Fizika feladatok

2019. október 11.

Ez a feladatgyűjtemény a mérnök hallgatók korábbi jogos igényének megfelelve, nagy hiányt pótol. A kitűzött feladatok az I. éves fizika tárgyaknak anyagaihoz illeszkednek. Remélhetőleg érzékelhető segítséget jelent mind a hallgatók, mind a tárgyat oktatók számára, valamint hozzájárul az egységes oktatás megvalósításához.
A gyűjteményben a * jelzés a magasabb nehézségi szintű feladatokat jelöli, míg a **-gal jelölt feladatokat a kihívásokat kedvelő megoldóknak ajánljuk. A feladatgyűjtemény folyamatosan bővül új feladatokkal és megoldásokkal. Javaslatokat új feladatokra, valamint megoldásokat és egyéb észrevételeket szívesen látunk. (Szerk.: Márkus Ferenc, Rakyta Péter, Krafcsik Olga, Barócsi Attila, Sólyom András, Gilyén András, Márkus Bence Gábor, Gambár Katalin, Fehér András, Bokor Nándor, Sarkadi Tamás)

Tartalomjegyzék

1. Feladatok a kinematika tárgyköréből

Tömegpontok mozgása egyenes mentén

1.1. Feladat: Mekkora az átlagsebessége annak pontnak, amely mozgásának első szakaszában v_1 sebességgel s_1 utat, második szakaszában v_2 sebességgel s_2 utat tesz meg?

Megoldás: Az átlagsebességet az összesen megtett útmennyiség és az ehhez szükséges teljes időtartam hányadosaként kapjuk meg: $\overline{v} = \frac{\sum_i s_i}{\sum_i t_i}$. Az eltelt időtartamok: $t_1 = \frac{s_1}{v_1}$ és $t_2 = \frac{s_2}{v_2}$. Így

$$\overline{v} = \frac{s_1 + s_2}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}}. \tag{1.1.1}$$

1.2. Feladat: Két mozdony s_1 távolságból, egymáshoz képest v sebességgel közeledik egymás felé az egyenes vasúti pályán. Az egyik fényjelet ad, amely a szélvédőkről visszaverődik. Mekkora utat tesz meg a fény, amíg s_2 távolságra lesznek egymástól?

Megoldás: Az eltelt idő:

$$t = \frac{s_1 - s_2}{v}, \tag{1.2.1}$$

amely idő alatt a fény

$$s = ct = c\frac{s_1 - s_2}{v} \tag{1.2.2}$$

utat tesz meg.

1.3. Feladat: Egyenes vasúti pályán egy mozdony halad v sebességgel, s közben Δt ideig dudál. Milyen hosszúnak hallja a pálya mellett álló utas a dudaszót, ha a vonat nem halad el mellette?

Megoldás: Tegyük fel, hogy a mozdony s távolságban van, amikor elkezd dudálni. A hangot

$$t_1 = \frac{s}{c} \tag{1.3.1}$$

idő elteltével hallja meg a megfigyelő. Ezt követően Δt idő múlva már csak $s - v\Delta t$ távolságban lesz a mozdony, amely ekkor befejezi a dudálást. A dudaszó vége

$$t_2 = \Delta t + \frac{s - v\Delta t}{c} \tag{1.3.2}$$

idő elteltével jut a megfigyelőhöz. A dudaszót a megfigyelő tehát

$$t_2 - t_1 = \Delta t + \frac{s - v\Delta t}{c} - \frac{s}{c} = \frac{c - v}{c}\Delta t \tag{1.3.3}$$

hosszúnak hallja. *Megjegyzés:* Távolodó mozdony esetén a dudaszó

$$t_2 - t_1 = \Delta t + \frac{s + v\Delta t}{c} - \frac{s}{c} = \frac{c + v}{c}\Delta t \tag{1.3.4}$$

időtartamúnak hallatszik.

1.4. Feladat: Egy gépkocsi 54 km/h sebességről 5 m/s^2 lassulással egyenletesen lefékez. Mekkora a teljes fékút?

Megoldás: Legyenek $v_0 = 54$ km/h $= 15$ m/s és $a = -5$ m/s^2. A sebesség az idő függvényében a

$$v(t) = v_0 + at, \tag{1.4.1}$$

összefüggéssel adható meg. Ennek segítségével a gépkocsi megállásáig eltelt idő

$$t = -\frac{v_0}{a} = 3 \text{ s}. \tag{1.4.2}$$

A teljes fékút pedig

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 22,5 \text{ m}. \tag{1.4.3}$$

1.5. Feladat: Egy tömegpont az x tengely mentén mozog –4 m/s^2 állandó gyorsulással. Az $x = 0$ helyen a sebessége 20 m/s, az időt ekkor kezdjük el mérni. Mikor lesz a test először az $x = 18$ m helyen?

Megoldás: Legyenek $v_0 = 20$ m/s, $a = -4$ m/s^2. A tömegpont helye, mint az idő függvénye az

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \tag{1.5.1}$$

összefüggéssel adható meg. Oldjuk meg az egyenletet a t változóra az $x = 18$ m helyettesítés mellett:

$$18 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \tag{1.5.2}$$

Az egyenlet gyökei: $t_1 = 1$ s és $t_2 = 9$ s. A tömegpont először a t_1 időpillanatban éri el az $x = 18$ m helyet.

1.6. Feladat: (HN 2B-18) Egy futó a 100 m-es vágtaszámot $10,3$ s-os eredménnyel nyerte meg. Egy másik futó $10,8$ s-os idővel futott be. Feltéve, hogy az atléták az egész távon egyenletesen futottak, határozzuk meg, hogy milyen távol volt a második futó a céltól, amikor a győztes átszakította a célszalagot!

Megoldás: Az adatokat jelöljük az alábbi módon: $s = 100$ m; $t_1 = 10,3$ s; $t_2 = 10,8$ s. A másodikként célba érkező futó sebessége

$$v = \frac{s}{t_2} = 9,26 \text{ m/s} \tag{1.6.1}$$

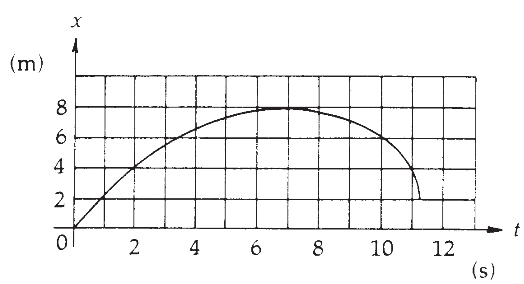
volt. Mivel a hátránya $t = t_2 - t_1 = 0,5$ s volt, így $d = vt = 4,63$ m-re volt a célvonaltól.

1.7. Feladat: (HN 2B-19) Az 1. ábra egy egyenesvonalú pályán mozgó részecske út-idő grafikonját mutatja.

(a) Határozzuk meg a mozgás átlagsebességét a $t_1 = 2$ s és $t_2 = 5$ s időintervallumra!

(b) Melyik időpillanatban zérus a mozgás sebessége?

(c) Mekkora a $t = 10$ s időpontban a pillanatnyi sebessége?



1. ábra.

Megoldás:

(a) A grafikonról leolvasható, hogy a $t_1 = 2$ s időpillanatban $x_1 = 4$ m a helykoordináta, valamint a $t_2 = 5$ s időpillanatban $x_2 = 7$ m. Az átlagsebességet a teljesen megtett út és hozzá tartozó idő hányadosaként kapjuk meg:

$$\overline{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = 1 \text{ m/s}. \tag{1.7.1}$$

(b) A mozgás sebessége ott zérus, ahol a görbéhez húzott érintő meredeksége zérus. Ez jó közelítéssel láthatóan a

$$t' = 7 \text{ s} \tag{1.7.2}$$

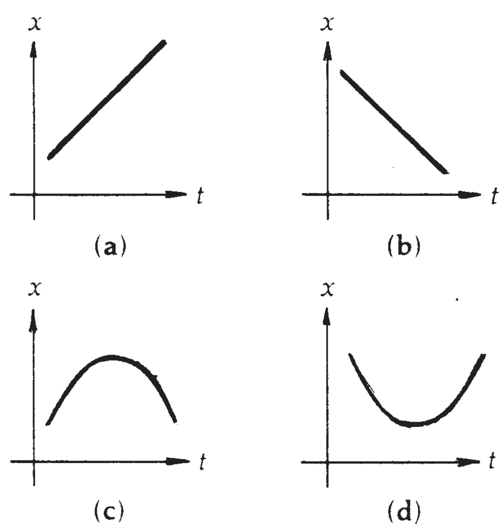
időpillanatban áll fenn.

(c) A $t = 10$ s-beli sebesség meghatározása a pontbeli érintő kiszámolását jelenti. Ez azt jelenti, hogy a ponthoz nagyon közeli értékeket kellene leolvasni. Mivel elég nagy a leolvasási pontatlanság – a megértés lényegét pedig nem érinti – az érintő meghatározását úgy végezzük el, hogy tekintjük a $t_9 = 9$ s-hoz és $t_{11} = 11$ s-hoz tartozó $x_9 = 7$ m és $x_{11} = 4$ m helykoordinátákat, és kiszámoljuk a

$$v_{10} = \frac{x_{11} - x_9}{t_{11} - t_9} \sim -1,5 \text{ m/s}. \qquad (1.7.3)$$

meredekséget. A negatív előjel arra utal, hogy a pont az origó felé mozog. A mozgás irányának megváltozása a $t' = 7$ s időpillanatban történt.

1.8. Feladat: (HN 2B-22) A 2. ábra négy különböző mozgás hely-idő függvényábráját mutatja. Állapítsuk meg minden esetben, hogy a gyorsulás pozitív, negatív vagy zérus!



2. ábra.

Megoldás: A 2. (a) és (b) ábráinak grafinkonjai lineáris összefüggést írnak le a megetett út és az eltelt idő között. A lineáris grafikonok egyenletes sebességű mozgást írnak le, következés képpen a mozgások alatt a gyorsulás zérus. A gyorsulás mellett a tömegpont sebességének iránya is megállapítható a grafikonok meredekségéből: a 2. (a) ábrán pozitív meredeksége van a grafikonnak, tehát a tömegpont pozitív irányba mozog és sebessége pozitív, míg a 2. (b) ábra negatív meredekségű egyenest mutat, mely negatív irányba mozgó tömegpontot ír le negatív sebességgel. A 2. (c) ábra grafinkonja olyan mozgást ír le, mely során a tömegpont először pozitív irányba mozog, majd egy adott pillanatban visszafordul. A grafikon meredekségét elemezve az egyes t időpillanatokban megállapítható, hogy kezdetben pozitív irányba mozgott a tömegpont, majd pedig visszafordult, a debessége negatív lett. A tömegpont gyorsulása ezért negatív volt a mozgás során. Végül a 2. (d) ábra az előző meggondolások alapján egy pozitív irányba gyorsuló tömegpont mozgását írja le.

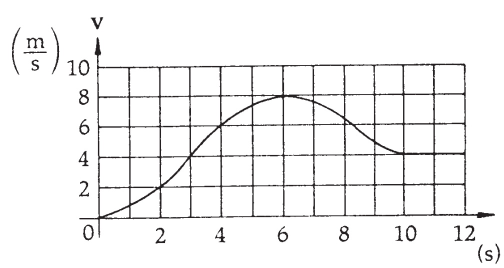
1.9. Feladat: (HN 2B-24) A 3. ábra egy egyenes úton nyugalomból induló motorkerékpáros sebesség-idő grafikonját mutatja.

(a) Mekkora a motorkerékpáros átlagos gyorsulása a $t_0 = 0$ s és $t = 6$ s időtartamban?

(b) Állapítsuk meg (közelítőleg), hogy mikor éri el a gyorsulás maximális értékét és mekkora a gyorsulás ebben a pillanatban?

(c) Mikor zérus a gyorsulás?

(d) Mikor veszi fel a gyorsulás legnagyobb negatív értékét és mekkora ez az érték?



3. ábra.

Megoldás:

(a) A $[t_0, t]$ s időintervallumban a teljes sebességváltozás $\Delta v = 8$ m/s. Az átlag gyorsulás ezért

$$a = \frac{\Delta v}{t - t_0} \ . \tag{1.9.1}$$

A számértékek behelyettesítése után $a = 1.3$ m/s^2.

(b) A legnagyobb gyorsulást akkor éri el a motorkerékpáros, amikor a sebesség-idő grafikonban legnagyobb a mindenkori érintő meredeksége. a 3. ábra alapján ez $t \approx 3$ s pillanatban következik be. Ekkor a motorkerékpáros gyorsulásának közelítő értékét az ábráról leolvasható értékek segítségével határozhatjuk meg. Az ábráról leolvasható adatok pontosságát a felrajzolt négyzetrács határozza meg. A gyorsulás meghatározásához szükséges sebességek értékét a szomszédos $t_1 = 2$ s és $t_2 = 4$ s időpillanatokban olvashatjuk le. A sebességek értékét a $t \approx 3$ s pillanatban húzott érintő segítségével határozhatjuk meg: $v_1 = 2$ m/s és $v_2 = 6$ m/s. A maximális gyorsulás tehát:

$$\overline{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \ . \tag{1.9.2}$$

Behelyettesítés az értékeket $\overline{a} = 2$ m/s^2 adódik.
(c) Mivel a motorkerékpáros gyorsulását a sebesség-idő grafikon pontjaiban húzott érintők meredeksége jelzi, a vízszintes érintőjű pontok a zérus gyorsulású pillanatoknak felelnek meg. A 3. ábra egyetlen olyan pontja melyben az érintő vízszintes, a $t = 6$ s pillanathoz tartozik.
(d) A motorkerékpáros a legnagyobb negatív értékű gyorsulását a $t = 8$ s pillanatban éri el, mivel ebben a pillanatban a legmeredekebb a grafikon érintője. Megszerkesztve a grafikon érintőjét a (b) feladatrészhez hasonlóan megállapítható gyorsulás közelítő értéke, mely $\overline{a}_n - \approx 2$ m/s^2-nak adódik.

1.10. Feladat: (HN 2B-26) Egy gépkocsi sebessége 9 s alatt 4 m/s-ról egyenletesen 7 m/s-ra növekszik.
(a) Mekkora a kocsi gyorsulása?
(b) Ezután az autó 12 s alatt egyenletesen lassulva megáll. Mekkora a gyorsulás ezen a szakaszon?
(c) Összesen mekkora utat tett meg a 21 s alatt az autó?
(d) Mekkora az átlagsebessége?

Megoldás: Legyenek $t_1 = 9$ s, $v_1 = 4$ m/s, $v_2 = 7$ m/s és $t_2 = 12$ s.
(a) A mozgás első szakaszát leíró gyorsulás

$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_1} = \frac{1}{3}\ \mathrm{m/s^2}. \qquad (1.10.1)$$

(b) A sebesség időbeli változása

$$v(t) = v_2 + a_2 t_2, \qquad (1.10.2)$$

amellyel a megállás tényét is figyelembe véve a

$$0 = 7 + 12 a_2 \qquad (1.10.3)$$

egyenlet írható fel. A második szakasz gyorsulása tehát

$$a_2 = -\frac{7}{12}\ \mathrm{m/s^2}. \qquad (1.10.4)$$

(c) A megtett út az első szakaszra

$$x_1 = v_1 t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = 49,5\ \mathrm{m}, \qquad (1.10.5)$$

a másodikra

$$x_2 = v_2 t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = 42 \text{ m}, \tag{1.10.6}$$

így az összesen megtett út $91,5$ m.

(d) Az átlagsebesség

$$\overline{v} = \frac{x_1 + x_2}{t_1 + t_2} = 4,35 \text{ m/s}. \tag{1.10.7}$$

1.11. Feladat: (HN 2A-32) Függőlegesen felfelé hajítunk egy labdát 12 m/s sebességgel. Hol van, mekkora és milyen irányú sebességgel rendelkezik

(a) 1 s és

(b) 2 s időpontban az elhajítás után?

Megoldás: A függőleges felfelé hajításra vonatkozó sebesség-idő és hely-idő összefüggések:

$$v(t) = v_0 - gt \tag{1.11.1}$$

és

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \tag{1.11.2}$$

Behelyettesítés után:

(a) $v(1 \text{ s}) = 2$ m/s felfelé (a pozitív előjel ezt mutatja); $y(1 \text{ s}) = 7$ m;

(b) $v(1 \text{ s}) = -8$ m/s lefelé (a negatív előjel ezt mutatja); $y(1 \text{ s}) = 4$ m.

1.12. Feladat: (HN 2B-33) 50 m mély kútba követ ejtünk. Határozzuk meg, hogy mennyi idő múlva halljuk a kő csobbanását! A hang terjedési sebessége 330 m/s.

Megoldás: A h mélységű kút aljára

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{1.12.1}$$

idő alatt ér le a kő. A h utat a hang

$$t_2 = \frac{h}{c} \tag{1.12.2}$$

idő alatt teszi meg. Így összesen

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{c} = 3,31 \text{ s} \tag{1.12.3}$$

idő múlva hallható a csobbanás.

1.13. Feladat: (HN 2B-35) Feldobunk egy érmét 4 m/s sebességgel. Mennyi idő alatt ér fel 0,5 m magasra. Miért kapunk két eredményt?

Megoldás: Az emelkedés út-idő függvénye:

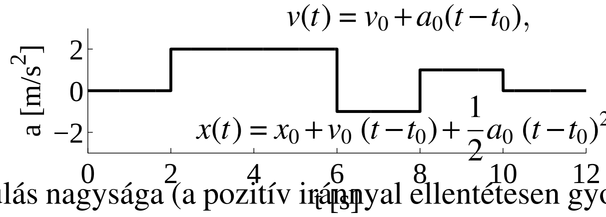
$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \tag{1.13.1}$$

Az adatokat behelyettesítve a

$$0 = 5t^2 - 4t + 0,5 \tag{1.13.2}$$

másodfokú egyenlet adódik, amelynek megoldásai a $t_1 = 0,155$ s és a $t_2 = 0,644$ s. Azért van két megoldás mert az első időpont után még tovább emelkedik, s a lefele esésnél a második időpontban ugyancsak $0,5$ m magasan lesz.

1.14. Feladat: (HN 2C-54) Egy, az origóból induló test a 4. ábra szerinti gyorsulással egyenesvonalú mozgást végez. Rajzoljuk meg a mozgás sebesség-idő és hely-idő függvényvényeket!



4. ábra.

Tüntessük fel a $t = 2,\ 6,\ 8$ és 10 s időpontokhoz tartozó sebesség és helykoordináták értékét.

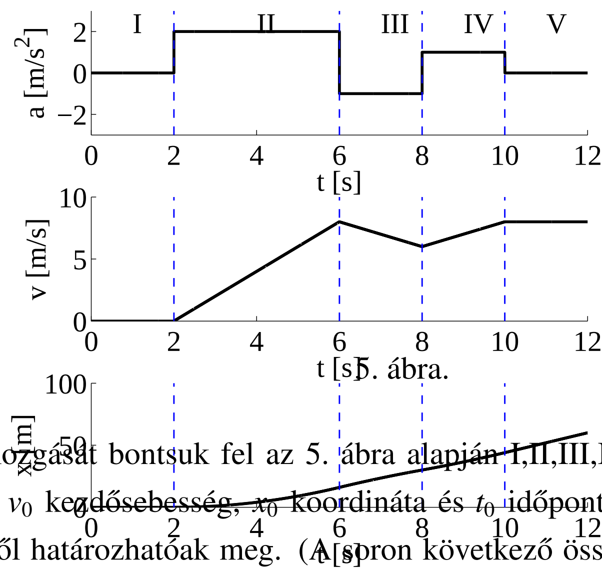
Megoldás: Egyenletesen gyorsuló mozgás esetében a gyorsulás, a sebesség és a megtett út az alábbi egyenletekkel adható meg:

$$a(t) \equiv a_0, \tag{1.14.1}$$

$$v(t) = v_0 + a_0 (t - t_0), \tag{1.14.2}$$

$$x(t) = x_0 + v_0\,(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0\,(t - t_0)^2, \tag{1.14.3}$$

ahol a_0 a gyorsulás nagysága (a pozitív iránnyal ellentétesen gyorsuló mozgás esetében negatív), t_0 a mozgás kezdeti időpontja, v_0 a kezdősebesség, x_0 pedig a tömegpont kezdeti koordinátája.



5. ábra.

A tömegpont mozgását bontsuk fel az 5. ábra alapján I,II,III,IV és V szakaszokra. Az egyes szakaszokban a v_0 kezdősebesség, x_0 koordináta és t_0 időpont az előző szakasz végpontjában felvett értékekből határozhatóak meg. (A soron következő összefüggésekben a $\{\xi\}$ jelölés a ξ fizikai mennyiség számértékét jelöli SI mértékegységekben.)

<u>I. szakasz:</u> $\boxed{0\text{<t<}2s}$. A kezdeti értékek: $a_0 = 0$ m/s^2, $v_0 = 0$ m/s, $x_0 = 0$ m, $t_0 = 0$ s.
Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig $v(t) = 0$ m/s és $x(t) = 0$ m adódik.
A $t = 2$ s pillanatban a sebesség és kitérés értékei: $v(2\text{s}) = 0$ m/s és $x(2\text{s}) = 0$ m.

