$ m.
(a) A csillapodó rezgés mozgásegyenlete

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 = 0, \tag{2.14.1}$$

ahol

$$\beta = \frac{c}{2m} \tag{2.14.2}$$

a keresett c csillapítási együtthatóval és

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}. \tag{2.14.3}$$

A mozgásegyenlet kezdeti feltételhez illesztett megoldása – a kitérés az idő függvényében –

$$y(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \delta). \tag{2.14.4}$$

Itt a t időpillanathoz tartozó amplitúdó

$$A(t) = Ae^{-\beta t}. \tag{2.14.5}$$

Ebből β kifejezhető és a paraméterek behelyettesítése után kiszámolható:

$$\beta = -\frac{1}{t}\ln\frac{A(t)}{A} = 0,037\,1/\text{s}. \tag{2.14.6}$$

A c csillapodási tényező a (2.14.2) összefüggésből

$$c = 2m\beta = 0,1488\,\text{kg/s}. \tag{2.14.7}$$

(b) A rendszer rezonanciafrekvenciája

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = 99,99\,1/\text{s}. \tag{2.14.8}$$

2.15. Feladat: Egy csillapítatlan rezgő rendszerben mozgó test tömege 0,5 g. A rendszert változtatható frekvenciájú gerjesztő erő hajtja, amplitúdója minden frekvencián F_0. A test 400 Hz-en 9 mm, 405 Hz-en 5 mm amplitúdóval rezeg.
(a) Határozzuk meg az oszcillátor ω_0 sajátfrekvenciáját és
(b) a rezgés amplitúdóját 395 Hz frekvencián.
(c) Állapítsuk meg a gerjesztő erő nagyságát. Megoldás:

Rugalmas közegekben terjedő hullámok

2.16. Feladat: Mindkét végén nyitott síp alapfrekvenciája 110 Hz. Milyen hosszú a síp, ha a hang terjedési sebessége 340 m/s?

Megoldás: Ha a síp minkét vége nyitott, akkor mindkét helyen duzzadóhely van. Ebből következik, hogy a hang fél hullámhossza a síp hossza, azaz

$$d = \frac{\lambda}{2}. \tag{2.16.1}$$

A hullámhossz a kifejezhető a frekvenciával és a terjedési sebességgel, amely

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 3,091\,\mathrm{m}. \tag{2.16.2}$$

Így a síp hossza

$$d = 1,55\,\mathrm{m}. \tag{2.16.3}$$

2.17. Feladat: A pozitív x tengely irányában egy transzverzális harmonikus hullám terjed 2 m/s sebességgel, amely a $t = 0$ időpillanatban az origóban van. Amplitúdója 10 cm, frekvenciája 0,5 Hz.
(a) Mennyi a körfrekvencia?
(b) Mekkora a hullámhossz?
(c) Mekkora a cirkuláris hullámszám?

Megoldás:
(a) A körfrekvencia

$$\omega = 2\pi\nu = 3,14\,1/\mathrm{s}. \tag{2.17.1}$$

(b) A hullám terjedési v sebessége, a ν frekvencia és a λ hullámhossz közötti összefüggés

$$v = \lambda\nu, \tag{2.17.2}$$

ahonnan

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = 4\,\text{m}. \tag{2.17.3}$$

(c) A cirkusláris hullámszám

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 1,57\,1/\text{m}. \tag{2.17.4}$$

2.18. Feladat: (HN 18B-8) Kifeszített huzalon haladó transzverzális hullám apmlitúdója 0,2 mm, frekvenciája 500 Hz, sebessége 196 m/s.
(a) Írjuk fel SI egységekkel a hullámfüggvényt $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ alakban.
(b) A huzal lineáris tömegsűrűsége 4,1 g/m. Mekkora a huzalt feszítő erő?

Megoldás:
(a) Az amplitúdó méterben

$$A = 2\cdot 10^{-4}\,\text{m}. \tag{2.18.1}$$

A körfrekvencia

$$\omega = 2\pi f = 3140\,1/\text{s}. \tag{2.18.2}$$

A hullámhossz

$$\lambda = v/f = 0,392\,\text{m}. \tag{2.18.3}$$

A cirkusláris hullámszám

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 16\,1/\text{m}. \tag{2.18.4}$$

Így a hullámfüggvény

$$y(x,t) = 2\cdot 10^{-4}\sin(16x - 3140t). \tag{2.18.5}$$

(b) A terjedési sebesség négyzete

$$v^2 = \frac{F}{\mu}, \tag{2.18.6}$$

ahol μ a hosszegységenkénti tömeg. Innen a kötelet feszítő erő

$$F = \mu v^2 = 157\,\text{N}. \tag{2.18.7}$$

2.19. Feladat: Órai kidolgozásra 8. feladat Egy húron csillapítatlan transzverzális harmonikus hullám terjed 20 m/s sebességgel pozitív irányba. Amplitúdója 50 cm, frekvenciája 2 Hz. A $t_0 = 0$ pillanatban az $x_0 = 0$ helyen levő részecske kitérése 25 cm, és negatív irányban mozog. Mekkora a kitérése az $x = 5$ m helyen lévő részecskének a $t = 2$ s pillanatban?

Megoldás: Jelölések: $v = 20$ m/s; $A = 50$ cm = 0,5 m; $\nu = 2$ Hz; $A(x_0 = 0, t_0 = 0) = A(0,0) = 25$ cm = 0,25 m.
A hullámfüggvény általános alakja

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \delta), \tag{2.19.1}$$

amelyre a kezdeti feltételeket alkalmazva

$$A(0,0) = A\sin\delta. \tag{2.19.2}$$

Ahhoz, hogy a hullámfüggvény a kezdeti időpillanatot követően csökkenjen, úgy $0 < \delta < \pi/2$ kell legyen. Így az adatok behelyettesítése után

$$\delta = \frac{\pi}{6}. \tag{2.19.3}$$

Az ω körfrekvencia

$$\omega = 2\pi\nu = 12,56\,1/\mathrm{s}. \tag{2.19.4}$$

A hullám terjedési sebessége a

$$v = \frac{\omega}{k} \tag{2.19.5}$$

összefüggéssel számolható, ahonnan a k cirkuláris hullámszám

$$k = \frac{\omega}{v} = 0,628\,1/\mathrm{m}. \tag{2.19.6}$$

A hullámfüggvény az SI egységekkel kifejezve a

$$y(x,t) = 0,5\sin\left(0,628x - 12,56t + \frac{\pi}{6}\right) \tag{2.19.7}$$

alakot ölti. Az $x = 5$ m és $t = 2$ s helyettesítést elvégezve az ezen a helyen és ebben az időpontban a kitérés

$$y(5,2) = -0,25\,\mathrm{m}. \tag{2.19.8}$$