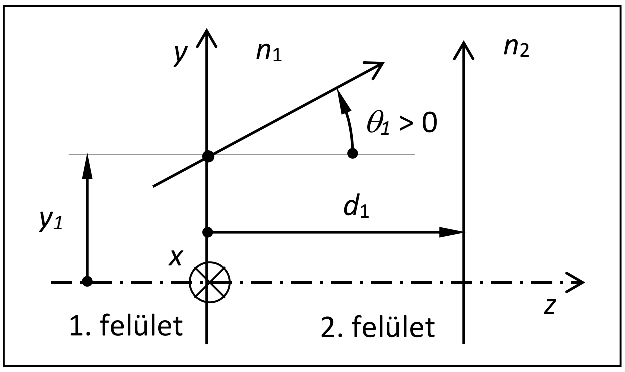
FIZIKA BSc, III. évfolyam / 1. félév
„Optika" – gyakorlatjegyzet

4. GYAKORLAT

Dr. Erdei Gábor, 2019-10-16

Sugárkoordináták, optikai iránykoszinuszok, előjelek



Optikai iránykoszinuszok: p és q. Pl. $q \equiv n \cdot \theta$

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= A \cdot y_1 + B \cdot q_1 \\ q_2 &= C \cdot y_1 + D \cdot q_1 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Átviteli mátrixok, elemek jelentése

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ q_1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

B – értéke nulla, ha leképezés áll fönn a két felület között

A – transzverzális nagyítás (leképezés esetén)

C – a törőerő −1-szerese (rendszerparaméter)

D – szögnagyítás n_2/n_1-szerese (leképezés esetén)

Egy gömbi felület törőereje (felület sorszáma 2) – akkor pozitív, ha fókuszál:

$$P_2 \equiv \frac{n_2}{f_2} = \frac{n_2 - n_1}{r_2}. \tag{3}$$

A rádiusz akkor pozitív, ha a gömb középpontja +z irányban van a homlokponttól.

Szabadtéri terjedés mátrixa

Fényterjedés közben az iránykoszinusz nem függ a pozíciótól, tehát C = 0, a kezdő és kiinduló felület között nem változik meg: D = 1.

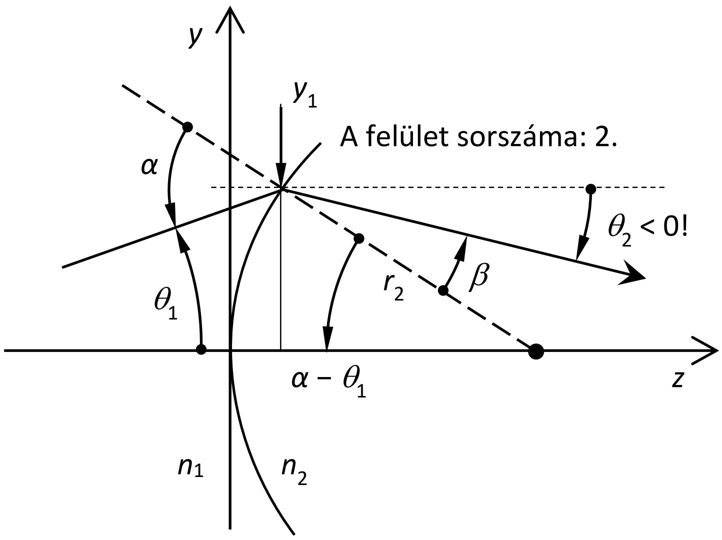
$$y_2 = y_1 + \theta_1 \cdot d_1 = 1 \cdot y_1 + \frac{q_1}{n_1} \cdot d_1 \tag{4}$$

Tehát A = 1 és $B = q_1/n_1$, azaz

$$\mathbf{T_1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{d_1}{n_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Gömbfelületi törés mátrixa, fókusztávolság

Töréskor a sugárdöféspont pozíciója nem függ a beesési szögtől, tehát B = 0, valamint nem változik meg: A = 1.