<u>II. szakasz:</u> $\boxed{2s\text{<t<}6s}$. A kezdeti értékek: $a_2 = 0$ m/s^2, $v_0 = 0$ m/s, $x_0 = 0$ m, $t_0 = 2$ s.
Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig $\{v(t)\} = 2(\{t\}-2)$ és $\{x(t)\} = (\{t\}-2)^2$ adódik.
A $t = 6$ s pillanatban a sebesség és kitérés értékei: $v(6\text{s}) = 8$ m/s és $x(6\text{s}) = 16$ m.

<u>III. szakasz:</u> $\boxed{6s\text{<t<}8s}$. A kezdeti értékek: $a_0 = -1$ m/s^2, $v_0 = 8$ m/s, $x_0 = 16$ m, $t_0 = 6$ s.
Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig $\{v(t)\} = 8-(\{t\}-6)$ és $\{x(t)\} = 16+8(\{t\}-6)-\frac{1}{2}(\{t\}-6)^2$ adódik.
A $t = 8$ s pillanatban a sebesség és kitérés értékei: $v(8\text{s}) = 6$ m/s és $x(8\text{s}) = 30$ m.

<u>IV. szakasz:</u> $\boxed{8s\text{<t<}10s}$. A kezdeti értékek: $a_0 = 1$ m/s^2, $v_0 = 6$ m/s, $x_0 = 30$ m, $t_0 = 8$ s.
Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig $\{v(t)\} = 6+(\{t\}-8)$ és $\{x(t)\} = 30+6(\{t\}-8)+\frac{1}{2}(\{t\}-8)^2$ adódik.
A $t = 10$ s pillanatban a sebesség és kitérés értékei: $v(10\text{s}) = 8$ m/s és $x(10\text{s}) = 44$ m.

<u>V. szakasz:</u> $\boxed{10s\text{<t<}12s}$. A kezdeti értékek: $a_0 = 0$ m/s^2, $v_0 = 8$ m/s, $x_0 = 44$ m, $t_0 = 10$ s.

Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig $\{v(t)\} = 8$ és $\{x(t)\} = 44+8(\{t\}-10)$ adódik.
A $t = 12$ s pillanatban a sebesség és kitérés értékei: $v(12\text{s}) = 8$ m/s és $x(12\text{s}) = 60$ m.

1.15. Feladat: (HN 2C-66) Egy leejtett kődarab útjának a talajra érkezés előtti utolsó harmadát $1,0$ s alatt teszi meg. Milyen magasról esett le a kő?

Megoldás: Jelölje h az ejtés magasságát, t a teljes esési időt és $t_0 = 1$ s az utolsó harmadhoz tartozó időt. A szabadon eső tömegpont kinematikai összefüggései alapján:

$$h = \frac{1}{2}gt^2. \tag{1.15.1}$$

Az út 2/3-át pedig $t-t_0$ idő alatt teszi meg a kődarab:

$$\frac{2}{3}h = \frac{1}{2}g(t-t_0)^2. \tag{1.15.2}$$

A h változó eliminálásával t-re az alábbi másodfokú egyenlet adódik

$$0 = \frac{1}{6}gt^2 - gtt_0 + \frac{1}{2}gt_0^2. \tag{1.15.3}$$

A másodfokú egyenlet két megoldása $t_1 = 5,45$ s, valamint $t_2 = 0,55$ s. A második megoldás fizikailag nem értelmes, mivel $t_2 < t_0$. A t_1 megoldáshoz tartozó magasság:

$$h = 148,51 \text{ m}. \tag{1.15.4}$$

1.16. Feladat: * (HN 2B-40) Az x tengelyen mozgó részecske sebesség-idő függvényét a $v(t) = 4+2t-3t^2$ függvény adja meg. A $t = 0$ időpillanatban a részecske az $x = 8$ m helyen van.
(a) Mi az egyes együtthatók mértékegysége?
(b) Határozzuk meg a mozgás gyorsulás-idő függvényét!
(c) Határozzuk meg a mozgás hely-idő függvényét!
(d) Mekkora a részecske legnagyobb $+x$ irányú sebessége?

Megoldás:
(a) $A = 4$ m/s, $B = 2$ m/s^2, $C = 3$ m/s^3: $v(t) = A+Bt-Ct^2$.
(b) A gyorsulás a sebesség idő szerinti deriváltja, azaz

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = B-2Ct = 2-6t. \tag{1.16.1}$$

(c) A kezdeti $t = 0$ s időpillanatban a részecske koordinátája $x = 8$ m. A hely-idő függvény a sebesség idő szerinti integrálásával kapható meg a kezdeti feltételek illesztése mellett. Ezt a

$$\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t \tag{1.16.2}$$

összefüggésbol kiindulva a

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = x(t) - x_0 = \int_{t_0=0}^{t} (A + Bt - Ct^2)\mathrm{d}t \tag{1.16.3}$$

határozott integrál kiszámolásával kaphatjuk. Ennek eredménye

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0=0}^{t} (A + Bt - Ct^2)\mathrm{d}t = \left[At + \frac{1}{2}Bt^2 - \frac{1}{3}Ct^3\right]_{t_0=0}^{t}, \tag{1.16.4}$$

ahonnan a hely

$$x(t) = x_0 + At + \frac{1}{2}Bt^2 - \frac{1}{3}Ct^3 = 8 + 4t + t^2 - t^3. \tag{1.16.5}$$

(d) A sebesség akkor a legnagyobb, amikor a gyorsulás zérus. Ez a $t = 1/3$ s időpillanatban következik be. A sebesség értéke ekkor $v = 4,33$ m/s.

1.17. Feladat: * (HN 2B-41) Az x tengelyen mozgó részecske helyzetét az $x(t) = a + bt - ct^2$ függvény adja meg. Az együtthatók számértéke SI egységekben: $\{a\} = 2$, $\{b\} = 3$, $\{c\} = 4$,
(a) Adjuk meg az egyes együtthatók dimenzióját!
(b) Határozzuk meg a sebesség-idő függvényt!
(c) Határozzuk meg a gyorsulás-idő függvényt!
(d) Határozzuk meg a részecske maximális x irányú elmozdulását és az ehhez tartozó időpontot is!

Megoldás:
(a) Az egyes együtthatók dimenziója: $[a]$ =m; $[b]$ =m/s; $[c]$ =m/s^2
(b) A sebességet a hely idő szerinti deriváltjaként határozhatjuk meg:

$$\{v(t)\} = \frac{\mathrm{d}\{x\}}{\mathrm{d}t} = 3 - 8t. \tag{1.17.1}$$

(c) A gyorsulás pedig a sebesség idő szerinti deriváltjával egyenlő:

$$\{a(t)\} = \frac{\mathrm{d}\{v\}}{\mathrm{d}t} = -8. \tag{1.17.2}$$

(d) A maximális elmozdulás pillanatában a test sebessége zérus ($\{v(t)\} = 0$, ami a

$$t = \frac{3}{8}\ \mathrm{s}, \tag{1.17.3}$$

pillanatban következik be. A maximális elmozdulás pedig

$$x = \frac{51}{16}\ \mathrm{m}. \tag{1.17.4}$$

Tömegpontok síkbeli mozgása

1.18. Feladat: * Jelölje egy folyó partját az x tengely. A víz a parttal párhuzamosan folyik, az x irányú sebesség a parttól való távolság függvénye, amely a $v_x(y) = ky$ lineáris összefüggéssel adható meg, ahol $0 < k$, y pedig a parttól mért távolság. (A túloldali part sokkal távolabb van, mint a távolság, melyen a sodrási sebességet leíró lineáris összefüggés érvényes.) A parton lévő úszó a parttól d távolságra lévő stéghez szeretne úszni.
(a) Mekkora távolsággal előbb kell a vízbe mennie, ha a folyásirányra merőlegesen állandó u sebességgel fog úszni?
(b) Milyen a lesz a pályagörbe alakja?

Megoldás:
(a) Az úszó a parttól az idő függvényében

$$y(t) = ut \tag{1.18.1}$$

távolságra jut. Közben az x irányú sebessége is folyamatosan változik a

$$v_x(t) = ky = kut \tag{1.18.2}$$

összefüggésnek megfelelően. A mozgás x irányú vetülete lényegében egy állandó gyorsulású mozgással azonosítható, ahol a gyorsulás $a_x = ku$:

$$x = \frac{1}{2}a_x t_s^2. \tag{1.18.3}$$

A sodródás ideje

$$t_s = \frac{d}{u}, \tag{1.18.4}$$

így meghatározható az a távolság is, amellyel az úszónak előrébb kell a vízbe mennie:

$$x = \frac{1}{2}a_x t_s^2 = \frac{1}{2}kut_s^2 = \frac{1}{2}\frac{kd^2}{u}. \tag{1.18.5}$$

(b) A pályagörbe meghatározásához válasszunk olyan koordinátarendszert, hogy a stég a

$$\left[\frac{1}{2}\frac{kd^2}{u};d\right] \tag{1.18.6}$$

koordinátájú pontban legyen. Ekkor az origóból indulva éppen ehhez a ponthoz jut. Az (1.18.1) és (1.18.1) egyenletekből küszöböljük ki a t változót. Ekkor a pályagörbére az

$$y^2(x) - \frac{2ux}{k} = 0 \tag{1.18.7}$$

összefüggést kapjuk, ami egy parabola egyenlete.

1.19. Feladat: Egy repülőgép 360 km/h sebességgel vízszintesen repül. A repülőgépből egy-egy pisztollyal felfelé és lefelé lőnek azonos pontból. Milyen messze van egymástól a két lövedék $t = 0,8$ s múlva? Mindegyik lövedék kezdeti sebessége a repülőgéphez képest $v_0 = 160$ m/s. (A közegellenállás elhanyagolható.)

Megoldás: Vízszintesen mindkét lövedék 360 km/h sebességgel halad, így ez nem befolyásolja a kettejük távolságát. A függőleges irányban mindkettőnek $-g$ gyorsulása van, az egyiknek $+v_0$, a másiknak $-v_0$ a kezdősebessége. Mivel mindkét lövedék ugyanazzal a gyorsulással esik, a távolodásukat a kezdősebességük határozzák meg. A két lövedék közötti távolság tehát

$$d = \left(v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right) - \left(-v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right) = 2v_0 t = 256 \text{ m}. \tag{1.19.1}$$

1.20. Feladat: (HN: 3B-21) Egy 25 m magas hídról vízszintes irányban hajítunk el egy követ. A kő becsapódási helyét 45°-os irányban látjuk.

(a) Mekkora sebességgel hajítottuk el a követ?

(b) Mekkora és milyen irányú sebességgel csapódott a kő a vízbe?

Megoldás:

(a) A feladat feltétele szerint a kő becsapódási helyét a vízszinteshez képest lefelé 45°-os szög alatt látjuk. Ennek alapján a kő ugyanakkora távolságot tett meg vízszintesen mint függőleges irányban. Helyezzük a koordináta-rendszer kezdőpontját az eldobás pontjába. Ekkor becsapódás koordinátái: $[x_0, H] = [25; -25]$ m. A v_0 sebességgel elhajított kő mozgását leíró kinematikai egyenletek pedig

$$x(t) = v_0 t \tag{1.20.1}$$

és
$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2. \tag{1.20.2}$$
A becsapódás pillanatában:
$$x_0 = v_0 t \tag{1.20.3}$$
és
$$H = -\frac{1}{2}gt^2. \tag{1.20.4}$$
Az két egyenletből a hajítás idejére $t = 2,24$ s, az eldobás sebességére pedig $v_0 = 11,18$ m/s adódik.

(b) Az eldobott kő mindenkori sebességének komponensei
$$v_x(t) = v_0 \tag{1.20.5}$$
és
$$v_y(t) = -gt. \tag{1.20.6}$$
A $t = 2,2$ s repülési időt behelyettesítve a sebesség vektora $\mathbf{v} = [11,18;\ 22,36]$ m/s-nak adódik. A becsapódás α szöge a sebességkomponensek segítségével meghatározható a
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_y}{v_x} = 2 \tag{1.20.7}$$
egyenlet segítségével, amiből $\alpha = 63,44°$ adódik.

1.21. Feladat: Egy $h = 35$m magas torony tetejéről, a vízszinteshez képest $\alpha = 25^0$-os szög alatt ferdén felfelé egy labdát hajítunk el $v_0 = 80$ m/s kezdősebességgel.

(a) Határozzuk meg a földetérésig eltelt időt!

(b) Határozzuk meg a labda földetérési helyének távolságát a toronytól!

(c) Határozzuk meg a labda becsapódási sebességének nagyságát és irányát!

Megoldás:

(a) Helyezzük a koordináta-rendszer kezdőpontját a torony lábához. A labda x és y koordinátái az idő függvényében ekkor az
$$x(t) = v_0 t \cos\alpha \tag{1.21.1}$$
és
$$y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 + h \tag{1.21.2}$$
összefüggésekkel adhatóak meg. A repülés teljes ideje a
$$0 = v_0 t_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}gt_0^2 + h \tag{1.21.3}$$

egyenletből határozható meg. A másodfokú egyenlet fizikailag értelmes megoldása

$$t_0 = 7,67\,\mathrm{s}. \tag{1.21.4}$$

(b) A repülési időt behelyettesítve az (1.21.1) egyenletbe megkapjuk a becsapódás távolságát, ami

$$d = x(t_0) = v_0 t_0 \cos\alpha. \tag{1.21.5}$$

Behelyettesítve az értékeket $d \approx 556,1$ m adódik.
(c) A becsapódás pillanatában sebességvektor komponensei

$$v_x(t_0) = v_0 \cos\alpha \approx 72,5\,\mathrm{m/s} \tag{1.21.6}$$

és

$$v_y(t_0) = v_0 \sin\alpha - g t_0 \approx -42,9\,\mathrm{m/s}. \tag{1.21.7}$$

A sebesség nagysága pedig az egyes komponensek segítségével számolható ki a $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ összefüggéssel. Behelyettesítve a számadatokat $v \approx 84,2$ m/s adódik. A becsapódás szöge pedig

$$\beta = \mathrm{arctg}\frac{v_y}{v_x} = -30,61^0. \tag{1.21.8}$$

1.22. Feladat: A talajról a vízszintessel $\alpha = 30°$-os szöget bezáró szögben $v_0 = 50$ m/s nagyságú kezdősebességgel kilövünk egy lövedéket. A lövedék a szemközt lévő függőleges falba csapódik. Milyen magasan van a becsapódás helye, ha a fal $d = 80$ m távolságra van a kilövés helyétől?

Megoldás: A kinematikai alapösszefüggéseket alkalmazva a sebesség vízszintes és függőleges komponensei a

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha, \tag{1.22.1}$$

és

$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt. \tag{1.22.2}$$

összefüggésekkel adhatóak meg. Helyezzük koordináta-rendszer kezdőpontját a kilövés pontjába. Ekkor a lövedék koordinátái az idő függvényében

$$x(t) = v_0 \cos\alpha t \tag{1.22.3}$$

és

$$y(t) = v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2} g t^2. \tag{1.22.4}$$

A lövedék repülésének időtartama a

$$d = x(t_0) = v_0 t_0 \cos\alpha, \tag{1.22.5}$$

egyenlettel határozható meg. Az emelkedési magasság pedig

$$h = y(t_0) = v_0 t_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_0^2. \tag{1.22.6}$$

Az (1.22.5) egyenletből a

$$t = \frac{d}{v_0 \cos\alpha} \tag{1.22.7}$$

repülési időt kifejezve és behelyettesítve az (1.22.6) egyenletbe $h \approx 29,14$ m emelkedési magasság adódik.

1.23. Feladat: (HN: 3C-29) A kinematikai egyenletekből kiindulva határozzuk meg egy a vízszintes síkhoz képest θ szög alatt, v_0 kezdősebességgel kilőtt lövedék röppályájának egyenletét és az R lőtávolságot!

Megoldás: Az elhajított test gyorsulásvektora $\mathbf{a} = (0;\ -g)$, a $t = 0$ kezdőpillanathoz tartozó sebesség vektora pedig $\mathbf{v_0} = (v_0 \cos\theta;\ v_0 \sin\theta)$. A kinematikai alapösszefüggéseket alkalmazva a sebesség vízszintes komponense

$$v_x(t) = v_0 \cos\theta, \tag{1.23.1}$$

míg a függőleges komponense

$$v_y(t) = v_0 \sin\theta - gt. \tag{1.23.2}$$

A koordináta-rendszer kezdőpontját a hajítás pontjába választva, az eldobott test $\mathbf{r}(t) = (x(t);\ y(t))$ helyvektorának komponensei

$$x(t) = v_0 t \cos\theta, \tag{1.23.3}$$

és

$$y(t) = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2. \tag{1.23.4}$$

A pálya általános egyenletét megkapjuk, ha a fenti két egyenletből (melyeket a röppálya paraméteres egyenleteinek is nevezhetünk) kiküszöböljük a t paramétert. Ekkor a röppálya általános egyenlete:

$$y(x) = x \operatorname{tg}\theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta}. \tag{1.23.5}$$

Az 1.23.5 egy száraival lefelé álló parabolát ír le, amely átmegy az origón. A lőtávolságnak megfelelő $x = R$ koordinátában az y emelkedési magasság zérus, vagyis a lőtávolságot az $y(x = R) = 0$ egyenlet megoldásával kaphatjuk meg:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta. \tag{1.23.6}$$

Megjegyzés: Adott v_0 és g esetén a lőtávolság akkor a legnagyobb, ha $\sin 2\theta = 1$. Ebből a $\theta = 45°$-os szög következik.

1.24. Feladat: * (HN: 3C-30) A ferde hajítás röppálya egyenletének differenciálásával mutassuk meg, hogy a maximális lőtávolságot $\theta = 45°$ kilövési szög esetén érjük el!

Megoldás: A hajítási távolság mint a θ kilövési szög függvénye az (1.23.6) egyenlettel adott. A függvénynek szélsőértéke van, ha az elsőrendű derivált nulla, azaz

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta} = 0. \tag{1.24.1}$$

A differenciálás műveletét elvégezve:

$$0 = 2\frac{v_0^2}{g} \cos 2\theta. \tag{1.24.2}$$

Az egyenletet megoldva, a hajítási szögre $\theta = 45°$ adódik. Egy függvény szélsőértéke azonban a lokális maximum mellett jelenthet lokális minimumot is. Ahhoz, hogy biztosan állíthassuk, hogy egy függvény szélsőértéke lokális maximumnak felel meg, meg kell vizsgálnunk a függvény másodrendű deriváltját is a kérdéses pontban.

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\theta^2} = -4\frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta. \tag{1.24.3}$$

A másodrendű derivált a $\theta = 45°$ helyettesítési értékben negatív, ezért a talált szélsőérték valóban egy lokális (esetünkben globális) maximumot találtunk.

1.25. Feladat: (HN: 3C-32) Határozzuk meg, hogy milyen θ kilövési szög esetén lesz egy lövedék D lőtávolsága egyenlő a H emelkedési magassággal?

Megoldás: A lövedék $y(x)$ röppályája az (1.23.5) egyenlettel adható meg, a hajítás távolságát pedig az (1.23.6) egyenlettel adtuk meg egy korábbi feladatban. Az emelkedés H magasságát a $H = y(\frac{D}{2})$ összefüggés adja meg, azaz

$$H = \frac{D}{2}\operatorname{tg}\theta - \frac{1}{2}g\frac{D^2}{4v_0^2\cos^2\theta}. \tag{1.25.1}$$

A feladat szövegének megfelelően a $D = H$ feltételből a

$$\cos\theta = \frac{1}{4}\sin\theta \tag{1.25.2}$$

trigonometriai egyenlet adódik. Ennek fizikailag értelmes megoldása:

$$\theta = 76°. \tag{1.25.3}$$

1.26. Feladat: (HN: 3C-38) Egy szöcske vízszintes irányban legfeljebb $R_{max} = 1$ m távolságra tud elugrani. Feltételezve, hogy az elugráshoz szükséges idő elhanyagolható, határozzuk meg, hogy vízszintes úton mekkora sebességgel halad a szöcske, ha mindig a maximális távolságba ugrik!

Megoldás: A vízszintes hajítás R távolságát egy korábbi feladatban az (1.23.6) egyenlettel adtuk meg. A hajítási távolság a maximális értékét (a röppálya szimmetria-tulajdonságai miatt) a $\theta = 45°$ hajítási szög mellett veszi fel:

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}. \tag{1.26.1}$$

Ebből az ugrás sebessége

$$v_0 = \sqrt{R_{max}g}. \tag{1.26.2}$$

A szöcske vízszintes haladási sebességét a v_0 sebesség vízszintes komponense asja meg. Mivel a hajítási szög $\theta = 45°$, így

$$v_x = v_0\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{R_{max}g}{2}} \tag{1.26.3}$$

adódik.

1.27. Feladat: (HN 3C-39) Egy lövedéket θ kilövési szöggel lövünk ki. Határozzuk meg, hogy a lövedék röppályájának tetőpontja mekkora φ szög alatt látszik a kilövési pontból!

Megoldás: A korábbi feladatok megoldásaiból tekintsük a hajítási röppálya (1.23.5 egyenletét és az (1.23.6) egyenlettel adott hajítási távolságot. A pálya szimmetria-tulajdonságai miatt a röppálya tetőpontjának x koordinátája

$$x = \frac{D}{2} = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\theta. \tag{1.27.1}$$

Az ehhez tartozó $y = H$ emelkedési magasság pedig

$$H = y\left(\frac{D}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin^2\theta. \tag{1.27.2}$$

Az (1.27.1) és (1.27.2) egyenletek segítségével

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\theta \tag{1.27.3}$$

adódik a keresett szögre.

1.28. Feladat: ** A falhoz támasztott L hosszúságú létra földdel érintkező P pontját v_0 állandó sebességgel mozgatjuk az x tengely mentés, pozitív irányban. Az xy sík merőleges a falra, az x koordináta pedig a faltól mért távolságot méri. A P pont a $t = 0$ időpillanatban legyen az x_0 koordinátájú helyen.

(a) Adjuk meg a létra felső A pontjának sebességét és

(b) gyorsulását az idő függvényében!

Megoldás:

(a) Az alsó pont helye az idő függvényében: $x_P(t) = v_0 t + x_0$. Ha az A pont nem válik el a faltól, az A pont $y_A(t)$ koordinátája és a P pont vízszintes $x_P(t)$ koordinátája között az alábbi összefüggés érvényes:

$$x_P^2(t) + y_A^2(t) = L^2, \tag{1.28.1}$$

ahonnan $y_A(t) = \sqrt{L^2 - x_P^2(t)}$ adja meg a legfelső pont talajtól mért távolságát. Az A pont sebességét az (1.28.1) egyenletet idő szerinti deriválásával kaphatjuk meg:

$$x_P(t)\dot{x_P}(t) + y_A(t)\dot{y_A}(t) = 0 \tag{1.28.2}$$

Az egyenletben az A pont sebessége $v_A(t) = \dot{y_A}(t)$ a P pont sebessége pedig $v_P(t) = \dot{x_P}(t) \equiv v_0$. A felső pont sebessége tehát

$$v_A(t) = \dot{y_A}(t) = -\frac{x_P(t)\dot{x_P}(t)}{y_A(t)} = -\frac{(v_0 t + x_0)v_0}{\sqrt{L^2 - (v_0 t + x_0)^2}}. \tag{1.28.3}$$

Megjegyzés: Az $y(t) = \sqrt{L^2 - x^2(t)}$ függvény explicit idő szerinti deriválásával hasonlóan a fenti végeredményhez juthatunk.

(b) Az A pont gyorsulását az

$$a_P(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_y(t) = -\frac{v_0^2\sqrt{L^2-(v_0t+x_0)^2} + \frac{(v_0t+x_0)^2 v_0^2}{\sqrt{L^2-(v_0t+x_0)^2}}}{L^2-(v_0t+x_0)^2} \tag{1.28.4}$$

összefüggéssel számolhatjuk ki.

1.29. Feladat: ** Egy kétágú létra egyik szárának alsó pontját (az origóban) rögzítjük, a másik szár alsó pontját pedig állandó v_0 sebességgel vízszintesen mozgatjuk az x tengely mentén, pozití irányba. Ennek következtében a létra szétnyílik. A mozgó alsó P pont a $t = 0$ időpillanatban legyen az x_0 koordinátájú helyen. Mekkora a létra felső A pontjának $\mathbf{v_A}$ sebessége az idő függvényében? A létra szárai L hosszúságúak.

Megoldás: A P pont x koordinátája az idő függvényéban: $x_P(t) = v_0t + x_0$. A létra szimmetriatulajdonságai miatt az A pont mozgásának x irányú vetülete $v_0/2$ sebességű mozgással írható le:

$$x_A(t) = \frac{1}{2}(v_0t + x_0). \tag{1.29.1}$$

MIvel a létra baloldali szára nem nyúlik meg:

$$x_A^2(t) + y_A^2(t) = L^2 \tag{1.29.2}$$

ahol $y(t) = \sqrt{L^2 - x_f^2(t)}$ a felső pont talajtól való távolsága. Az (1.29.2) egyenletet idő szerint deriválva kapjuk a

$$x_A(t)\dot{x_A}(t) + y_A(t)\dot{y_A}(t) = 0 \tag{1.29.3}$$

egyenletet, ahol az A pont x irányú sebessége $v_x(t) = \dot{x_A}(t) = v_0/2$, valamint az y irányú sebessége

$$v_y(t) = \dot{y_A}(t) = -\frac{x_A(t)\dot{x_A}(t)}{y_A(t)} = -\frac{\frac{1}{4}(v_0t+x_0)v_0}{\sqrt{L^2 - \frac{1}{4}(v_0t+x_0)^2}}. \tag{1.29.4}$$

1.30. Feladat: ** Egy $2l$ szélességű folyó az x tengely mentén helyezkedik el úgy, hogy az x tengely a folyó gometriai középvonala. A folyó sebességprofilja a partvonalra merőleges y koordináta függvényében

$$V(y) = v_0\left(1 - \frac{y^2}{l^2}\right). \tag{1.30.1}$$

Az koordiná-rendszer origójából (a folyó közepéről) a partra merőleges irányban, állandó u sebességgel kezd el úszni egy ember.
(a) Mekkora távolsággal sodródik le az úszó a folyó mentén?
(b) Milyen az úszó mozgásának pályagörbéje?

Megoldás:
(a) Az úszó y koordinátája az idő függvényében

$$y = ut, \tag{1.30.2}$$

így az x tengely irányú sebesség az idő függvényében

$$v_x(t) = V(y(t)) = v_0 \left(1 - \frac{u^2t^2}{l^2}\right) \tag{1.30.3}$$

összefüggéssel adható meg. A part eléréséhez $t_0 = l/u$ idő szükséges. Az x tengely irányú d elmozdulás az x irányú sebességkomponens integrálásával kapjuk meg:

$$x(t) = \int_0^t v_x(t')\,\mathrm{d}t' = \int_0^t v_0 \left(1 - \frac{u^2t'^2}{l^2}\right) \mathrm{d}t' = \left[v_0t' - \frac{1}{3}v_0\frac{u^2t'^3}{l^2}\right]_0^t = v_0t - \frac{1}{3}v_0\frac{u^2t^3}{l^2}. \tag{1.30.4}$$

A partra úszás alatt az úszó $d = x(t_0)$ távolsággal sodródik le a folyó mentén. Rövid számolással

$$d = \frac{2}{3}\frac{lv_0}{u} \tag{1.30.5}$$

adódik.
(b) Az úszó pályájának paraméteres egyenletét az (1.30.2) és (1.30.4) egyenletek adják meg. A pályagörbe általános egyenletét a t paraméter kiküszöbölésével határozhatjuk meg.

$$x(y) = v_0\frac{y}{u} - \frac{1}{3}v_0\frac{y^3}{ul^2} \tag{1.30.6}$$

* *Megjegyzés:* Általános esetben egy görbe egyenlete $f(x,y) = 0$ implicit formában adható meg.

1.31. Feladat: Egy kocsi vízszintes pályán $v = 30$ m/s állandó sebességgel egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. A mozgó kocsiról egy lövedéket lőnek ki úgy, hogy miután a kocsi $s = 80$ m-t megtett, a lövedék visszaesik a kocsira.
(a) Mennyi a repülési idő?
(b) A kocsihoz képest mekkora relatív sebességgel és a vízszinteshez képest mekkora szög alatt kellett a lövedéket kilőni?

Megoldás:

(a) A lövedék repülési ideje

$$t_0 = \frac{s}{v}. \tag{1.31.1}$$

Behelyettesítve a számadatokat $t_0 \approx 2,67$ s adódik.

(b) A lövedéknek a kocsihoz képest csak függőleges irányú sebessége lehetett. Mivel t_0 idő múltán ismét a kocsira esett vissza a lövedék, t_0 idő elteltével a lövedék y koordinátája nulla lesz:

$$y(t_0) = 0 = v_y t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2. \tag{1.31.2}$$

Ebből a lövedék sebességének függőleges komponense:

$$v_y = \frac{1}{2} g t. \tag{1.31.3}$$

adódik. Behelyettesítve a számadatokat $v_y = 13,3$ m/s adódik.

1.32. Feladat: Egy lövedéket $v = 330$ m/s vízszintes irányú kezdősebességgel egy $h = 80$ m magas szikla tetejéről lőnek ki.

(a) Mennyi ideig tart, amíg a lövedék a Föld felszínére érkezik?

(b) A szikla aljától mekkora távolságban érkezik a Földre?

(c) Mekkora és milyen irányú sebességgel csapódik a talajba?

Megoldás:

(a) A lövedék függőleges irányban egyenletesen gyorsuló mozgást végez. A repülés ideje

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{1.32.1}$$

Behelyettesítve a számadatokat $t_0 \approx 4$ s adódik.

(b) A lövedék a szikla aljától

$$x = v t_0 \tag{1.32.2}$$

távolságban érkezik a Földre. Behelyettesítve a számadatokat $x \approx 132$ m adódik.

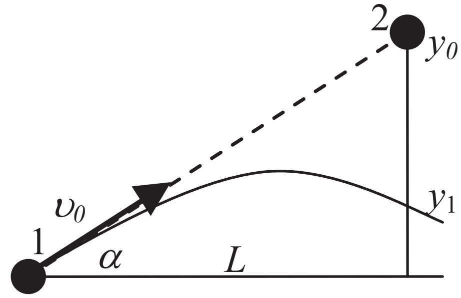
(c) A becsapódás pillanatában a sebességkomponensek $v_x = 330$ m/s, valamint $v_y = g t_0 = 40$ m/s. Így a sebesség nagysága

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \approx 332,4\,\text{m/s}, \tag{1.32.3}$$

míg a becsapódás szöge

$$\alpha = \text{arctg}\frac{v_y}{v_x} \approx 6,9^0. \tag{1.32.4}$$

1.33. Feladat: A 6. ábrán látható két tömegpontot egyszerre indítjuk úgy, hogy miközben a 2. tömegpontot elengedjük, az 1. tömegpontot a 2. tömegpont kezdeti helyzetének irányába lőjük v_0 kezdeti sebességgel. A két test vízszintes távolsága L. Az (L, α, v_0) adatokkal:



6. ábra.

(a) Fejezzük ki a 2. test kezdeti y_0 magasságát!
(b) Bizonyítsuk be, hogy ha a két test pályája metszi egymást, akkor a két test **mindig** találkozik a pályák (L, y_1) metszéspontjában!
(c) Fejezzük ki a találkozás t időpontját!
(d) Mekkora az 1. test y_1 magassága a találkozás pillanatában?

Megoldás:
(a) A 2. test y_0 magassága

$$y_0 = L\mathrm{tg}\alpha. \tag{1.33.1}$$

(b) Az 1. test emelkedési magassága az idő függvényében

$$y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2, \tag{1.33.2}$$

míg a 2. test esési magassága

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2. \tag{1.33.3}$$

Tekintettel arra, hogy

$$L = v_0 t \cos\alpha, \tag{1.33.4}$$

és ezt (az 1.33.2) egyenletbe helyettesítve a két emelkedési magasság egyenlősége közvetlenül látható.
(c) A találkozásig eltelt idő

$$t = \frac{L}{v_0 \cos\alpha}. \tag{1.33.5}$$

(d) A találkozási idő behelyettesítésével a találkozási magasság

$$y_1 = y_0 - \frac{1}{2} g \frac{L^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}. \tag{1.33.6}$$

Tömegpontok térbeli mozgása

1.34. Feladat: ** Egy pontszerűnek tekinthető labda a térben $\mathbf{v} = at^2\mathbf{i} + bt^2\mathbf{j} + ct^2\mathbf{k}$ m/s sebességgel mozog; $a = -2,5$ m/s^3, $b = 4$ m/s^3, $c = 1$ m/s^3. Mekkora utat tesz meg a labda mozgása első $t = 5$ másodperce alatt?

Megoldás: Az út a pálya ívhossza, azaz

$$s = \int_0^t \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\mathrm{d}t = \int_0^t \sqrt{(at^2)^2 + (bt^2)^2 + (ct^2)^2}\mathrm{d}t =$$

$$\int_0^t \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} t^2 \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{3} \left[t^3\right]_0^t = 200,83\mathrm{m}. \tag{1.34.1}$$

2. Feladatok körmozgás tárgyköréből

Kerületi sebesség

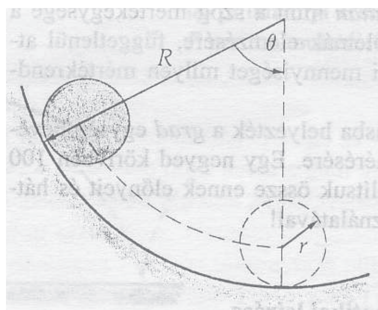
2.1. Feladat: (HN 11C-14) Egy kerék a vízszintes talajon csúszás nélkül $v = 6$ m/s sebességgel gördül. Határozzuk meg a kerületén lévő részecske talajhoz viszonyított pillanatnyi sebességét, mikor a részecske a kerék elülső pontjában van!

Megoldás: A haladó mozgásból eredően a kerék minden egyes pontja rendelkezik $v_x = 6$ m/s vízszintes irányú haladómozgással. Ugyanakkor a kerületi pontok ugyancsak $v_k = 6$ m/s sebességgel mozognak a kerék középpontja körül. Az elülső pont kerületi sebességének iránya lefelé mutat, azaz $v_y = -6$ m/s. A részecske pillanatnyi sebességvektora tehát

$$\mathbf{v} = (v_x; v_y) = (6; -6)\,\mathrm{m/s}. \tag{2.1.1}$$

Megjegyzés: A tiszta gördülés feltétele, hogy a kerék legalsó pontja ne mozogjon a talajhoz képest. A legalsó pont kerületi sebessége épp ellentétes irányú, de azonos nagyságú, mint a kerék haladó mozgásából származó sebessége. A két mozgás „összegének” eredménye, hogy a kerék legalsó pontjának sebessége zérus a talajhoz képest.

2.2. Feladat: (HN 11C-15) Egy r sugarú henger csúszás nélkül gördül egy függőleges síkban lévő R sugarú körpályáján a 7. ábra szerint. Mutassuk meg, hogy a henger saját tengelye körüli δ elfordulási szöge és a henger tengelyének θ szögelmozdulása között fennáll, hogy $\delta = (R-r)\theta/r$!



7. ábra.

Megoldás: Az r sugarú henger középponja által súrolt s ív hosszúságát kétféle módon határozhatjuk meg. Egyrészt a θ szöget felhasználva

$$s = (R-r)\theta, \tag{2.2.1}$$

adódik, másrészt a δ szög- segítségével

$$s = r\delta. \tag{2.2.2}$$

A két egyenletből

$$\delta = \frac{(R-r)\theta}{r}, \tag{2.2.3}$$

adódik, ami éppen a feladat állítása.

Szöggyorsulás

2.3. Feladat: Egy $R = 30$ cm sugarú kerékre szíjat csévéltünk. Míg a kerék $f = 2{,}0$ 1/s-os fordulatszámról egyenletesen lassulva leáll, $s = 25$ m szíj tekeredik le róla.
(a) A folyamat alatt hány fordulatot tesz meg a kerék?

(b) Mekkora a kerék szöggyorsulása?

Megoldás: A kezdeti szögsebesség $\omega_0 = 2\pi f \approx 12,56$ rad/s.

(a) A fordulatok N száma az

$$N = \frac{s}{2R\pi} \tag{2.3.1}$$

összefüggéssel határozható meg. Behelyettesítve a számadatokat $N \approx 13,26$ adódik.

(b) Az N fordulat megtétele alatt a kerék

$$\varphi_0 = 83,33\,\mathrm{rad} \tag{2.3.2}$$

szöget fordul el. A forgásra vonatkozó kinematikai egyenletek segítségével felírhatjuk a mindenkori

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t, \tag{2.3.3}$$

szögsebességet és az elfordulás

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 \tag{2.3.4}$$

szögét. A megállás pillanatában $\omega(t) = 0$, ekkor $\varphi(t) = \varphi_0$ rad. A

$$0 = \omega_0 + \beta t \tag{2.3.5}$$

és a

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 \tag{2.3.6}$$

egyenletrendszert megoldva a β és t ismeretlenekre, megkaphatjuk a szöggyorsulás értékét:

$$\beta = -\frac{1}{2}\frac{\omega_0^2}{\varphi} \approx -0,95\,\mathrm{rad/s^2}. \tag{2.3.7}$$

2.4. Feladat: Egy autó egyenletesen gyorsulva álló helyzetből 15 m/s-os sebességre tesz szert 20 s alatt.

(a) Mekkora a kerék szöggyorsulása, ha egy kerekének sugara $1/3$ m és tisztán gördül a gyorsulás alatt?

(b) Hány fordulatot tett meg a kerék a folyamat alatt?

Megoldás:

(a) Az autó gyorsulása

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0,75\,\mathrm{m/s^2}. \tag{2.4.1}$$

Mivel $a = R\beta$ (a kerék tisztán gördül), a szöggyorsulás értéke

$$\beta = 2,25\,\mathrm{rad/s^2}. \tag{2.4.2}$$

(b) A szögelfordulás nagysága pedig

$$\varphi = \frac{1}{2}\beta t^2 = 450 \text{ rad}, \tag{2.4.3}$$

amelyből a megett fordulatok száma

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = 71,6. \tag{2.4.4}$$

Centripetális és tangenciális gyorsulások

2.5. Feladat: (HN: 4C-25) Egy versenyautó $v_0 = 210$ km/h sebességgel mozog a $s = 2$ km kerületű körpályán, majd egy teljes kört megtéve egyenletesen lassítva megáll.
(a) Mekkora az autó tangenciális gyorsulása?
(b) Mekkora a cenctripetális gyorsulás $d = 1$ km-rel a megállás előtt?
(c) Mekkora ebben a pillanatban az eredő gyorsulás?

Megoldás:
(a) Az egyenletes kerületi (a_t tangenciális) gyorsulás hatására a versenyautó

$$t_0 = \frac{v_0}{|a_t|} \tag{2.5.1}$$

idő alatt áll meg. Ez alatt az idő alatt a versenyautó

$$s = v_0 t_0 - \frac{1}{2}|a_t| t_0^2 = \frac{v_0^2}{2|a_t|}, \tag{2.5.2}$$

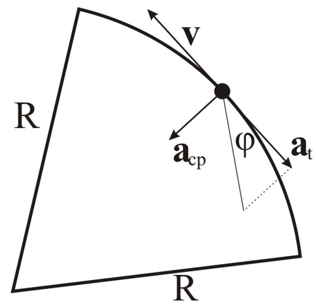
utat tesz meg. A mozgás során az autó gyorsulása ezért:

$$|a_t| = \frac{v_0^2}{2s} \approx 0,85 \text{m/s}^2. \tag{2.5.3}$$

Mivel az autó sebessége 0-ra csökken a mozgás során, a megszokott konvenciókkal $a_t \approx -0,85$ m/s^2.
(b) Abban a pillanatban, amikor az autónak még d távolságot kell megtennie a megállásig, a hátralévő út megtételéhez még további

$$t_0 = \sqrt{\frac{2d}{|a_t|}} \tag{2.5.4}$$

idő szükséges. A megálláshoz szükséges időt úgy kaphatjuk meg a legegyszerűbb módon, ha a lassulás folyamatát időben visszafelé tekintjük. Ekkor egy álló helyzetből, $-a_t$ gyorsulással



8. ábra.

mozgó autó mozgását követjük nyomon. A d távolság megtételéig éppen t_0 idő szükséges. A versenyautó sebességét is hasonló gondolatmenettel számolhatjuk ki ebben a pillanatban:

$$v = |a_t|t_0 \approx 41,3 \text{ m/s}. \tag{2.5.5}$$

Ebben a pillanatban a centripetális gyorsulás

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{2\pi v^2}{d} \approx 5,36 \text{m/s}^2. \tag{2.5.6}$$

(c) Az eredő gyorsulás pedig

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} \approx 5,43 \text{m/s}^2. \tag{2.5.7}$$

2.6. Feladat: (HN: 4C-26) Egy $R = 300$ m-es állandó görbületi sugarú úton haladó autó $a_t = -1,2$ m/s^2 gyorsulással fékezni kezd. Határozzuk meg az autó gyorsulásának irányát és nagyságát abban az időpontban, amikor sebessége $v = 15$ m/s. Készítsünk vázlatot a gyorsulásvektor irányának jelzésére!

Megoldás: A kör középpontja felé mutató centripetális gyorsulás

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} \approx 0,75 \text{ m/s}^2. \tag{2.6.1}$$

Az autó a_t gyorsulása a tangenciális gyorsulás, iránya pedig a v sebességgel ellentétes. A tangenciális és centripetális gyorsulás egymásra merőlegesek. Az eredő gyorsulás érintő irányával bezárt φ szögére érvényes (lásd a 8. ábrát), hogy

$$\text{tg}\,\varphi = \left|\frac{a_{cp}}{a_t}\right| = 0,625. \tag{2.6.2}$$

Így az eredő gyorsulás $\varphi = 32^0$ szöget zár be az érintővel, nagysága pedig $|a| = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2} \approx 1,4$ m/s^2.

2.7. Feladat: (HN: 4C-27) A fonálra kötött labdát $R = 0,3$ m sugarú, a talaj felett $h = 1,2$ m magasban levő, vízszintes síkú körpályán állandó sebességgel pörgetünk. A fonal hirtelen elszakad és a labda attól a ponttól $s = 2$ m távolságban ér talajt, amelyet úgy kapunk, hogy az elszakadás pillantában elfoglalt helyzetét függolegesen a talajra vetítjük. Mekkora volt a labda centripetális gyorsulása, amíg körmozgást végzett?