$$n_1\alpha = n_2\beta \tag{6}$$

$$\alpha - \theta_1 \approx \frac{y_1}{r_2} \tag{7}$$

$$(\alpha - \theta_1) = \beta - \theta_2 \;\; \rightarrow \theta_2 = -(\alpha - \theta_1) + \beta \tag{8}$$

$$\theta_2 = -\frac{y_1}{r_2} + \frac{n_1}{n_2}\alpha \;\; \rightarrow \theta_2 = -\frac{y_1}{r_2} + \frac{n_1}{n_2}\left(\frac{y_1}{r_2} + \theta_1\right) \tag{9}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{r_2}\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) y_1 + \frac{n_1}{n_2}\theta_1 \tag{10}$$

$$n_2\theta_2 = \frac{n_1 - n_2}{r_2} y_1 + n_1\theta_1 \tag{11}$$

Tehát $C = -P$ és $D = 1$, ahol P_2 a felület rörőereje. Ezzel:

$$\mathbf{R_2} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Általános esetben, ha a rendszerben több (pl. N db) törőfelület és szabadtéri terjedés van egymás után, akkor a mátrixok összeszorzódnak:

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}_N \cdot \mathbf{R}_N \cdot \ldots \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{T}_1 \tag{13}$$

Gömbtükör

Egyetlen, n_1 törésmutatójú közegben lévő r_2 rádiuszú gömbi tükörfelület mátrixának felírása. A tükrözési törvény alapján:

$$\beta = -\alpha \tag{14}$$

Ez olyan mintha $n_2 = -n_1$ lenne, a többi egyenlet változatlan, tehát:

$$P_2 = -2\frac{n_1}{r_2}\,. \tag{15}$$

Vagyis a mátrix most is (12) alakú.

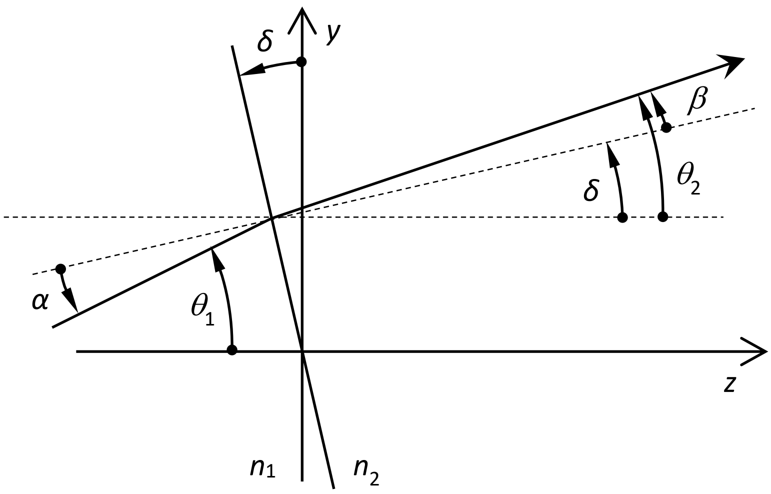
Sík törőfelület

$$n_1\alpha = n_2\beta \tag{16}$$

$$\theta_1 = \alpha + \delta \tag{17}$$

$$\theta_2 = \beta + \delta \tag{18}$$

$$\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\alpha + \delta = \frac{n_1}{n_2}(\theta_1 - \delta) + \delta \tag{19}$$



$$n_2\theta_2 = n_1(\theta_1 - \delta) + n_2\delta = n_1\theta_1 + \delta(n_2 - n_1) \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ q_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta(n_2 - n_1) \end{bmatrix} \tag{22}$$

Azaz a ferde felületnek nem szorzó mátrixa van, hanem konstans, hozzáadódó vektora. Ha δ = 0, akkor egyszerű egységmátrixot kapunk.

Vékonylencse

Lencsetörvény (s – tárgytávolság, s' – képtávolság, f ' – effektív fókusztávolság a képtérben):

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n'}{f'} + \frac{n}{s} \tag{23}$$