Megoldás: A kötél elszakadásának pillanátában a labda vízszintes irányú sebessége $v = R\omega$, ahol ω a körmozgás körfrekvenciája. A fonál elszakadása után a labda s m utat tesz meg

$$t_0 = \frac{s}{R\omega} \tag{2.7.1}$$

idő alatt. Másrészt a labda függőleges irányban h m magasságból szabadon esik, ezért

$$h = \frac{1}{2}gt_0^2 = \frac{gs^2}{2\omega^2 R^2}. \tag{2.7.2}$$

A fonál elszakadásáig körmozgás körfrekvenciája tehát

$$\omega = \sqrt{\frac{gs^2}{2hR^2}} \tag{2.7.3}$$

volt. Ebből a centripetális gyorsulás könnyen meghatározható:

$$a_{cp} = R\omega^2 = \frac{gs^2}{2hR} \approx 55,6\,\mathrm{m/s^2}. \tag{2.7.4}$$

2.8. Feladat: (HN 4C-28) Egy lövedéket a vízszintes síkhoz képest θ szög alatt v_0 sebességgel lövünk ki. Fejezzük ki a röppálya tetőpontjához tartozó R görbületi sugarat a v_0, θ és g függvényében!

Megoldás: A pálya tetőpontján a pályát érintő sebességkomponens $v_x = v_0 \cos\theta$. A lövedék centripetális gyorsulása

$$a_{cp} = \frac{v_x^2}{R}. \tag{2.8.1}$$

A cetripetális gyorsulást a nehézségi gyorsulás biztosítja, ezért $a_{cp} = g$. A két összefüggésből a görbületi sugár kifejezhető:

$$R = \frac{v_x^2}{g} = \frac{v_0^2 \cos^2\theta}{g}. \tag{2.8.2}$$

3. Feladatok a dinamika tárgyköréből

Newton három törvénye

3.1. Feladat: Három azonos m tömegű gyöngyszemet fonálra fűzünk, egymástól kis távolságokban a fonálhoz rögzítünk, és az elhanyagolható tömegű fonál végét ujjunkkal fogva függőlegesen lógatunk a g homogén nehézségi erőtérben. Majd a t_0 időpillanattól kezdve a gyorsulással emeljük a fonál végét. Mekkora erő ébred az egyes fonalszakaszokban?

Megoldás: Számozzuk meg a gyöngyszemeket. A legalsó legyen az 1-es, a középső a 2-es, a felső a 3-as. A koordinátarendszer y tengelye mutasson felfele. Mindhárom gyöngyszem a gyorsulással mozog felfele, így a koordinátarendszerben pozitív értékű. A nehézségi gyorsulás lefele mutat, így negatív: $-g$.
Az 1-es testre a K_1 kötélerő (az 1-es 2-es testet összekötő fonalszakaszon) hat felfele;
a 2-es testre hat a $-K_1$ kötélerő lefele (az 1-es 2-es testet összekötő fonalszakaszon) és a K_2 kötélerő felfele (a 2-es 3-as testet összekötő fonalszakaszon);
a 3-as testre hat a $-K_2$ kötélerő lefele (az 2-es 3-as testet összekötő fonalszakaszon) és az F kötélerő felfele (ezt mi fejtjük ki).
A mozgásegyenletek rendre (1-2-3 testre):

$$ma = K_1 - mg, \tag{3.1.1}$$

$$ma = K_2 - K_1 - mg, \tag{3.1.2}$$

$$ma = F - K_2 - mg. \tag{3.1.3}$$

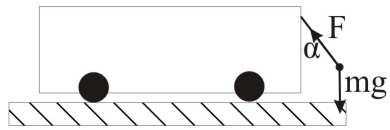
Az egyenletrendszerből a keresett kötélerők:

$$K_1 = m(a+g), \tag{3.1.4}$$

$$K_2 = ma + K_1 + mg = 2m(a+g), \tag{3.1.5}$$

$$F = ma + K_2 + mg = 3m(a+g). \tag{3.1.6}$$

Megjegyzés: Gyakorlásként általánosítsa a feladatot különböző számú és tömegű gyöngyszemekre!



9. ábra.

3.2. Feladat: Egy mozgó kocsin rögzített fonál végén egy $m = 2$ kg tömegű test lóg. A fonal szakítási szilárdsága $F_{max} = 30$ N. Mekkora egyenletes gyorsulással mozoghat a kocsi, hogy a fonal még éppen el ne szakadjon?

Megoldás: Jelölje α azt a szöget, amelyet a gyorsítás alatt a kötél bezár a függőlegessel (lásd a 9. ábrát). Ekkor az F kötélerő vízszintes komponense gyorsítja a testet

$$ma = F\sin\alpha, \tag{3.2.1}$$

míg a függőleges komponens a súlyerővel tart egyensúlyt

$$mg = F\cos\alpha. \tag{3.2.2}$$

A két egyenletből a gyorsulás maximális értéke

$$a_{max} = \sqrt{\frac{F_{max}^2}{m^2} - g^2}. \tag{3.2.3}$$

Behelyettesítve a számadatokat $a_{max} \approx 11,18$ m/s^2 adódik.

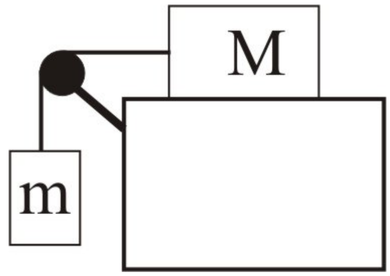
3.3. Feladat: (HN 5B-19) Nyugalomból induló test súrlódásmentesen csúszik le a vízszintessel $\alpha = 30^0$-os szöget bezáró lejtőn.
(a) Határozzuk meg azt a t_0 időpillanatot amikor a test eléri a $v_0 = 50$ m/s-os sebességet?
(b) Mekkora s távolságba jut el ezalatt a test?

Megoldás:
(a) Az m tömegű test mozgásegyenlete

$$ma = mg\sin\alpha, \tag{3.3.1}$$

amiből a test gyorsulása

$$a = g\sin\alpha. \tag{3.3.2}$$



10. ábra.

A test sebessége az idő függvényében

$$v(t) = g \sin \alpha t. \tag{3.3.3}$$

A t_0 időpillanatban a test eléri a v_0 sebességet, azaz $v(t_0) = v_0$. A sebesség eléréséhez szükséges idő pedig $t_0 = v_0/(g \sin \alpha)$. Behelyettesítve a számadatokat $t_0 = 10$ s adódik.

(b) A t_0 idő alatt megtett út

$$s = \frac{1}{2} g t_0^2 \sin \alpha. \tag{3.3.4}$$

Behelyettesítve a számadatokat $s = 250$ m adódik.

3.4. Feladat: (HN: 5B-33) Az m és $M = 8$ kg tömegű hasábokat az 10. ábrán látható elrendezésben fonallal kötünk össze. A csiga tengelysúrlódása és az érintkező felületek közötti súrlódás elhanyagolható. Az M tömeg alatti asztal a talajhoz rögzített, így a testek mozgása során nem mozdul el.

(a) Mekkora az alsó test m tömege, ha a testek gyorsulása $a = 2$ m/s^2?

(b) Mekkora K erő feszíti a fonalat?

Megoldás:

(a) Mivel a hasábokat összekötő kötél nem nyúlik meg, mindkét hasáb gyorsulása ugyanakkora (lásd a 11. ábrát.) Az egyes hasábok mozgásegyenletei

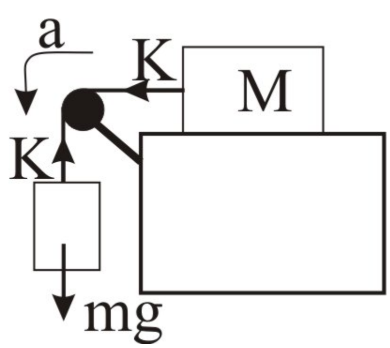
$$ma = mg - K \tag{3.4.1}$$

és

$$Ma = K. \tag{3.4.2}$$

E két egyenletből

$$m = \frac{Ma}{g - a} = 2\,\text{kg} \tag{3.4.3}$$



11. ábra.

adódik.

(b) A kötelet feszítő erő pedig

$$K = \frac{mM}{m+M} g = 16\,\mathrm{N}. \tag{3.4.4}$$

3.5. Feladat: Egy m = 10 kg tömegű kocka egy doboz belsejében, a doboz alján nyugszik. Mekkora erővel nyomja a kocka a doboz alját, ha

(a) a dobozt $a = 6$ m/s^2 gyorsulással függőlegesen felfelé gyorsítjuk,

(b) a doboz szabadon esik (g gyorsulással gyorsul lefelé)?

Megoldás:

(a) Vegyük a gyorsulást felfele pozitívnak. Ekkor a mozgásegyenlet

$$ma = N - mg, \tag{3.5.1}$$

amiből a nyomóerő

$$N = m(g+a) = 160\,\mathrm{N}. \tag{3.5.2}$$

(b) Ha a test szabadon esik, akkor

$$a = -g, \tag{3.5.3}$$

így a támaszerő zérus!

3.6. Feladat: Egy $\alpha = 25^0$ hajlásszögű lejtőre $m = 1,5$ kg tömegű testet helyezünk. A test és a lejtő között $\mu = 0,3$ a csúszási súrlódási együttható. Elindul-e a kezdetben nyugalomban lévő test, ha elengedjük? Ha igen, mekkora a gyorsulása?

Megoldás: A testre ható erőket fel kell bontani lejtő irányú és lejtőre merőleges komponensekre. A súlyerő lejtő irányú komponense

$$mg\sin\alpha,$$

a lejtőre merőleges

$$mg\cos\alpha.$$

Az N támaszerő a lejtőre merőleges és $N = mg\cos\alpha$, az F_s súrlódási erő a lejtővel párhuzamos. A test akkor csúszik meg, ha

$$mg\sin\alpha > \mu mg\cos\alpha, \tag{3.6.1}$$

azaz

$$\mu \leq \mathrm{tg}\alpha. \tag{3.6.2}$$

Mivel itt tg 25^0 = 0,466, a test megcsúszik. A mozgást leíró egyenletek

$$ma = mg\sin\alpha - F_s, \tag{3.6.3}$$

$$N = mg\cos\alpha, \tag{3.6.4}$$

$$F_s = \mu N. \tag{3.6.5}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 1,48\,\mathrm{m/s^2}. \tag{3.6.6}$$

Centripetális erő

3.7. Feladat: Egy $m = 70$ kg tömegű pilóta repülőgépével $R = 1$ km sugarú függőleges síkú pályán $v = 1080$ km/h egyenletes sebességgel köröz. A repülőnek állandóan a teteje néz a körpálya középpontja felé. Mekkora erővel nyomja a pilóta az ülést a körpálya legfelső pontján?

Megoldás: A körpálya legfelső pontjában a pilóta körmozgását az mg súlyerő és a kör közepe felé mutató N támaszerő biztoítja:

$$m\frac{v^2}{R} = mg + N \tag{3.7.1}$$

Ebből az egyenletből az N támaszerő könnyen kifejezhető:

$$N = m\frac{v^2}{R} - mg = 5600\,\mathrm{N}. \tag{3.7.2}$$

A pilóta az ülést ugyanekkora nagyságú, ellentétes irányú erővel nyomja. (A nyomóerő a pilóta súlyának nyolcszorosa.)

3.8. Feladat: (HN 5B-20) Egy gépkocsi $R = 18$ m sugarú, függőleges síkú, kör alakú domboldalon mozog felfelé. A domb tetején a vezető azt tapasztalja, hogy éppen csak érinti az ülést. Mekkora sebességgel haladt a gépkocsi?

Megoldás: A domb tetején két erő hat a vezetőre, melyek biztosítják a vezető körpályán történő mozgását. A kör közepe felé mutató mg súlyerő, valamint az ülés által kifejtett, ellentétes irányú N támaszerő határozzák meg a vezető gyorsulását, mely (feltéve, hogy az autó nem válik el az úttesttől) a centripetális gyorsulással egyenlő:

$$m\frac{v^2}{R} = mg - N. \tag{3.8.1}$$

Határesetben, amikor a vezető éppen csak érinti az ülést, $N \to 0$. A határesethez tartozó sebesség:

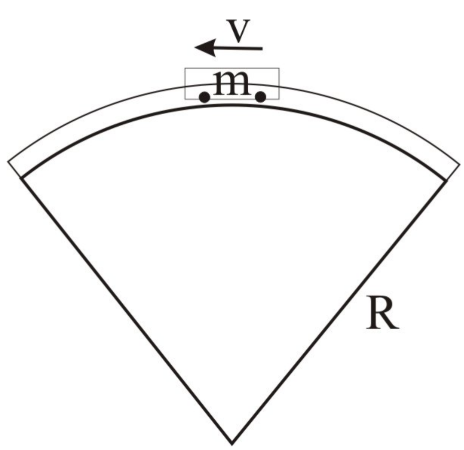
$$v = \sqrt{Rg} \approx 13,41 \text{ m/s}. \tag{3.8.2}$$

3.9. Feladat: (HN 5B-21) A hullámvasút kocsija állandó $v = 6$ m/s-os sebességgel halad át a pálya $R = 6$ m sugarú, függőleges síkú részének tetőpontján a 12. ábrán látható módon. A kocsi és az utasok együttes tömege $m = 1350$ kg.

(a) Mekkora és milyen irányú a kocsi gyorsulása a tetőponton?

(b) Mekkora eredő erő hat ebben a pillanatban a kocsira és az utasokra összesen?

(c) Mekkora erővel nyomja a pálya a kocsit a tetőponton?



12. ábra.

Megoldás:

(a) A kocsi gyorsulása a kör közepe felé (azaz lefelé) mutató centripetális gyorsulással egyenlő, melynek nagysága

$$a = a_{cp} = \frac{v^2}{R} = 6\,\mathrm{m/s^2}. \tag{3.9.1}$$

(b) A kocsira ható erők eredőjét a kocsi gyorsulása határozza meg:

$$F = ma_{cp} = 8100\,\mathrm{N}. \tag{3.9.2}$$

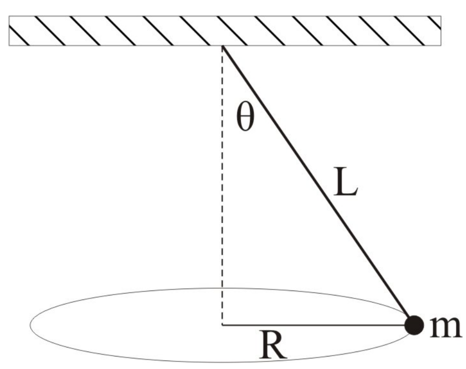
(c) A kocsira ható erők eredője a hullámvasút N támaszerejének és a kocsira ható súlyerőnek a különbsége:

$$F = mg - N. \tag{3.9.3}$$

Felhasználva a centripetális gyorsulás a (3.9.1) kifejezését, valamint a (3.9.2) egyenletet:

$$N = mg - ma_{cp} = 5400\,\mathrm{N}. \tag{3.9.4}$$

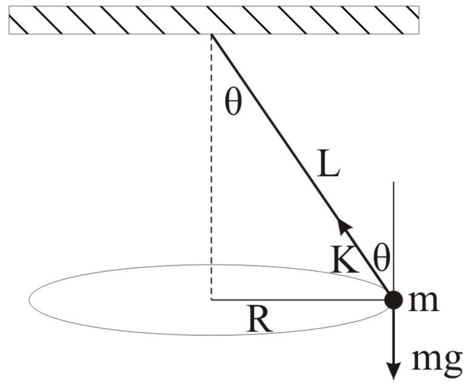
3.10. Feladat: (HN 5B-31) Egy L hosszúságú fonállal a mennyezethez erősített testet a 13. ábrán látható módon úgy hozunk mozgásba, hogy a test vízszintes síkú, R sugarú körpályán mozog, miközben a fonál a függőlegessel θ szöget zár be. Fejezzük ki egy fordulat idejét az L és θ paraméterek függvényében!



13. ábra.

Megoldás: Jelölje K az m tömegű testre ható kötélerő nagyságát (lásd a 14. ábrát). Mivel a tömegpont nem mozdul el függőlegesen, a súlyerő egyensúlyt tart a kötélerő függőleges komponensével:

$$K\cos\theta = mg, \tag{3.10.1}$$



14. ábra.

míg a vízszintes komponens a körpályán történő mozgáshoz biztosítja a szükséges centripetális gyorsulást:

$$K \sin\theta = m\frac{v^2}{R}. \tag{3.10.2}$$

A két egyenletből a tömegpont sebessége (felhasználva, hogy $R = L\sin\theta$)

$$v = \sqrt{gL\sin\theta \operatorname{tg}\theta}. \tag{3.10.3}$$

Egy fordulat ideje

$$T = \frac{2R\pi}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}. \tag{3.10.4}$$

3.11. Feladat: (HN: 5B-32) Egy $L = 1,4$ m hosszú fonálinga függőleges síkban mozog. Amikor az ingatest sebessége $v = 2,2$ m/s, akkor a fonál $\alpha = 20^0$-os szöget zár be a függőlegessel. Határozzuk meg ebben a pillanatban

(a) az ingatest a_{cp} centripetális gyorsulását,

(b) az ingatest a_t tangenciális gyorsulását,

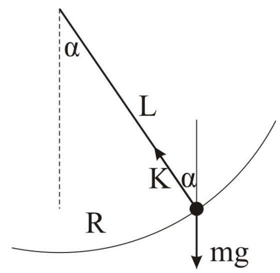
(c) a fonalat feszítő K erőt, ha az ingatest tömege $m = 600$ g!

Megoldás:

(a) A centripetális gyorsulás nagysága:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{L} \approx 3,45\text{m/s}^2. \tag{3.11.1}$$

(b) A tangenciális gyorsulást a súlyerő tangenciális komponense határozza meg (a kötélerő merőleges a körpálya érintőjére, ahogy azt a 15. ábra mutatja):



15. ábra.

$$a_t = g\sin\alpha \approx 3,40\text{m/s}^2. \tag{3.11.2}$$

A körmozgást a K kötélerő és a súlyerő fonálirányú komponense — $mg\cos\alpha$ — különbsége biztosítja. A mozgásegyenlet a radiális komponensekre

$$m\frac{v^2}{L} = K - mg\cos\alpha. \tag{3.11.3}$$

Az egyenletből kifejezhető a K kötélerő:

$$K = m\frac{v^2}{L} + mg\cos\alpha \approx 7,7\text{N}. \tag{3.11.4}$$

Súrlódási erő

3.12. Feladat: Vízszintes asztallapon két tégla fekszik egymáson. Minimálisan mekkora F erővel kell hatni az alsó téglára, hogy az kicsússzon a felső alól? A súrlódási tényező az asztallap és a tégla, valamint a tapadási súrlódási együttható a két tégla között egyaránt $\mu = 0,4$, a két tégla össztömege pedig $m = 5$ kg.

Megoldás: Jelölje a felső test tömegét m_1, az alsó test tömegét pedig m_2. Ekkor $m = m_1 + m_2 = 5$ kg. Mivel a megcsúszás határát keressük, így a két test gyorsulása megegyezik. A felső téglára $F_{s1} = \mu m_1 g$ tapadási erő hat, mellyel a tégla mozgásegyenlete:

$$m_1 a = F_{s1} = \mu m_1 g \tag{3.12.1}$$

Az alsó téglára a felső tégla által kifejtett F_{s1} tapadási erő mellett, az alsó tégla és asztallap között fellépő $F_{s2} = \mu(m_1 + m_2)g$ csúszási súrlódási erő is hat, melyek fékezni próbálják az alsó tégla mozgását. Az alsó tégla mozgásegyenlete:

$$m_2 a = F - \mu m_1 g - \mu(m_1 + m_2)g = F - \mu m_1 g - \mu m g. \tag{3.12.2}$$

Az első egyenletből kifejezve az a gyorsulást

$$a = \mu g \tag{3.12.3}$$

adódik. Ez az m_1 test maximális gyorsulását jelenti. A fenti egyenletből az F erő a minimális értéke

$$F = (m_1 + m_2)a + \mu(m_1 + m_2)g = ma + \mu mg = 2\mu mg = 40\,\mathrm{N}. \tag{3.12.4}$$

Megjegyzés: A feladatmegoldásból látszik, hogy a kérdés megválaszolásához csak az össztömegre volt szükség. Kisebb vagy nagyobb erő alkalmazásakor az egyenletekből levont következtetések módosulhatnak! Ezeknek diszkussziója gyakorló feladat.

3.13. Feladat: Egy autó az országúton nagy sebességgel halad. Az autógumi és az úttest felülete között a tapadási súrlódási együttható $\mu = 0,9$. Az $R = 100$ m sugarú, vízszinten kanyarban mekkora lehet a jármű maximális sebessége, hogy ne sodródjon ki?

Megoldás: A kanyarban az F tapadási súrlódási erő biztosítja az autónak a körmozgáshoz szükséges centripetális gyorsulást:

$$m\frac{v^2}{R} = F. \tag{3.13.1}$$

A maximális tapadási erő $F_{max} = \mu mg$ felső határt szab az autó maximális sebességének is, mely az alábbi egyenlőtlenséggel fejezhető ki:

$$m\frac{v^2}{R} \leq F_{max} = \mu mg. \tag{3.13.2}$$

Maximális sebesség esetén egyenlőség áll fenn az egyenlet két oldala között, ezért a maximális sebesség nagysága:

$$v_{max} = \sqrt{\mu g R}. \tag{3.13.3}$$

Behelyettesítve a számadatokat $v_{max} = 30$ m/s adódik.

3.14. Feladat: Egy régi lemezjátszó korongja 33 $\frac{1}{3}$ fordulatot tesz meg percenként, a "nagylemez" átmérője 30 cm. A forgó lemez legszélére egy kis tárgyat teszünk. Legalább mekkora a kis tárgy és a lemez között a tapadási súrlódási együttható, ha a test nem csúszik meg?

Megoldás: A szögsebessége

$$\omega = 2\pi\frac{33\frac{1}{3}}{60} = 3,49\frac{1}{s}. \tag{3.14.1}$$

A test egyenletes körmozgást végez. Függőleges irányban a súlyerő és a támaszerő egyensúlyban van

$$N = mg. \tag{3.14.2}$$

Körpályán a tapadási súrlódás tartja

$$F_t = mr\omega^2. \tag{3.14.3}$$

Továbbá érvényes, hogy

$$F_t \leq \mu N. \tag{3.14.4}$$

Ezekből a tapadási együtthatóra

$$\mu \geq \frac{\omega^2 r}{g} = 0,19 \tag{3.14.5}$$

adódik.

3.15. Feladat: Egy autó R = 120m sugarú kanyarban halad v_0 = 90km/h sebességgel. A kerekek és a száraz aszfalt között μ = 0,6 a tapadási súrlódási együttható.
(a) Legfeljebb mekkora a_t pálya irányú gyorsulással fékezhet a kanyar közben a vezető?
(b) Mekkora úton tud így megállni, ha a pálya irányú gyorsulása a fékezés közben állandó?
(c) Ezekkel a gumikkal legfeljebb mekkora állandó v_{max} sebességgel lehetne "bevenni" ezt a kanyart?
(d) Miért veszélyes, ha az autó ezzel a maximális sebességgel érkezik a kanyarba?

Megoldás:
(a) A támaszerő és a súlyerő egymással egyensúlyban van, így

$$N = mg. \tag{3.15.1}$$

A gyorsulásnak két komponense van: a pálya irányú a_t (tangenciális) gyorsulás és a kör közepe felé mutató a_{cp} centripetális gyorsulás. Az eredő gyorsulás

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2}, \tag{3.15.2}$$

amelyet a tapadási súrlódás biztosít, azaz

$$ma \leq \mu N = \mu mg. \tag{3.15.3}$$

A tangenciális gyorsulást kifejezve

$$a_t \leq \sqrt{\mu^2 g^2 + a_{cp}^2} = 2,74\,\mathrm{m/s^2}, \tag{3.15.4}$$

amely a maximális érték.

(b) Ha a tangenciális gyorsulás állandó, akkor a megállásig eltelt idő

$$t = \frac{v_0}{a_t} = 9,12\,\mathrm{s}. \tag{3.15.5}$$

A megállásig megtett út

$$s = \frac{1}{2}a_t t^2 = 114\,\mathrm{m}. \tag{3.15.6}$$

(c) Ha az autó nem fékez, akkor $a_t = 0$, így

$$v_{max} = \sqrt{\mu g R} = 26,6\,\mathrm{m/s}. \tag{3.15.7}$$

(d) Mert fékezés esetén az autó kerekei azonnal megcsúsznak, a csúszó kerekek pedig nem kormányozhatók!

3.16. Feladat: (HN 5B-43) Egy gyerek a parttól $s = 12$ m-re áll a befagyott tavacska jegén. Csizmája és a jég közötti tapadási súrlódási együttható $\mu = 0,05$. Határozzuk meg azt a minimális időt, amely alatt kisétálhat a partra, ha megcsúszás nélkül lépked?

Megoldás: A gyerek $F = mg$ erővel nyomja a jeget, ezért csúszás nélkül legfeljebb $a = \mu g$ gyorsulásra képes. Az s út megtételéhez ezért legkevesebb

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{\mu g}} = 6,93\,\mathrm{s} \tag{3.16.1}$$

idő szükséges.

3.17. Feladat: (HN 5B-44) Egy rakodórámpán láda nyugszik. Ha a rámpa szöge $\alpha_1 = 30^0$-os, akkor a láda megcsúszik. Amennyiben a csúszó láda alatt a lejtő hajlásszöge $\alpha_2 = 20^0$-ra csökken, akkor a láda mozgása egyenletessé válik. Határozzuk meg a lejtő és a láda közötti csúszási és tapadási súrlódási együttható értékét!

Megoldás: A feladatban jelölje μ_t a tapadási és μ_{cs} a csúszási súrlódási együtthatót. Nyugalmi helyzetben a tapadási súrlódási erő egyensúlyt tart a súlyerő lejtővel párhuzamos komponensével, ezért

$$ma = 0 = mg\sin\alpha_1 - \mu_t mg\cos\alpha_1. \tag{3.17.1}$$

Az egyenletből

$$\mu_t = \mathrm{tg}\,\alpha_1 \approx 0,577 \tag{3.17.2}$$

tapadási súrlódási együttható adódik. Egyenletes mozgás esetén a súlyerő lejtővel párhuzamos komponense a csúszási súrlódási együtthatóval tart egyensúlyt:

$$ma = 0 = mg\sin\alpha_2 - \mu_{cs} mg\cos\alpha_2. \tag{3.17.3}$$

Az egyenletből

$$\mu_{cs} = \mathrm{tg}\,\alpha_2 \approx 0,364. \tag{3.17.4}$$

csúszási súrlódási együttható adódik.

3.18. Feladat: (HN 5B-46) Az $m = 5$ kg-os tömegű test lecsúszik a vízszintessel $\alpha = 41^0$ szöget bezáró lejtőn. A test és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható $\mu = 0,3$.
(a) Határozzuk meg a súrlódási erő nagyságát!
(b) Mekkora gyorsulással csúszik le a test?

Megoldás:
(a) A lejtőn lecsúszó testre ható N támaszerő (kényszererő) egyensúlyt tart a súlyerő lejtőre merőleges komponensével, ezért $N = mg\cos\alpha$. A csúszási súrlódási erő pedig

$$F_s = \mu N = \mu mg\cos\alpha \approx 11,32\ \mathrm{N}. \tag{3.18.1}$$

(b) A test lejtővel párhuzamos mozgását a súlyerő lejtővel párhuzamos komponense és a súrlódási erő határozzák meg:

$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha, \tag{3.18.2}$$

ahonnan a test gyorsulása

$$a = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha \approx 4,3\ \mathrm{m/s}^2. \tag{3.18.3}$$

3.19. Feladat: (HN 5B-47) A vízszintessel $\alpha = 60^0$-os szöget bezáró lejtőn egy test $a = g/2$ gyorsulással csúszik le. Mekkora a csúszó súrlódási együttható?

Megoldás: A lejtővel párhuzamos mozgást leíró dinamikai egyenlet:

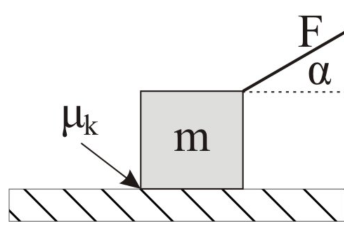
$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha. \tag{3.19.1}$$

Behelyettesítve a gyorsulás értékét a súrlódási együttható az alábbi alakban fejezhető ki:

$$\mu = \frac{\sin\alpha - \frac{1}{2}}{\cos\alpha}. \tag{3.19.2}$$

Behelyettesítve a számadatokat $\mu \approx 0,732$ adódik a súrlódási együttható értékére.

3.20. Feladat: (HN 5B-52) Egy $m = 4$ kg tömegű testet a 16. ábrának megfelelően $F = 20$ N erővel húzunk ($\alpha = 30^0$). Mekkora a test gyorsulása, ha a test és talaj közötti csúszási súrlódási együttható $\mu_k = 0,2$?



16. ábra.

Megoldás: Mivel a test nem emelkedik fel a talajról a függőleges gyorsulása zérus. Ezért

$$0 = N + F\sin\alpha - mg, \tag{3.20.1}$$

ahol N a testre ható támaszerő. Írjuk fel a mozgás vízszintes vetületére vonatkozó mozgásegyenletet!

$$ma = F\cos\alpha - F_s, \tag{3.20.2}$$

ahol F_s a testre ható súrlódási erő, melyet az N támaszerő segítségével határozhatunk meg:

$$F_s = \mu_k N. \tag{3.20.3}$$

Az egyenletrendszer megoldásából a test gyorsulása meghatározható:

$$a = \frac{F(\cos\alpha + \mu_k\sin\alpha)}{m} - \mu_k g. \tag{3.20.4}$$

Behelyettesítve a számadatokat $a \approx 2,83$ m/s^2 adódik.

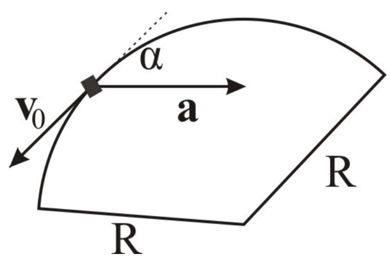
3.21. Feladat: (HN 5B-58) Egy gépkocsi $R = 80$ m sugarú vízszintes körpályán mozog. A 17. ábra azt a pillanatot mutatja, amikor az autó sebessége éppen $v_0 = 10$ m/s és a gyorsulása **a**, mely a körpálya érintőjével $\alpha = 35^0$-os szöget zár be.

(a) Mekkora a gépkocsi centripetális gyorsulása?

(b) Mekkora a tangenciális gyorsulás?

(c) Mekkora utat tesz meg a gépkocsi a megállásig, ha az érintő menti gyorsulása állandó?

(d) Az úttest vízszintes, azaz a kanyarban nem túlemelt pálya. Mekkora minimális nyugalmi súrlódási együttható szükséges ahhoz, hogy az ábrán mutatott pillantban a gépkocsi ne csússzon meg?



17. ábra.

Megoldás:

(a) A centripetális gyorsulás az autó sebességének és a kanyar görbületi sugarának segítségével határozható meg:

$$a_{cp} = \frac{v_0^2}{R}. \tag{3.21.1}$$

Behelyettesítve a számadatokat $a_{cp} = 1,25$ m/s^2 adódik.

(b) Az ábra segítségével meghatározhatjuk az **a** gyorsulásvektor nagyságát is. Felhasználva, hogy az **a** vektor sugár irányú vetülete éppen a centripetális gyorsulás, az eredő gyorsulás nagysága

$$a = |\mathbf{a}| = \frac{a_{cp}}{\sin\alpha}. \tag{3.21.2}$$

A tangenciális gyorsulás pedig az

$$a_t = a\cos\alpha = \frac{a_{cp}}{\mathrm{tg}\,\alpha} \tag{3.21.3}$$

összefüggéssel határozható meg. Behelyettesítve a számadatokat $a_t \approx 1,79$ m/s^2 adódik.

(c) Amennyiben a kocsi lassul, de a tangenciális gyorsulása állandó, a kocsi megállásáig megtett út meghatározható az alábbi összefüggésből:

$$s = v_0 t_0 - \frac{1}{2} a_t t_0^2, \tag{3.21.4}$$

ahol $t_0 = v_0/a_t$ a megállásig eltelt idő. Behelyettesítve a számadatokat $s \approx 27,9$ m adódik a megállásig megtett út hosszára.

(d) A dinamika alapegyenlete szerint

$$ma = F_s = \mu mg, \tag{3.21.5}$$

amelyből a minimális súrlódási együttható, mely mellett a kocsi még épp nem csúszik meg, $\mu \approx 0,218$.

3.22. Feladat: * A vízszintes asztalon m tömegű test nyugszik. A test és az asztallap közötti súrlódási együttható μ. (A tapadási és csúszási súrlódási együttható legyen azonos.) A testre a $t = 0$ időpillanattól kezdve $F(t) = f_0 t$ erővel hatunk.
(a) Mi az f_0 együttható mértékegysége?
(b) Mikor indul el a test?
(c) Mekkora lesz a test sebessége a t időpillanatban?

Megoldás:
(a) Az f_0 együttható mértékegysége N/s, mivel idő dimenziójú mennyiséggel megszorozva erő dimenziójú mennyiséget kell, hogy kapjunk.
(b) A test abban a t_0 pillanatban indul el, amikor a rá ható erő eléri a tapadási erő maximumát, azaz $F(t_0) = f_0 t_0 = \mu mg$, ahonnan

$$t_0 = \frac{\mu mg}{f_0}. \tag{3.22.1}$$

(c) A test mozgásegyenlete a megmozdulás pillanatát követő $t \geq t_0$ időintervallumban:

$$ma = f_0 t - \mu mg \tag{3.22.2}$$

Az egyenletből kifejezhetjük a gyorsulást az idő függvényében:

$$a(t) = \frac{f_0}{m} t - \mu g. \tag{3.22.3}$$

A sebességet a gyorsulás idő szerinti integrálásával határozhatjuk meg:

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} a(t')\,\mathrm{d}t' \int_{t_0}^{t} \left(\frac{f_0}{m} t' - \mu g\right) \mathrm{d}t' = \frac{1}{2}\frac{f_0}{m} t^2 - \mu g t + \frac{1}{2}\frac{\mu^2 m g^2}{f_0}. \tag{3.22.4}$$

Tehát a test sebessége:

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha: } t \leq t_0 \\ \frac{1}{2}\frac{f_0}{m} t^2 - \mu g t + \frac{1}{2}\frac{\mu^2 m g^2}{f_0} & \text{ha: } t > t_0 \end{cases}. \tag{3.22.5}$$

3.23. Feladat: Egy függőleges tengelyű korong ω_0 szögsebességgel forog. A korong közepétől R távolságban m tömegű test helyezkedik el. A korong és a test között μ tapadási súrlódási együttható van. A korong egyenletes lassulásba kezd β szöggyorsulással. Legalább mekkora legyen a tapadási súrlódási együttható, hogy a test ne csússzon meg?

Megoldás: A korong szögsebessége az

$$\omega(t) = \omega_0 - \beta t \tag{3.23.1}$$

függvény szerint változik. Ezért a korongon lévő test centripetális gyorsulása

$$a_{cp} = R\omega(t)^2 = R(\omega_0 - \beta t)^2. \tag{3.23.2}$$

A test tangenciális gyorsulása pedig

$$a_t = R\beta. \tag{3.23.3}$$

A test eredő gyorsulása

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}, \tag{3.23.4}$$

melyet a tapadási erő biztosít a test számára. A tapadás feltétele, hogy

$$\mu mg \geq ma = m\sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}. \tag{3.23.5}$$

A tapadási súrlódási együttható ezért:

$$\mu \geq \frac{\sqrt{R^2(\omega_0 - \beta t)^4 + (R\beta)^2}}{g}. \tag{3.23.6}$$

A legnagyobb tapadás a lassulás kezdeti pillanatában szükséges, ezért a minimális tapadási együttható

$$\mu_{min} = R\frac{\sqrt{\omega_0^4 + \beta^2}}{g}. \tag{3.23.7}$$

3.24. Feladat: Egy $\omega_0 = 6$ 1/s szögsebességű, $R = 0,2$ m sugarú függőleges tengelyű korong peremén van egy m tömegű test. A korong $\beta = 2$ 1/s^2 szöggyorsulással lassul, majd megáll.
(a) Mennyi idő alatt állt meg?
(b) Mennyi volt a korong szögelfordulása?
(c) Mennyi utat tett meg az m tömegű test?
(d) Legalább mekkora μ súrlódási együttható kell, hogy legyen a korong és az m tömegű test között, hogy a test ne csússzon le a korongról?

Megoldás:
(a) Az

$$\omega_0 = \beta t \tag{3.24.1}$$

összefüggésből következik, hogy a megállás ideje $t = 3$ s.
(b) Ezalatt a φ szögelfordulás

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{1}{2}\beta t^2 = 9\,\mathrm{rad}. \tag{3.24.2}$$

(c) A megtett út

$$s = R\varphi = 1,8\,\mathrm{m}. \tag{3.24.3}$$

(d) A test gyorsulása az $a_t = R\beta$ tangenciális és az $a_{cp} = R\omega^2$ centripetális gyorsulásból áll. Ez utóbbi a kezdeti idopontban a legnagyobb, így a maximális súrlódási együttható kiszámolásásnál ezzel az értékkel kell számolni. Az eredő gyorsulás nagysága:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2} = \sqrt{R^2\beta^2 + R^2\omega^4}. \tag{3.24.4}$$

A testet a súrlódási erő mozgatja, így

$$ma = \mu mg, \tag{3.24.5}$$

amelybe behelyettesítve kapjuk:

$$\mu = \frac{1}{g}\sqrt{R^2\beta^2 + R^2\omega^4} = 0,72. \tag{3.24.6}$$

3.25. Feladat: Tuskót helyezünk állóhelyzetből felgyorsuló vízszintes forgóasztalra tengelyétől 10 cm távolságban. A forgóasztal $2/3$ s alatt éri el a 2 rad/s szögsebességet és ekkor a tuskó csúszni kezd. Mekkora a tapadási súrlódási erő a tuskó és az asztal között?

Megoldás: A tuskó szöggyorsulása

$$\beta = \frac{\omega}{t} = 3\,\mathrm{rad/s}^2, \tag{3.25.1}$$

a kerületi sebessége

$$v = R\omega = 0,2\,\mathrm{m/s}. \tag{3.25.2}$$

A test eredő gyorsulása a centripetális és tangenciális gyorsulásokból tevődik össze:

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} = \sqrt{R^2\omega^4 + R^2\beta^2}. \tag{3.25.3}$$

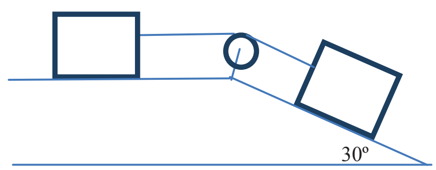
Ezt a gyorsulást a μmg tapadási súródási erő biztosítja:

$$\mu mg = ma = m\sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} = m\sqrt{R^2\omega^4 + R^2\beta^2}. \tag{3.25.4}$$

Innen a tapadási súrlódási együttható:

$$\mu = \frac{1}{g}\sqrt{R^2\omega^4 + R^2\beta^2} = 0,05. \tag{3.25.5}$$

3.26. Feladat: A 18. ábrán két, egyenként $m = 40$ kg tömegű test van összekapcsolva. A súrlódási együttható mindkét testre $\mu = 0,15$. Határozzuk meg a testek gyorsulását és a fonálban ébredő K kötélerőt!



18. ábra.

Megoldás: Jelölje a a testek gyorsulását. (Mivel a kötél nem nyúlik meg, mindkét test azonos gyorsulással mozog) A balodali test mozgásegyenlete

$$ma = K - \mu mg, \tag{3.26.1}$$

míg a lejtőn fekvő test mozgásegyenlete

$$ma = mg\sin\alpha - K - \mu mg\cos\alpha \tag{3.26.2}$$

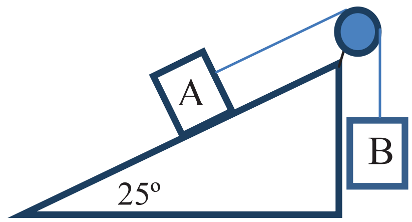
A két egyenletből meghatározható a testek gyorsulása:

$$a = \frac{1}{2}(g\sin\alpha - \mu g - \mu g\cos\alpha). \tag{3.26.3}$$

Behelyettesítve a számadatokat $a \approx 1,1$ m/s^2 adódik. A kötélerőt a (3.26.1) egyenlet segítségével határozhatjuk meg:

$$K = ma + \mu mg = \frac{\sin\alpha + \mu - \mu\cos\alpha}{2} mg. \tag{3.26.4}$$

Behelyettesítve a számadatokat $K \approx 104$ N adódik.



19. ábra.

3.27. Feladat: A vízszintessel $\alpha = 25^0$-os szöget bezáró lejtőn nyugalmi helyzetből indulva $m_A = 30$ kg tömegű testet a 19. ábrán látható módon $m_B = 20$ kg tömegű test húz felfelé. A súrlódási együttható $\mu = 0,2$.

(a) Számoljuk ki a testek gyorsulását!

(b) Számoljuk ki a testek által $t_0 = 2$ s alatt megtett utat!

Megoldás:

(a) Jelölje K a kötélet feszítő erőt és a a testek gyorsulását. A testek mozgásegyenlete:

$$m_A a = K - m_A g \sin\alpha - \mu m_A g \cos\alpha \tag{3.27.1}$$

és

$$m_B a = m_B g - K. \tag{3.27.2}$$

E két egyenletből a gyorsulás kifejezhető:

$$a = \frac{m_B - m_A \sin\alpha - \mu m_A \cos\alpha}{m_A + m_B} g. \tag{3.27.3}$$

Behelyettesítve a számadatokat $a \approx 0,376$ m/s^2 adódik.

(b) A testek által megtett út t_0 idő alatt, amennyiben a testek nyugalmi helyzetből indulnak:

$$s = \frac{1}{2} a t_0^2. \tag{3.27.4}$$

Behelyettesítve a számadatokat $s \approx 75,3$ cm adódik.

3.28. Feladat: Az α hajlásszögű lejtőn a gyorsulással lefele csúszik a k direkcióerejű rugóval összekötött m_1 és m_2 tömegű testekből álló rendszer, mégpedig úgy, hogy az m_1 megy elől. A lejtő és a testek közötti súrlódási tényező rendre μ_1 és μ_2.