Vékonylencse mátrixa első felületről a másodikra:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 - P_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Vékonylencse mátrixa az első felülettől a fókuszsíkig:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{f'}{n_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - P\frac{f'}{n_2} & \frac{f'}{n_2} \\ -P & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{f'}{n_2} \\ -P & 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Vezessünk át egy tengelypárhuzamos fénysugarat (q_1 = 0) a rendszeren, úgy, hogy az 1. felületet y_1 magasságban metszi. A fókuszsíkban (ez a 3. felület):

$$\begin{bmatrix} y_3 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{f'}{n_2} \\ -P & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f'}{n_2} q_1 \\ -Py_1 + q_1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Esetünkben ez:

$$\begin{bmatrix} y_3 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Py_1 \end{bmatrix}, \tag{27}$$

vagyis a pozíció nem függ a sugárkoordinátától, az irány pedig:

$$\theta_3 = \frac{q_3}{n'} = -\frac{Py_1}{n'} = -\frac{y_1}{f'}. \tag{28}$$

Vastaglencse

Vastaglencse mátrixa az első felületről a másodikra:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{d_1}{n_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - P_1 \frac{d_1}{n_1} & \frac{d_1}{n_1} \\ -P_1 & 1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - P_1 \frac{d_1}{n_1} & \frac{d_1}{n_1} \\ -P_2 \left(1 - P_1 \frac{d_1}{n_1}\right) - P_1 & -P_2 \frac{d_1}{n_1} + 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$P = P_2 \left(1 - P_1 \frac{d_1}{n_1}\right) + P_1 = P_1 + P_2 - P_1 P_2 \frac{d_1}{n_1}. \tag{32}$$

Összetett rendszerek, fősíkok

Legyen egy levegővel körülvett (n = n' = 1.0) szimmetrikus gyűjtőlencse törőereje P = +4 dioptria, a lencse vastagsága d_1 = 3.0 mm, törésmutatója n_1 = 1.5. Mekkora a lencse fókusztávolsága?

$$P \equiv \frac{n'}{f'} = 4\ \mathrm{m}^{-1} = 0.004\ \mathrm{mm}^{-1} \tag{33}$$

Ebből f' = 1/0.004 = 250 mm. A lencse vastagságát is figyelembe véve mekkora a görbületi sugár ($r_1 = -r_2$)?

$$P_1 = P_2 = \frac{n_1 - \mathrm{n}}{r_1} = \frac{1.5 - 1}{r_1} = \frac{0.5}{r_1}. \tag{34}$$

$$P = P_1 + P_2 - P_1 P_2 \frac{d_1}{n_1} \frac{1}{r_1} - \frac{0.25}{r_1^2} \frac{3}{1.5} = 0.004 \tag{35}$$

$$0.004 r_1^2 - r_1 + 0.5 = 0 \tag{36}$$

Ebből r_1 = 0.501 mm ; r_2 = 249.5 mm – az utóbbi a hétköznapilag megszokott lencséknek megfelelő megoldás. A 0.501 mm-es rádiusz is értelmes, ez annak felel meg, ha a két lencse között van egy köztes fókuszpont.

Mekkora egy felület törőereje? (33)-ból: P_1 = $2.004 \cdot 10^{-3}$ 1/mm. Mik a lencse mátrixának elemei a két felülete között?

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.996 & 2 \\ -0.004 & 0.996 \end{bmatrix} \tag{37}$$

Liouville-tétel következménye: az átviteli mátrix determinánsa mindig 1.0. Ez azt is jelenti, hogy a mátrixelemek nem függetlenek egymástól. Az összefüggés számolásaink ellenőrzésére felhasználható. Esetünkben a determináns értéke: 1.000016.

Hol vannak a lencse fősíkjai?

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{z'}{n'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{z}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{38}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{z'}{n'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -A\frac{z}{n} + B \\ C & -C\frac{z}{n} + D \end{bmatrix} \tag{39}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} A + \frac{z'}{n'}C & -A\frac{z}{n} + B + \frac{z'}{n'}\left(-C\frac{z}{n} + D\right) \\ C & -C\frac{z}{n} + D \end{bmatrix} \tag{40}$$

A két fősík között leképezés áll fönn, melyek között a nagyítás definíció szerint +1. Tehát:

$$A + \frac{z'}{n'}C = 1 \tag{41}$$

Ebből z' = −1.00 mm. A szögnagyítás értékéből a következő jön ki:

$$-C\frac{z}{n} + D = 1 \tag{42}$$

Ebből: z = 1.0 mm. Itt a Lagrange-Helmholtz egyenletet (tulajdonképpen az energiamegmaradást) használtuk ki: $m \cdot m_\alpha = n'/n$, azaz leképezés esetén $A \cdot D = 1$.