(a) Fejezzük ki a rendszer gyorsulását.

(b) Mekkora a rugó megnyúlása?

Megoldás: Jelölje F_r az ebredő rugóerőt. Legyen a koordinátarendszer x tengelye lejtőirányú.
(a) E koordinátarendszer irányítás mellett két test mozgásegyenlete sorban

$$m_1 a = m_1 g \sin\alpha - \mu_1 m_1 g \cos\alpha - F_r \tag{3.28.1}$$

és

$$m_2 a = m_2 g \sin\alpha - \mu_2 m_2 g \cos\alpha + F_r. \tag{3.28.2}$$

A két egyenletből a

$$a = \frac{(m_1 + m_2) g \sin\alpha - (\mu_1 m_1 g \cos\alpha + \mu_2 m_2 g \cos\alpha)}{m_1 + m_2}. \tag{3.28.3}$$

gyorsulás adódik.
(b) A gyorsulás visszahelyettesítésével a kapott rugóerő

$$F_r = (\mu_2 - \mu_1) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \cos\alpha. \tag{3.28.4}$$

Ezzel a rugó megnyúlása

$$\Delta l = \frac{F_r}{k} = \frac{1}{k} (\mu_2 - \mu_1) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \cos\alpha. \tag{3.28.5}$$

Látható, hogy ha $\mu_2 > \mu_1$, akkor a rugó megnyúlik, mert $\Delta l > 0$; ellenkező esetben összenyomódik. Ha a kettő egyenlő egymással, akkor a megnyúlás zérus.

Közegellenállási erők

3.29. Feladat: Az R sugarú vasgolyó vízben süllyed. Ismeretes, hogy hosszabb idő elteltével közegben a testek állandó sebességgel esnek. Sebességgel arányos közegellenállást feltételezve mekkora lesz a vasgolyó v végsebessége? Az arányossági tényező legyen: $c = 6\pi\eta R$ (Stokes-féle ellenállás; kis sebességek eseteire), ahol η a közeg viszkozitása, R a közegben mozgó golyó sugara.

Megoldás: Jelölje ϱ_{Fe} a vas, míg ϱ_{H_2O} a víz sűrűségét. A koordinátatengely mutasson lefele! (Ez a pozitív irány.) A testre három erő hat. Az

$$mg = \varrho_{Fe} \frac{4R^3\pi}{3} g$$

nehézségi erő, amely most pozitív; a pillanatnyi sebességgel ellentétes közegellenállás, amely – mivel a test süllyed, tehát v pozitív –, azért a közegellenállási erő negatív:

$$-cv = -6\pi\eta R v;$$

valamint a felhajtó erő, amely felfele mutat

$$-\varrho_{H_2O}\frac{4R^3\pi}{3}g,$$

így most negatív. Mivel azt az esetet vizsgáljuk, amikor a test már állandó sebességgel süllyed, így tudjuk, hogy a testre ható erők eredője zérus. Felírhatjuk tehát a következő egyenletet

$$0=\varrho_{Fe}\frac{4R^3\pi}{3}g-6\pi\eta Rv-\varrho_{H_2O}\frac{4R^3\pi}{3}g, \tag{3.29.1}$$

amelyből a kérdezett v sebesség

$$v=(\varrho_{Fe}-\varrho_{H_2O})\frac{2R^2}{9\eta}g. \tag{3.29.2}$$

Megjegyzés: Ez a számolás az alapja annak a módszernek, amellyel a folyadékok viszkozitását meg lehet határozni.

3.30. Feladat: Az m tömegű golyó levegőben esik a homogén nehézségi erőtérben. A golyóra a sebesség négyzetével arányos közegellenállás hat. (Az arányossági tényezőt jelöljük c'-vel.) Mekkora a golyó végsebessége? (A felhajtóerőtől tekintsünk el.)

Megoldás: Amikor a test eléri végsebességét, akkor a ráható erők eredője zérus, így — lefele mutató koordinátatengely irányítást véve — a

$$0=mg-c'v^2 \tag{3.30.1}$$

összefüggés írható fel. Ebből a végsebesség

$$v=\sqrt{\frac{mg}{c'}}. \tag{3.30.2}$$

3.31. Feladat: Igen magasról leejtünk egy R sugarú, ϱ sűrűségű homogén golyót. A zuhanó testre ható közegellenállási erő az $F_k=KAv^2$ összefüggéssel számolható, ahol v a test sebessége, A a test haladási irányra merőleges keresztmetszete, K pedig ismert arányossági tényező.

(a) Mekkora a golyó tömege? (R függvényében)

(b) Vázlatosan ábrázolja a test sebesség-idő függvényét!

(c) Mekkora lesz a zuhanó golyó állandósult sebessége? (R függvényében)

(d) Állandósult sebesség mellett mekkora a közegellenállási erő teljesítménye (R függvényében)

(e) Az elejtett test az állandósult sebességet h út megtétele után eléri. Mekkora volt a közegellenállási erő munkája a h út megtétele során? (A munkavégzés kiszámolásával kapcsolatos feladatok a 4. fejezetben találhatók.)

Megoldás:

3.32. Feladat: ** Az m tömegű testet a koordinátarendszer origójából v_0 sebességgel a vízszinteshez képest α szöggel elhajítunk a homogén nehézségi erőtérben. A testre az $\mathbf{F}_k = -c\mathbf{v}$ sebességgel arányos közegellenállás is hat, ahol c konstans arányossági tényező.)
(a) Írjuk fel a mozgásegyenletet!
(b) Határozzuk meg a sebességkomponensek időbeli változását!
(c) Határozzuk meg a test helyét, mint az idő függvényét!
(d) Határozzuk meg a pálya alakját!

Megoldás: Amennyiben az y tengely pozitív iránya felfelé mutat, a nehézségi gyorsulás vektora a $\mathbf{g} = (0, -g)$ alakban adható meg. A gyorsulás és sebesség vektorok pedig rendre $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ és $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ alakúak. A $t_0 = 0$ időpillanatban a kezdeti sebességkoponensek $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ valamint $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$. Mivel a koordináta-rendszer origóját a hajítás helyére tesszük, a kezdeti pozíció koordinátáit jelöljék $x_0 = 0$ és $y_0 = 0$.
(a) Az elhajított testre két erő hat, az $m\mathbf{g}$ súlyerő valamint a $-c\mathbf{v}$ közegellenállási erő. A dinamika alaptörvénye (Newton II. axiómája) szerint a test mozgásegyenlete

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - c\mathbf{v}. \tag{3.32.1}$$

Írjuk fel az $\mathbf{a}$ vektor x és y komponenseire vonatkozó skaláregyenleteket. Felhasználva, hogy $a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$ és $a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$, az

$$ma_x = m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -cv_x \tag{3.32.2}$$

és

$$ma_y = m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -mg - cv_y \tag{3.32.3}$$

egyenleteket kapjuk.
(b) A (3.32.2) és (3.32.3) egyenletek egymástól függetlenek (azaz nem csatolt differenciálegyenlet-rendszert írnak le), aminek köszönhetően szeparált egyenleteket kapunk a mozgás x és y vetületére. A (3.32.2) egyenletben szeparálva a változókat és idő szerint integrálva az egyenletet:

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{\mathrm{d}v_x}{v_x} = -\frac{c}{m} \int_{t_0=0}^{t} \mathrm{d}t'. \tag{3.32.4}$$

Az integrálások elvégzése után

$$\ln\frac{v_x(t)}{v_{0x}} = -\frac{c}{m}t \tag{3.32.5}$$

adódik, ahonnan a sebesség x komponense

$$v_x(t) = v_{0x}e^{-\frac{c}{m}t}. \tag{3.32.6}$$

Hasonló módon a (3.32.3) egyenletben is szeparáljuk az integrálási változókat:

$$m\int_{v_{0y}}^{v_y}\frac{\mathrm{d}v_y}{mg+cv_y} = -\int_{t_0=0}^{t}\mathrm{d}t'. \tag{3.32.7}$$

Az integrálás elvégzésével az

$$\frac{m}{c}\ln\frac{mg+cv_y(t)}{mg+cv_{0y}} = -t, \tag{3.32.8}$$

összefüggéshez jutunk, melyből az y irányú sebességkomponens

$$v_y(t) = \frac{mg+cv_{0y}}{c}e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c}. \tag{3.32.9}$$

Megjegyzés: Belátható, hogy a $c \longrightarrow 0$ határesetben a megoldások a ferde hajításra érvényes $v_x(t) = v_{0x}$ illetve $v_y(t) = v_{0y} - gt$ megoldásokba tartanak. Ennek igazolását az olvasóra bízzuk.

(c) A test helykoordánátáit a sebesség idő szerinti integrálásával számolhatjuk ki, azaz

$$x(t) = \int\limits_{t_0=0}^{t} v_{0x}e^{-\frac{c}{m}t'}\mathrm{d}t' = \left[-\frac{m}{c}v_{0x}e^{-\frac{c}{m}t'}\right]_{t_0=0}^{t} = \frac{m}{c}v_{0x}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right) \tag{3.32.10}$$

és

$$y(t) = \int\limits_{t_0=0}^{t}\left(\frac{mg+cv_{0y}}{c}e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c}\right)\mathrm{d}t' = \left[-\frac{m}{c}\frac{mg+cv_{0y}}{c}e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c}t\right]_{t_0=0}^{t}$$

$$= \frac{m}{c}\frac{mg+cv_{0y}}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c}t\right). \tag{3.32.11}$$

Megjegyzés: Belátható, hogy a $c \longrightarrow 0$ határesetben a megoldások a ferde hajításra érvényes $x(t) = v_{0x}t$ illetve $y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ megoldásokhoz tartanak. Ezeknek igazolását az olvasóra bízzuk.

(d) A pályagörbe alakját megkapjuk, ha a (3.32.10) egyenletből kiküszöböljük a t időváltozót:

$$t = -\frac{m}{c}\ln\left(1-\frac{cx}{mv_{0x}}\right). \tag{3.32.12}$$

Ezt behelyettesítve a (3.32.11) egyenletbe

$$y(x) = \frac{mg+cv_{0y}}{cv_{0x}}x + \frac{m^2g}{c^2}\ln\left(1-\frac{cx}{mv_{0x}}\right) \tag{3.32.13}$$

adódik. Ezt a pályáját ballisztikus pályának nevezik. *Megjegyzés:* Belátható, hogy a $c \longrightarrow 0$ határesetben a megoldás egy parabola pálya. Másfelől a logaritmus függvény argumentumát megvizsgálva látható, hogy a

$$1 > \frac{cx}{mv_{0x}} \tag{3.32.14}$$

relációnak fenn kell állnia. Innen következik, hogy

$$x < \frac{mv_{0x}}{c}, \tag{3.32.15}$$

azaz ennél az x távolságnál soha nem megy messzebb a test.

3.33. Feladat: ** Az m tömegű testet h magasságban elejtjük. A testre az $\mathbf{F}_k = -c\mathbf{v}$ sebességgel arányos közegellenállás is hat. (A c konstans arányossági tényező.)

(a) Írjuk fel a mozgásegyenletet!

(b) Határozzuk meg a sebességének időbeli változását!

(c) Határozzuk meg a test helyét, mint az idő függvényét!

Megoldás: Amennyiben a függőleges tengely pozitív iránya felfelé mutat, a nehézségi gyorsulás a negatív irányba gyorsítja az elejtett testet, melyre két erő hat, az $m\mathbf{g}$ súlyerő valamint a $-c\mathbf{v}$ közegellenállási erő. A dinamika alaptörvénye (Newton II. axiómája) szerint a test mozgásegyenlete

$$ma = -mg - cv. \tag{3.33.1}$$

Felhasználva, hogy $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, az

$$ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg - cv \tag{3.33.2}$$

egyenletet kapjuk.

(a) Szeparáljuk a (3.33.2) egyenletben az integrálási változókat, majd végezzük el az integrálás műveletét:

$$m\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{mg + cv} = -\int_{t_0=0}^t \mathrm{d}t'. \tag{3.33.3}$$

Az integrálás elvégzésével az

$$\frac{m}{c}\ln\frac{mg + cv(t)}{mg} = -t, \tag{3.33.4}$$

összefüggéshez jutunk, melyből a sebesség kifejezhető:

$$v(t) = \frac{mg}{c}e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c}. \tag{3.33.5}$$

(b) A test helykoordinátáját a sebesség idő szerinti integrálásával számolhatjuk ki, azaz

$$z(t) = \int\limits_{t_0=0}^{t} \left(\frac{mg}{c}e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c}\right) \mathrm{d}t' = \left[-\frac{m}{c}\frac{mg}{c}e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c}t\right]_{t_0=0}^{t}$$

$$= \frac{m}{c}\frac{mg}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right) - \frac{mg}{c}t. \quad (3.33.6)$$

4. Feladatok munkavégzés és konzervatív erőterek tárgyköréből. Munkatétel

Munkavégzés, teljesítmény

4.1. Feladat: (HN 6B-8) Egy rugót nyugalmi állapotból 4 J munka árán 10 cm-rel nyújthatunk meg. Mekkora munkavégzés szükséges további 10 cm-rel való megnyújtásához, ha a Hooke-törvény mindvégig érvényben marad?

Megoldás: Két megnyúlás van. Az első $\Delta l = l_1 - l_0 = 10$ cm, amelyre felírható, hogy

$$W = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2. \quad (4.1.1)$$

Innen a k rugóállandó értéke kifejezhető

$$k = \frac{2W}{(\Delta l)^2} = 800\,\mathrm{N/m}. \quad (4.1.2)$$

A további $l_2 = 10$ cm nyújtáshoz szükséges munkavégzés

$$\Delta W = \frac{1}{2}k(l_2+\Delta l)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = 12\,\mathrm{J}. \quad (4.1.3)$$

4.2. Feladat: * (HN 6B-10) Egy rugó által kifejtett erő a Hooke-törvény helyett az $F = -kx^3$ törvény szerint változik, ahol $k = 200$ N/m^3. Mennyi munkát végzünk, míg 0,1 m-ről 0,3 m-re nyújtjuk?

Megoldás: A rugó végét $F'(x) = kx^3$ erővel kell húznunk, így a munka definíciója alapján az általunk végzett munka:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F'(x)\,dx = \int_{x_1=0,1}^{x_2=0,3} kx^3\,dx = \left[\frac{1}{4}kx^4\right]_{x_1=0,1}^{x_2=0,3} = 0,4\mathrm{J} \quad (4.2.1)$$

integrállal számolható ki.

4.3. Feladat: * (HN 6B-27) A 200 N súlyú gyerek nyugalmi helyzetben lévő, 3 m-es kötelű hintán ül. A gyerek barátja húzza oldalra, hogy a hinta kötele 36^0-os szöget alkosson a függőlegessel. Határozzuk meg mekkora munkára volt ehhez szükség! A feladatot a munka definíciójának felhasználásával oldja meg!

Megoldás: Jelölje K a kötélerőt, α a kötél függőlegessel bezárt szögét, m a gyerek tömegét. Első lépésként azt a szögfüggő erőt kell meghatározni, amellyel a barátja F erővel vízszintes irányban húzza. Mivel egyensúlyi állapotokon keresztüli mozgásról van szó az erőkre felírhatjuk, hogy a függőleges komponensekre

$$K\cos\alpha = mg, \tag{4.3.1}$$

a vízszintes komponensekre

$$K\sin\alpha = F. \tag{4.3.2}$$

Innen az F erő:

$$F = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha. \tag{4.3.3}$$

A vízszintes irányú elmozdulás két szöghöz $\alpha + \mathrm{d}\alpha$ és az α szögekhez tartozó tartozó x koordináták különbsége, azaz

$$\mathrm{d}x = l\sin(\alpha+\mathrm{d}\alpha) - l\sin\alpha = l\cos\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha, \tag{4.3.4}$$

ahol felhasználtuk, hogy kis szögekre érvényesek a

$$\cos(\mathrm{d}\alpha) = 1, \tag{4.3.5}$$

$$\sin(\mathrm{d}\alpha) = \mathrm{d}\alpha \tag{4.3.6}$$

közelítések. Az elemi munka kifejezése

$$\mathrm{d}W = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha\cdot l\cos\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha = mgl\sin\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha. \tag{4.3.7}$$

amellyel a teljes végzett munka:

$$W = \int_0^{\alpha} mgl\sin\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha = mgl(1-\cos\alpha). \tag{4.3.8}$$

4.4. Feladat: (HN 6B-39) Egy 48 km/h sebességgel egyenletesen haladó gépkocsira a légellenállás 900 N erővel hat. Mekkora teljesítménnyel dolgozik a motor a légellenállás leküzdésére?

Megoldás: A teljesítmény

$$P = \frac{dW}{dt}, \tag{4.4.1}$$

ahol a dW elemi munka

$$dW = \mathbf{F}\, d\mathbf{r}. \tag{4.4.2}$$

Ezt behelyettesítve a teljesítmény

$$P = \mathbf{F}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{v} = 12000\,\mathrm{W}. \tag{4.4.3}$$

4.5. Feladat: (HN 6C-57) Egy testet a koordinátarendszer origójából egyenes vonalban állandó $\mathbf{F} = f_1\hat{\mathbf{x}} + f_2\hat{\mathbf{y}}$ ($f_1 = 2$N; $f_2 = 4$N) erővel az $\mathbf{r} = s_1\hat{\mathbf{x}} + s_2\hat{\mathbf{y}}$ ($s_1 = 1$m; $s_2 = 5$m) helyre viszünk. (Az egyenesvonalú egyenletes mozgás fenntartásához természetesen egyéb kényszererők is fellépnek.) Határozzuk meg az $\mathbf{F}$ erő munkáját

(a) közvetlenül az $\mathbf{F}\Delta\mathbf{r}$ skaláris szorzattal,

(b) az $|\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\theta$ szorzattal!

Megoldás:

(a) A munkát a skaláris szorzattal számolva

$$W = f_1 s_1 + f_2 s_2 = 22\,\mathrm{J} \tag{4.5.1}$$

adódik.

(b) Az erő nagysága $|\mathbf{F}| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{20}$ N, míg az elmozdulás nagysága $|\Delta\mathbf{r}| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \sqrt{26}$ m. A két vektor által bezárt szög

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{F}\Delta\mathbf{r}}{|\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|} = \frac{22}{\sqrt{20}\sqrt{26}}. \tag{4.5.2}$$

A kiszámolt értékeket összeszorozva $W = |\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\theta = 22$ J.

4.6. Feladat: * (HN 6C-58) Egy fiú a $m_0 = 3$ kg tömegű, $l_0 = 2$ m hosszúságú hajlékony láncot egyik végénél fogva úgy tartja, hogy a másik vége éppen a leér a földre.

(a) Határozzuk meg, hogy miként változik a gyerek által kifejtett erő, ha a láncot egyenletes sebességgel s távolsággal lejjebb ereszti!

(b) A $W = \sum_i \mathbf{F}_i \Delta \mathbf{s}_i$ összegzés vagy a $W = \int \mathbf{F} d\mathbf{s}$ integrál felhasználásával számítsuk ki azt a munkát, amit a gyerek végez, míg a teljes láncot a földre ereszti!

Megoldás:

(a) Jelölje $\lambda = \frac{m_0}{l_0}$ a hosszegységenkénti tömeget. Az s távolsággal lejjebb eresztett lánc azon részének tömege, amelyet még tartani kell:

$$m(s) = m_0 - \lambda s = m_0 - \frac{m_0}{l_0} s. \tag{4.6.1}$$

Az ehhez szükséges erő:

$$F(s) = \left(m_0 - \frac{m_0}{l_0} s \right) g, \tag{4.6.2}$$

amely felfele mutat.

(b) (α) A gyerek által végzett munka a görbe alatti terület kiszámolásával. Mivel az $F(s)$ erő az s távolság lineáris függvénye, így az $F(s)$ egyenes, valamint az x és az y tengely által határolt derékszögű háromszög területét kell kiszámolni. A háromszög alapja l_0, a magassága $F(s=0) = m_0 g$, így a terület $\frac{1}{2} m_0 g l_0$. Figyelembe véve, hogy az elmozdulás a ható erővel ellentétes előjelű a végzett munka:

$$W = -\frac{1}{2} m_0 g l_0. \tag{4.6.3}$$

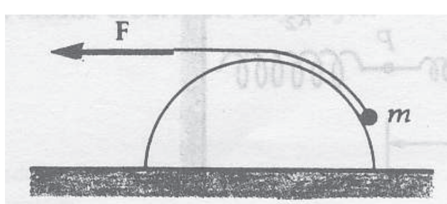
(β) A gyerek által végzett munka integrállal:

$$W = -\int_0^{l_0} F(s)\,ds = -\int_0^{l_0} \left(m_0 - \frac{m_0}{l_0} s \right) g ds = -\frac{1}{2} m_0 g l_0. \tag{4.6.4}$$

4.7. Feladat: * (HN 6C-59) A 20. ábrán látható súrlódásmentes félhenger aljáról a tetejére húzunk fel egy m tömegű testet a henger tetején átvetett kötél segítségével.

(a) Határozzuk meg a kötélerőt a hely függvényében!

(b) Az $\int \mathbf{F} d\mathbf{s}$ integrál segítségével határozzuk meg azt a munkát, ami a testnek a henger aljáról a tetejéig való egyenletes sebességű felhúzásához szükséges! A henger sugara R.



20. ábra.

Megoldás:

(a) Jelölje φ a tömegponthoz húzott sugár és az x tengely által bezárt szöget. Az mg súlyerő mindig y irányú, az ébredő N támaszerő kifele mutató radiális irányú, a K kötélerő érintő irányú. Így v sebességű mozgatás esetén a radiális komponensekre az

$$ma_{cp} = m\frac{v^2}{R} = mg\sin\varphi - N, \tag{4.7.1}$$

míg az erintő irányú komponensekre az

$$ma_t = K - mg\cos\varphi \tag{4.7.2}$$

összefüggések állnak fenn.
(α) Amennyiben a v sebesség állandó, azaz az a_t tangenciális gyorsulás zérus, így az utóbbi egyenletből a kötélerő:

$$K(\varphi) = mg\cos\varphi. \tag{4.7.3}$$

(β) Ha a tangenciális gyorsulás nem zérus $a = \frac{dv}{dt} \neq 0$, úgy a kötélerő

$$K(\varphi) = mg\cos\varphi + ma_t = mg\cos\varphi + m\frac{dv}{dt} \tag{4.7.4}$$

(b) Az elmozdulás a henger felületén (a keresztmetszetet tekintve a kör kerületén) lehetséges, amely kis dφ szög esetén

$$ds = R\mathrm{d}\varphi. \tag{4.7.5}$$

A végzett munkát a $W = \int F_s \mathrm{d}s$ definíció alapján számoljuk.
(α) Abban az esetben amikor egyenletes mozgást feltételünk a

$$W = \int_0^{90^0} K(\varphi)R\mathrm{d}\varphi = \int_0^{90^0} mgR\cos\varphi\mathrm{d}\varphi = mgR, \tag{4.7.6}$$

integrál adja. Ez az eredmény várható volt, hiszen ez a helyzeti energia megváltozását adja.
(β) Ha figyelembe vesszük, hogy a sebesség nem feltétlenül állandó, akkor a végzett munka a (4.7.4) második tagjának integráltjával

$$W' = \int m\frac{dv}{dt}\mathrm{d}s \tag{4.7.7}$$

több. Mivel d$s = v$dt, így

$$W' = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{dv}{dt}v\mathrm{d}t = \int_{v_1}^{v_2} mv\mathrm{d}v = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2, \tag{4.7.8}$$

ahol t_1 a kezdeti, t_2 a végső időpont, míg v_1 a kezdő-, v_2 a végsebesség. Így az összes végzett munka a nem egyenletes sebességű esetben

$$W = mgR + \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2. \tag{4.7.9}$$

4.8. Feladat: * (HN 6C-73) A 4 kg tömegű, nyugalomban lévő testet a rá ható változó erő az $x = 2t - 3t^2 + t^3$ függvény szerint mozgat. (Az x-et méterben, a t-t másodpercben mérjük.) Határozzuk meg, hogy mekkora munkát végez ez az erő a mozgás első három másodpercében!

Megoldás: A test sebessége, mint az idő függvénye:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2 - 6t + 3t^2. \tag{4.8.1}$$

A 3. másodpercben a sebesség $v(3\text{s}) = 11$ m/s. A végzett munka – figyelembe véve, hogy a test nyugalomból indult –

$$W = \frac{1}{2}mv^2 = 242\,\text{J}. \tag{4.8.2}$$

4.9. Feladat: (HN 6C-75) Az m tömegű test a nehézségi erő hatására szabadon esik. Mutassuk meg, hogy h távolság megtétele alatt a nehézségi erő átlagos teljesítménye: $P_{\text{átl}} = m\sqrt{g^3h/2}$!

Megoldás: Az eső test sebessége $v = gt$, kinetikus energiája

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mg^2t^2. \tag{4.9.1}$$

A h magasságból történő eséshez tartozó idő $t = \sqrt{2h/g}$. A teljesítmény – a behelyettesítések elvégzése után –

$$P = \frac{E}{t} = m\sqrt{\frac{g^3h}{2}}. \tag{4.9.2}$$

Ez igazolja a feladat állítását.

Munkatétel

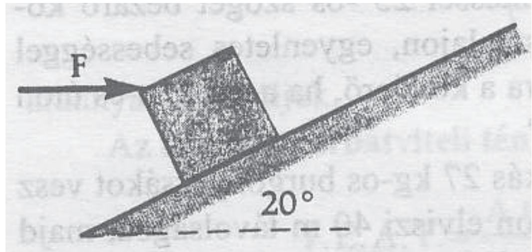
4.10. Feladat: (HN 6B-23) A 21. ábra szerint 2 kg-os testet vízszintes 27 N nagyságú erővel tolunk fel egy 20^0-os lejtőn. A csúszási súrlódási együttható a lejtő és a test között 0,180.

(a) Mekkora a test gyorsulása?

(b) Határozzuk meg a kinematikai egyenletek felhasználásával a nyugalomból induló test sebességét abban a pillanatban, amikor 3 m-t tett meg a lejtőn felfelé!

(c) Válaszoljunk a (b) kérdésre a munkatétel alkalmazásával!

Megoldás: Jelölések: $m = 2$ kg; $F = 27$ N; $\alpha 20^0$ és $\mu = 0,180$.



21. ábra.

(a) A mozgásegyenletek felírásához bontsuk fel az F erőt lejtőirányú, felfele mutató ($F\cos\alpha$) és lejtőre merőlegesen lefele mutató ($F\sin\alpha$) komponensekre. A felfele mozdulást pozitív előjelűnek tekintve a lejtő irányú mozgásegyenlet

$$ma = F\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu N. \tag{4.10.1}$$

A N támaszerő a

$$0 = N - mg\cos\alpha - F\sin\alpha \tag{4.10.2}$$

egyenletből fejezhető ki. A két egyenletből a gyorsulás

$$a = \frac{F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{m} - g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha = 6,74\,\mathrm{m/s^2}. \tag{4.10.3}$$

(b) Az s út megtétele utáni sebesség

$$v = \sqrt{2sa} = 6,36\,\mathrm{m/s}. \tag{4.10.4}$$

(c) A testre ható lejtőirányú (felfele mutató) eredő erő

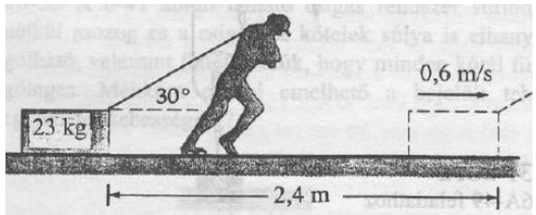
$$F' = F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha, \tag{4.10.5}$$

amelynek munkája változtatja meg a test mozgási energiáját

$$\frac{1}{2}mv^2 = F's = (F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha)\,s. \tag{4.10.6}$$

Innen a v sebesség

$$v = 6,36\,\mathrm{m/s}. \tag{4.10.7}$$



22. ábra.

4.11. Feladat: (HN 6B-28) A 22. ábrán látható ember nyugalmi helyzetből indulva 2,4 m távolságra húz el egy 23 kg-os ládát az érdes ($\mu = 0,5$) padlón. A láda végsebessége 0,6 m/s. A munkatétel alkalmazásával határozzuk meg, hogy mekkora állandó erőt fejtett ki az ember?

Megoldás: A testre ható erő – ez végzi a gyorsítást – vízszintes komponense:

$$F\cos\alpha - \mu N, \tag{4.11.1}$$

ahol N az asztaltól a testre ható támaszerő:

$$N = mg - F\sin\alpha. \tag{4.11.2}$$

A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W, \tag{4.11.3}$$

ahol W a testen végzett munka, v_1 a kezdeti, v_2 végsebesség. A munka kifejezése most

$$W = (F\cos\alpha - \mu N)s, \tag{4.11.4}$$

ahol az $s = 2,4$ m a megtett út. Figyelembe véve, hogy $v_1 = 0$, a fenti kifejezésekből a hatóerőre

$$F = \frac{\mu mgs + \frac{1}{2}mv_2^2}{s(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} = 104,6\text{N} \tag{4.11.5}$$

adódik.

4.12. Feladat: (HN 8B-29) Egy 5 g tömegű 700 m/s sebességű golyó behatol egy rögzített fakockába és megáll benne. Tegyük fel, hogy a fakocka $8 \cdot 10^3$ N nagyságú állandó erőt fejt ki a golyóra, míg az meg nem áll. Határozzuk meg

(a) mennyi idő alatt áll meg a golyó?

(b) milyen mélyen hatol be a fába?

(c) mennyi munkát végez a fakocka, amíg a golyó meg nem áll?

(d) mennyivel változik meg a golyó mozgási energiája?

Megoldás: A koordinátarendszer tengelye mutasson balról jobbra. Jelöljük az adatokat: $m = 5$ g; $v_0 = 700$ m/s (tételezzük fel, hogy a golyó balról jobbra halad) és így $F = -8 \cdot 10^3$ N.

(a) Először a golyó gyorsulását számoljuk, amely

$$a = \frac{F}{m} = -1,6 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s^2}. \tag{4.12.1}$$

A megállásig eltelt idő a $v(t) = 0 = at + v_0$ összefüggésből

$$t = \frac{v_0}{-a} = 4,375 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}. \tag{4.12.2}$$

(b) A kiszámolt adatok felhasználásával a megtett út

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 0,153\,\mathrm{m}. \tag{4.12.3}$$

(c) A fakocka által végzett munka

$$W = F \cdot s = -1225\,\mathrm{J}. \tag{4.12.4}$$

(d) A golyó kinetikus energiájának megváltozása

$$\Delta E_k = W = -1225\,\mathrm{J}. \tag{4.12.5}$$

4.13. Feladat: A d vastagságú deszkába m tömegű v_0 sebességű lövedék csapódik. Mekkora lesz a másik oldalon kilépő lövedék v sebessége, ha

(a) a deszkában állandó a ható F erő,

(b) a deszkában a behatolási mélységtől függő $F(x) = Dx$ erő fékezi? (A D konstans paraméter.)

Megoldás: A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = W, \tag{4.13.1}$$

ahol W a testen végzett munka. Ami az a, esetben:

$$W = -F d, \tag{4.13.2}$$

és a b, esetben az egyenes alatti területtel:

$$W = -\frac{1}{2} D x^2. \tag{4.13.3}$$

Ezekkel a sebességek: a,

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}mv_0^2 - Fd\right)}, \tag{4.13.4}$$

és b,

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}Dd^2\right)}. \tag{4.13.5}$$

4.14. Feladat: * A d vastagságú deszkába m tömegű v_0 sebességű lövedék csapódik. Mekkora lesz a másik oldalon kilépő lövedék v sebessége, ha a deszkában a behatolási mélységtől függő $F(x) = cx^2$ erő fékezi? (A c konstans paraméter.)

Megoldás: A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W, \tag{4.14.1}$$

ahol W a testen végzett munka, ami

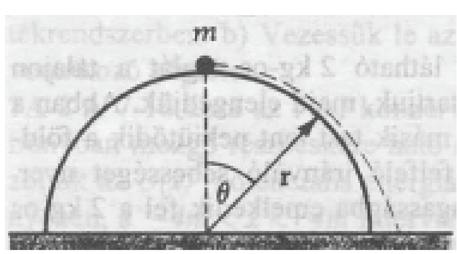
$$W = -\int_0^d cx^2 dx = -\frac{1}{3}cd^3. \tag{4.14.2}$$

Ezzel a sebesség:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{3}cd^3\right)}. \tag{4.14.3}$$

Munkavégzés konzervatív erőtérben. Potenciális energia

4.15. Feladat: (HN 7B-18) Egy kicsiny, m tömegű test a sima, r sugarú félgömb tetején nyugszik. A nyugalmi helyzetéből kissé kimozdítva, súrlódásmentesen lecsúszik a gömbön. Mekkora



23. ábra.

a függőlegessel bezárt szög , amikor a test elhagyja a gömb felszínét?

Megoldás: A potenciális energia zérus szintje legyen a félgömb alján. Így a helyzeti energia mozgás kezdetén $E_{p_1} = mgr$, a kinetikus energia $E_{k_1} = 0$ mivel a test áll. A felülettől történő elválás pillanatában: $E_{p_2} = mgr\cos\theta$, a mozgási energia $E_{k_2} = \frac{1}{2}mv^2$. A mozgás során nincs súrlódás és közegellenállás, így a mechanikai energia megmaradó mennyiség, azaz írhatjuk:

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}. \tag{4.15.1}$$

Behelyettesítés után:

$$mgr = \frac{1}{2}mv^2 + mgr\cos\theta. \tag{4.15.2}$$

A körmozgás feltétele:

$$\frac{mv^2}{r} = mg\cos\theta - N, \tag{4.15.3}$$

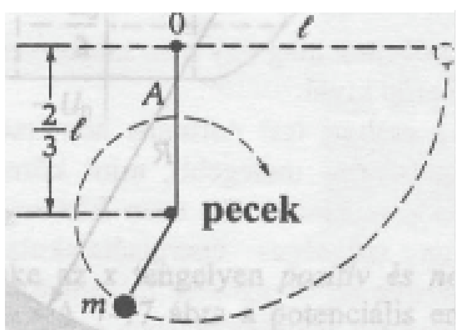
ahol a jobboldal első tagja a súlyerő radiális komponense, az N a támaszerő. Az elválás pillanatában:

$$N = 0. \tag{4.15.4}$$

Az egyenletek megoldása:

$$\cos\theta = \frac{2}{3} \;\rightarrow\; \theta = 48^0. \tag{4.15.5}$$

4.16. Feladat: (HN 7B-21) Egy m tömegű testet l hosszúságú kötélre ingaként felfüggesztünk. A test vízszintes helyzetből indul. Az O felfüggesztési ponttól $2/3l$ távolságban kicsiny pöcköt helyeztünk el, melybe a kötél lengése során beakad. Így a test a legalsó pont elérése után egy $1/3l$ sugarú függőleges körpályára tér át. Határozzuk meg a fonalat feszítő erőt az A pontban,



24. ábra.

ami a pöcök elérése utáni legmagasabb helye a testnek!

Megoldás: A potenciális energia zérus szintje legyen az A pont magasságában. Így a mechanikai energia megmaradás tétele miatt egyszerűen

$$mg\frac{1}{3}l = \frac{1}{2}mv^2. \tag{4.16.1}$$

Másrészt a pecek körüli körmozgásra az A pontban az

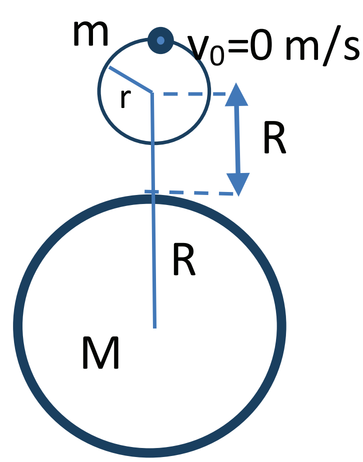
$$m\frac{v^2}{\frac{1}{3}l} = K + mg \tag{4.16.2}$$

összefüggés írható, ahol K a kötélerő. A két egyenletből

$$K = mg. \tag{4.16.3}$$

4.17. Feladat: Egy M tömegű, R sugarú homogén gömb égitest fölött az ábrán látható módon r sugarú körpályán egy hurkon m tömegű pontszerű test mozoghat. A hurok nem mozdul el. Az $m << M$ tömegű test kezdősebesség nélkül elindul a hurok legfelső pontjáról.

a, Mekkora sebességgel halad át a hurok alsó pontján? (Közegellenállástól eltekintünk.)



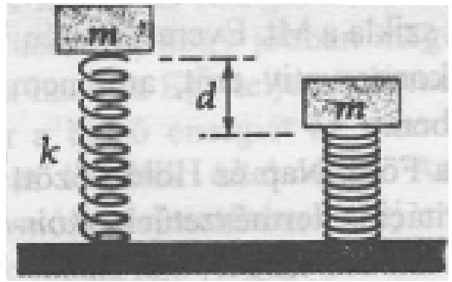
25. ábra.

b, Mekkora N támaszerőt fejt ki a hurok az alsó pontban?

Megoldás:

4.18. Feladat: (HN 7A-10) Egy m tömegű tégla úgy van felerősítve, hogy a k rugóállandójú rugót éppen csak érinti. A téglát ekkor elengedjük nyugalmi helyzetéből. Határozzuk meg, hogy milyen d távolságra jut el a tégla az elengedés után!

Megoldás: Mivel a mozgás során nincs súrlódás és közegellenállás, a mechanikai energia megmarad. Azaz a kezdeti kinetikus energia E_{k_1} és potenciális energia E_{p_1} összege egyenlő a tekintett



26. ábra.

mozgás végi kinetikus E_{k_2} és potenciális energia E_{p_2} összegével:

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}. \tag{4.18.1}$$

Mivel a test kezdetben és az alsó helyzetben is áll, így $E_{k_1} = 0$ és $E_{k_2} = 0$. A helyzeti energia zérus pontját a talajra helyezve $E_{p_1} = mgh$, ahol h a tégla talajtól való távolsága. Az E_{p_2} a tégla alsó helyzethez tartozó helyzeti energiájából és a rugalmas energiából áll, azaz $E_{p_2} = mg(h-d) + \frac{1}{2}kd^2$. A fenti egyenletbe helyettesítve:

$$mgh = mg(h-d) + \frac{1}{2}kd^2. \tag{4.18.2}$$

Ebből a d összenyomódás mértéke:

$$d = \frac{2mg}{k}. \tag{4.18.3}$$

(*Megjegyzés:* Természetesen ugyanez az eredmény adódik, ha pl. a felső helyzetet választjuk a potenciális energia zérus pontjának.)

4.19. Feladat: A völgy fölött h magasságban átvezető viaduktról gumiköteleken ugrálnak alá (bungee jumping). Milyen L hosszúságúnak válassza az m tömegű ugró a k direkció erejű gumikötelet, hogy a talajt éppen érintse? (Az ugró kiterjedése legyen pontszerű.)

Megoldás: Az ugró a mozgás elején és a talaj érintése pillanatában áll, így mozgási energiája mindkét esetben zérus. Így a kezdeti mgh helyzeti energia – a völgy alját zérus szintnek véve – a gumikötélben tárolódó rugalmas energiává alakul, azaz:

$$mgh = \frac{1}{2}k(h-L)^2. \tag{4.19.1}$$

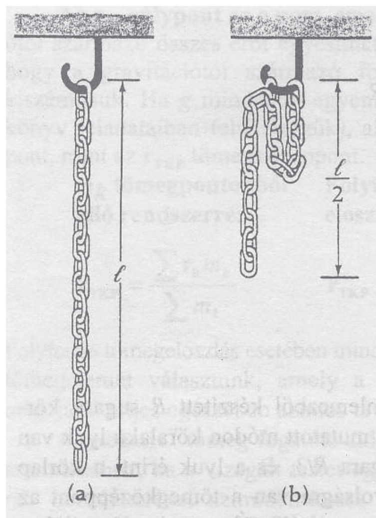
Itt a $h-L$ a gumikötél megnyúlása. Az egyenlet megoldása:

$$L = h \pm \sqrt{\frac{2mgh}{k}}. \tag{4.19.2}$$

Innen a fizikailag értelmes megoldás, így a kezdeti (beállítandó) hossz:

$$L = h - \sqrt{\frac{2mgh}{k}}. \tag{4.19.3}$$

4.20. Feladat: (HN 10B-11) Az m tömegű, l hosszúságú lánc kampón lóg a 27. ábra szerint. Számítsuk ki azt a munkát, amely a lánc középső láncszemének a kampóra történő felakasztáshoz szükséges!



27. ábra.

Megoldás: Legyen a potenciális energia zérus pontja a teljesen leengedett lánc legalsó pontja (27a ábra). Ennek megfelelően az m tömegű lánc tömegközéppontja $\frac{1}{2}l$ magasságban van, így E_1 helyzeti energiája

$$E_1 = mg\frac{1}{2}l. \tag{4.20.1}$$

A felakasztott lánc egyes darabjainak energiái összege a 27.b ábrán balról jobbra haladva

$$E_2 = \frac{1}{2}mg\frac{3}{4}l + \frac{1}{4}mg\frac{7}{8}l + \frac{1}{4}mg\frac{7}{8}l = \frac{13}{16}mgl. \tag{4.20.2}$$

A szükséges munka a két potenciális energia különbsége

$$W = E_2 - E_1 = \frac{5}{16}mgl. \tag{4.20.3}$$

4.21. Feladat: * Az m_0 tömegű l_0 hosszúságú lánc a földön hever. A végét elkezdjük állandó v_0 sebességgel emelni. a, Mekkora erőt kell ehhez kifejteni? b, Mekkora a végzett összes munka, amikor a kötél vége éppen elhagyja a talajt?

Megoldás: a, Tekintsük a közbenső t időpontot, amikor már $v_0 t$ hossz felemelkedett és v_0 sebességű. E pillanatban az m tömegű darabnak a helyzeti energiája:

$$E_p(t) = \frac{1}{2}mgh = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{m_0}{l_0}v_0 t}_{m}\, g\, \underbrace{v_0 t}_{h} \tag{4.21.1}$$

tömegű darabra. Másrészt ennek az m tömegű darabnak a kinetikus energiája:

$$E_k(t) = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\frac{m_0}{l_0}v_0 t v_0^2. \tag{4.21.2}$$

A teljes energia:

$$E(t) = \frac{1}{2}\frac{m_0}{l_0}v_0^2 t^2 g + \frac{1}{2}\frac{m_0}{l_0}v_0^3 t, \tag{4.21.3}$$

amelyből a $P(t)$ teljesítmény:

$$P(t) = \frac{dE}{dt} = \frac{m_0}{l_0}v_0^2 t g + \frac{1}{2}\frac{m_0}{l_0}v_0^3. \tag{4.21.4}$$

A $P(t) = F\,v$ összefüggésből a láncra

$$F(t) = \frac{P(t)}{v_0} = \frac{m_0}{l_0}v_0 g t + \frac{1}{2}\frac{m_0}{l_0}v_0^2 \tag{4.21.5}$$

erővel kell hatni. b, A végzett munka egyszerűen kiszámolható úgy, hogy a lánc tömegközéppontja $\frac{l_0}{2}$ magasságra emelkedett, másrészt a lánc sebessége v_0. A helyzeti energiája $\frac{m_0 g l_0}{2}$, a mozgási energiája $\frac{1}{2}m_0 v_0^2$, azaz

$$W = \frac{m_0 g l_0}{2} + \frac{1}{2}m_0 v_0^2. \tag{4.21.6}$$

Megjegyzés: E munka a következőképpen is kiszámolható. A felemeléshez szükséges idő: $t_f = \frac{l_0}{v_0}$. A munka $W = \int F\,dx = \int F\,v\,dt$ alapján:

$$W = \int_0^{\frac{l_0}{v_0}} \left(\frac{m_0}{l_0}v_0 g t + \frac{1}{2}\frac{m_0}{l_0}v_0^2\right) v_0 dt = \frac{m_0 g l_0}{2} + \frac{1}{2}m_0 v_0^2. \tag{4.21.7}$$

Energiatétel

4.22. Feladat: Egy 60 kg-os láda 4 m magasról lecsúszik egy a vízszintessel 30^0-os szöget bezáró lejtőn. Mekkora a súrlódási erő munkája ezalatt, ha a láda 5 m/s sebességet ér el?

Megoldás: Jelölések: $m = 60$ kg, $h = 4$ m, $\alpha = 30^0$ és $v = 5$ m/s. A mechanikai energia megmaradást "elrontó" disszipatív erő munkáját a következőképpen tudjuk figyelembe venni:

$$U_{p_2} + E_{k_2} = U_{p_1} + E_{k_1} + W, \tag{4.22.1}$$

ahol végső potenciális és kinetikus energiát összegét (mechanikai energia) úgy kapjuk, hogy a kezdeti potenciális és kinetikus energiához hozzáadjuk a súrlódási végzett munkát. Mivel a kezdeti mechanikai energia nagyobb mint a végső, biztosak lehetünk benne, hogy W negatív. A potenciális energia zérus szintjét a lejtő aljára a jelen esetre a következő egyenlet írható:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh + W. \tag{4.22.2}$$

Az adatok behelyettesítése után

$$W = -1650\,\mathrm{J}. \tag{4.22.3}$$

4.23. Feladat: Az α hajlásszögű, μ súrlódási együtthatójú lejtő alján felfelé lökünk v_0 sebességgel egy m tömegű testet. A test a mozgás tetőpontját elérve visszacsúszik. Mekkora lesz a sebessége a lejtő alján? A feladatot oldjuk meg a
(a) dinamikai egyenletek megoldásával és
(b) az energiatétel felhasználásával!

Megoldás:
(a) A felfele mozgásnál legyen a koordinátatengely irányítása pozitív a felfele irányban. Ekkor a test lejtőirányú mozgásegyenlete

$$ma_{fel} = -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha, \tag{4.23.1}$$

amelyből a gyorsulás

$$a_{fel} = -g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha. \tag{4.23.2}$$

A felfele mozgás ideje a $0 = v_0 + a_{fel}t$ egyenletből

$$t_{fel} = \frac{v_0}{-a_{fel}}, \tag{4.23.3}$$

amellyel a idő alatt a megtett út

$$s = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}. \tag{4.23.4}$$

A lefele csúszásnál fordítsuk meg a koordinátatengelyt, a pozitív irányítás mutasson lefele. Ekkor a mozgásegyenlet

$$ma_{le} = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha, \tag{4.23.5}$$

amelyből a gyorsulás

$$a_{le} = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha. \tag{4.23.6}$$

A lefele mozgás ideje a $v = a_{le}t$ egyenletből

$$t_{le} = \frac{v}{a_{le}}, \tag{4.23.7}$$

amely idő alatt a megtett s út

$$s = \frac{1}{2}a_{le}t^2 = \frac{v^2}{2a_{le}}. \tag{4.23.8}$$

E két egyenletből a sebesség a lejtő alján

$$v = \sqrt{2sa_{le}}. \tag{4.23.9}$$

Az s és a_{le} korábban kapott kifejezéseit behelyettesítve a sebességre a

$$v = v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}} \tag{4.23.10}$$

eredmény adódik.

(b) Az energiatétel azt állítja, hogy a végső kinetikus és potenciális energia összege egyenlő a kezdeti kinetikus és potenciális energia összegével plusz a testen végzett munkával, azaz

$$U_{p2} + E_{k2} = U_{p1} + E_{k1} + W. \tag{4.23.11}$$

A felfele mozgásnál $U_{p1} = 0$; $E_{k1} = \frac{1}{2}mv_0^2$; $U_{p2} = mgs\sin\alpha$; $E_{k2} = 0$ és $W = -\mu mgs\cos\alpha$. Egy egyenletbe összeírva

$$mgs\sin\alpha = \frac{1}{2}mv_0^2 - \mu mgs\cos\alpha. \tag{4.23.12}$$

Ebből az s út

$$s = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}. \tag{4.23.13}$$

A lefele csúszásnál

$$U_{p2} + E_{k2} = U_{p1} + E_{k1} + W, \tag{4.23.14}$$

ahol $U_{p1} = mgs\sin\alpha$; $E_{k1} = 0$; $U_{p2} = 0$; $E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2$ és $W = -\mu mgs\cos\alpha$. Egy egyenletbe írva

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgs\sin\alpha - \mu mgs\cos\alpha. \tag{4.23.15}$$

Az s utat a (4.23.13) egyenletből behelyettesítve a sebességre a fentiekkel egyező

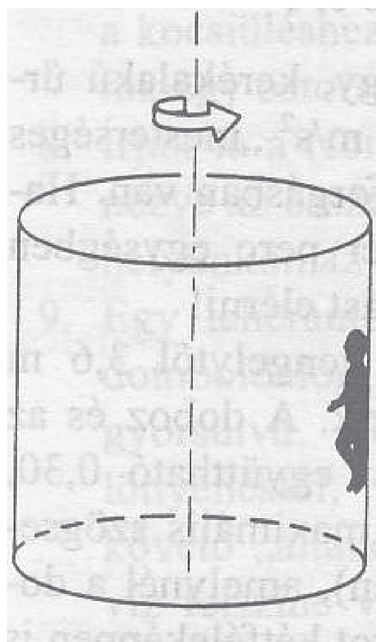
$$v = v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}} \tag{4.23.16}$$

eredményt kapjuk.

5. Feladatok a gyorsuló koordináta-rendszerek tárgyköréből

Centrifugális erő

5.1. Feladat: (HN 13B-20) Egy népszerű vidámparki mutatványnál a látogatók egy függőleges tengely körül forgó henger belső falának támaszkodnak a 28. ábrának megfelelően. Ezután a padlót lesüllyesztik, és hagyják, hogy a látogatók a centrifugális erőtől a falhoz "odaszögezve" és a súrlódási erő következtében a lecsúszástól védve a falon maradjanak. A henger R sugarának, az ω szögsebességnek és a g nehézségi gyorsulásának függvényében határozzuk meg azt a legkisebb μ nyugalmi súrlódási együtthatót, amely a lecsúszást megakadályozza. A feladatot forgó vonatkoztatási rendszerben oldjuk meg!



28. ábra.

Megoldás: A forgó vonatkoztatási rendszerben a falhoz "odaszögezett" látogatóra négy erő hat. A centrifugális erő (tehetetlenségi erő), amely radiálisan kifelé mutat és nagysága $F_{cf} = mR\omega^2$. A falon radiálisan befelé mutat az N támaszerő, amelynek nagysága pontosan $mR\omega^2$. Függőlegesen lefelé hat az mg súlyerő, ezzel ellentétesen az F_s súrlódási erő, és a kettő egymással egyenlő. Az fentieket matematikalag összefoglalva:

$$mg = F_s = \mu N = \mu mR\omega^2, \tag{5.1.1}$$

ahonnan

$$\mu = \frac{g}{R\omega^2}. \tag{5.1.2}$$

5.2. Feladat: Egy $M = 1,499 \cdot 10^{25}$ kg tömegű, $R = 10000$ km sugarú bolygó északi sarkán $k = 100$ N/m direkciós erejű rugóra $m = 1$ kg tömegű testet lógatunk. A bolygó $\omega = 10^{-4}$ 1/s szögsebességgel forog. (A gravitációs állandó: $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.)

(a) Mekkora a rugó megnyúlása?

(b) Ezt követően a mérést az egyenlítőn megismételjük. Mennyi ekkor a rugó megnyúlása?

Megoldás:

(a) A bolygó északi sarkán végzett mérés során

$$\gamma \frac{mM}{R^2} = k\Delta x, \tag{5.2.1}$$

ahol Δx a rugó megnyúlása, amely

$$\Delta x = \gamma \frac{mM}{kR^2} = 0,1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{mm}. \tag{5.2.2}$$

(b) Az egyenlítőn figyelembe kell vennünk a centrifugális erőt, amellyel az egyenlet úgy módosul, hogy

$$\gamma \frac{mM}{R^2} - mR\omega^2 = k\Delta x'. \tag{5.2.3}$$

Innen a $\Delta x'$ megnyúlás

$$\Delta x' = \gamma \frac{mM}{kR^2} - \frac{mR\omega^2}{k} = 0,099\,\mathrm{m} = 99\,\mathrm{mm}, \tag{5.2.4}$$

azaz a rugó megnyúlása 1 mm-rel kevesebb.

5.3. Feladat: (HN 14C-39) Az ω szögsebességgel forgó ringlispíl középpontjától r távolságra lévő helyen h magasságból egy tárgyat ejtenek a padlóra. A mozgást a ringlispíl vonatkoztatási rendszeréből vizsgálva mutassuk meg, hogy az elejtés talppontja és a becsapódási pont közötti távolság jó közelítéssel $\omega^2 rh/g$. Milyen feltételezésekkel kell élni a feladat megoldása során?

Megoldás: A tárgy

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{5.3.1}$$

idő alatt esik. A forgó vonatkoztatási rendszerben az

$$a_{cf} = r\omega^2 \tag{5.3.2}$$

centrifugális gyorsulása lesz, amely kifele mutató radiális irányú. E gyorsulással az elejtés talppontja és a becsapódási pont közötti távolság

$$\Delta s = \frac{1}{2} a_{cf} (\Delta t)^2 = \frac{\omega^2 r h}{g}. \tag{5.3.3}$$

A forgás közbeni szögelfordulás

$$\Delta\varphi = \omega \Delta t. \tag{5.3.4}$$

Ha azt tekintjük, hogy a test az álló rendszerből nézve érintő irányban $r\omega$ sebességgel egyenesvonalú egyenletes mozgást végez az elejtés után, akkor az ehhez tartozó elmozdulás

$$\Delta x = r\omega \Delta t. \tag{5.3.5}$$

Az ehhez az elmozduláshoz tartozó α központi szög

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\Delta x}{r} = \omega \Delta t. \tag{5.3.6}$$

Ahhoz, hogy φ és α közelítőleg megegyezzenek egymással, az $\omega \Delta t << 1$ feltétel teljesülése szükséges.

Coriolis-erő

5.4. Feladat: (HN 14C-30) Írjuk le, hogyan tudna egy személy a forgásban lévő ringlispíl lapján járni úgy, hogy a rá ható Coriolis-erő és a centrifugális erő egymással egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú legyen! (A ringlispíl forogjon az óra járásával ellentétesen.)

Megoldás: Az ω szögsebességgel forgó ringlispíl origótól való R távolságú pontjában a személyre radiális kifele mutató $F_{cf} = mR\omega^2$ centrifugális erő hat. Ahhoz, hogy a Coriolis-erő radiális befele mutató legyen, ahhoz az óra járásával egyezően, az R sugarú kör érintője irányában kell v sebességgel haladnia. A Coriolis erő nagysága $F_{Co} = 2m\omega v$. A kettő

$$F_{cf} = mR\omega^2 = 2m\omega v = F_{Co} \tag{5.4.1}$$

egyenlőségéből a sebességre a

$$v = \frac{R\omega}{2} \tag{5.4.2}$$

adódik.

5.5. Feladat: Egy forgótárcsa szélén álló ember eldob egy testet vízszintesen a függőleges forgástengely irányába 10 m/s kezdősebességgel. A tárcsa percenként 600-at fordul. Mekkora a tárcsa vonatkoztatási rendszerében a test pályájának kezdeti görbületi sugara?

Megoldás: Jelölések: v = 10 m/s és f = 600 1/perc = 10 1/s. A tárcsa szögsebessége $\omega = 2\pi f$ = 62,8 rad/s. A forgó rendszerben a testet a Coriolis-erő téríti el, amelyhez tartozó gyorsulás nagysága

$$a_{Co} = 2\omega v. \tag{5.5.1}$$

Az indulás pillanatában körpályán mozog a test, amely esetén gyorsulás

$$a = \frac{v^2}{R}. \tag{5.5.2}$$

A kettő egyenlőségéből a görbületi sugár

$$R = \frac{v}{2\omega} = 0,159\,\mathrm{m}. \tag{5.5.3}$$

5.6. Feladat: (HN 14C-33) A mesterlövész balról jobbra haladó célpontra céloz. A célt követő puskacső a vízszintes síkban mozog. A puska szögsebessége 1,5 rad/s abban a pillanatban, amikor az 5 g tömegű lövedék 500 m/s sebességgel éppen kilép a csőből.
(a) A forgó rendszerben mekkora Coriolis-erő hat a lövedékre a cső elhagyásának pillanatában?
(b) Milyen irányú ez az erő?

Megoldás: Jelölések: $\omega = 1,5$ rad/s; $m = 5$ g és $v = 500$ m/s.
(a) A puska csöve az óra járásának megfelelően fordul el, így az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor függőlegesen lefele mutat. A Coriolis-erő a $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor és a $\mathbf{v}$ sebességvektorokkal

$$\mathbf{F} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \tag{5.6.1}$$

amelynek nagysága – figyelembe véve, hogy $\boldsymbol{\omega}$ és $\mathbf{v}$ egymásra merőlegesek

$$F = 2m\omega v = 7,5\,\mathrm{N}. \tag{5.6.2}$$

(b) Az erő iránya jobbról balra mutat.

5.7. Feladat: (HN 14C-38) A percenként tízet forgó ringlispíl szélén álló kislány 10 m/s vízszintes kezdősebességgel labdát dob a forgástengely felé. Úgy látja, hogy a pályagörbe jobbra kanyarodik.
(a) Számítsuk ki a pályagörbe kezdeti vízszintes görbületi sugarát!
(b) Amikor a labdát dobó kislány a ringlispíl közepe felé néz, jobbra vagy balra látja elmozdulni a távoli tájat?

Megoldás: Jelölések: A fordulatszám $f = 10$ 1/perc $= 1/6$ 1/s, amellyel a szögsebesség $\omega = 2\pi f = 1,047$ rad/s; $v = 10$ m/s.
(a) A labda Coriolis-gyorsulása

$$a_{Co} = 2\omega v, \tag{5.7.1}$$

amely éppen az elkanyarodás

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{5.7.2}$$

gyorsulása. Itt r a pályagörbe görbületi sugara. A két gyorsulás egyenlőségéből

$$r = \frac{v}{2\omega} = 9,55\,\mathrm{m}. \tag{5.7.3}$$

(b) Mivel a pályagörbe jobbra kanyarodik, így a ringlispíl az óra járásával ellentétes irányban forog. Az ilyen irányban forgó rendszerből nézve a táj balról jobbra látszik mozogni.

5.8. Feladat: A Föld napi forgása következtében az eső testek kelet felé elhajlanak.
(a) Mekkora az Egyenlítőre szabadon eső test keleti irányú gyorsulása?
(b) Számítsuk ki, hogy a becsapódás pillanatában mekkora a keleti irányú sebessége annak a testnek, amely $h = 100$ m magasból esik szabadon az Egyenlítőre!

Megoldás:
(a) Az Egyenlítőn szabadon eső testnek a Coriolis-erő következményeként – figyelembe véve, hogy a Föld ω szögsebessége és a leeső test v sebessége egymásra merőleges –

$$a(t) = 2\omega v = 2\omega g t \tag{5.8.1}$$

keleti irányú gyorsulása van.
(b) A t időtartamú esés során az $a(t) = 2\omega g t$ egyenes alatti terület éppen a keleti irányú sebesség:

$$v(t) = \omega g t^2. \tag{5.8.2}$$

* Más úton:

$$v(t) = \int_0^t a(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^t 2\omega g t\,\mathrm{d}t = \omega g t^2. \tag{5.8.3}$$

Az esés ideje 4,47 s, $\omega = 7,27 \cdot 10^{-5}$ rad/s, $g = 10$ m/s^2 adatokkal számolva:

$$v_{kelet} = 1.45 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m/s}. \tag{5.8.4}$$

Megjegyzés: Az ω szögsebesség nagyon kicsi, és ezért a "Coriolis-gyorsulás" is nagyon kicsi (ha nem túl sokáig esik a test). Emiatt tekinthetjük úgy, hogy a test teljes sebessége végig gyakorlatilag lefelé mutat, és így a Coriolis-gyorsulásnak valóban tisztán vízszintes az iránya.

6. Feladatok rugalmas és rugalmatlan ütközések tárgyköréből

Impulzustétel, impulzusmegmaradás törvénye

6.1. Feladat: Egy $m = 4$ kg tömegű kalapács $v_0 = 6$ m/s sebességgel érkezik a szög fejéhez és $\Delta t = 0,002$ s alatt fékeződik le, miközben a szög behatol a fába. (A szög tömege elhanyagolható a kalapács tömegéhez viszonyítva.)
(a) Számítsuk ki az átlagos fékező erőt!
(b) Számítsuk ki a szög útját a fában!
(c) Mekkora munkát végzett a fa a kalapácson?

Megoldás:
(a) A szögre ható átlagos fékező erő

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = -12000\,\mathrm{N}, \tag{6.1.1}$$

ahol a negatív előjel a fékező hatást fejezi ki.
(b) A szög átlagos gyorsulása a sebességváltozásával számolható ki. Amenniyben a szög nem deformálódott az ütés alatt, a kezdeti sebessége meg kell hogy egyezzen a kalapács sebességével. Ezért a sebesség megváltozása $\Delta v = -v_0$. A szög gyorsulása ezért

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -3000\,\mathrm{m/s^2}, \tag{6.1.2}$$

amit felhasználhatunk a szög által megtett út meghatározásához.

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0,006\,\mathrm{m} = 6\,\mathrm{mm}. \tag{6.1.3}$$

(c) A fa által végzett munka a kalapácson:

$$W = Fs = -72\,\mathrm{J}. \tag{6.1.4}$$

6.2. Feladat: (HN 8B-27) A kezdetben nyugalomban lévő 5 kg tömegű testre 5 másodpercig 6 N állandó erő hat, majd az erő 3 s alatt egyenletesen zérusra csökken. Mekkora sebességet ér el a test?

Megoldás: Jelölések: $m = 5$ kg; $t_1 = 5$ s; $F = 6$ N és $t_2 = 8$ s a második időintervallum vége.
A test impulzusváltozását kell kiszámoljuk. A $0 \leq t \leq t_1 = 5$ s időintervallumban az impulzusváltozás

$$\Delta I_1 = F t_1 = 30\,\text{kgm/s}. \tag{6.2.1}$$

A második szakaszon az erő időbeli függése

$$F(t) = \frac{F}{t_2 - t_1}(t_2 - t). \tag{6.2.2}$$

A második időintervallumon történő impulzusváltozás az egyenes alatti területtel egyszerűen számolható, amely

$$\Delta I_2 = \frac{F}{2}(t_2 - t_1) = 9\,\text{kgm/s}. \tag{6.2.3}$$

A teljes impulzusváltozás

$$\Delta I = \Delta I_1 + \Delta I_2 = 39\,\text{kgm/s}, \tag{6.2.4}$$

amelyet a tömeggel osztva a végsebességet kapjuk:

$$v = \frac{\Delta I}{m} = 7,8\,\text{m/s}. \tag{6.2.5}$$

6.3. Feladat: Egy testet $F_1 = 10$ N erővel $t_1 = 3$ s alatt lehet felgyorsítani nyugalmi helyzetből $v = 15$ m/s sebességre. Mennyi ideig tart ugyanennek a testnek nyugalmi helyzetből ugyanerre a sebességre való felgyorsítása, ha az erő $F_2 = 2$ N?

Megoldás: A ható erő a test impulzusváltozását okozza

$$\Delta p = F \Delta t. \tag{6.3.1}$$

Mivel ugyanannak a testnek ugyanakkora impulzusváltozásáról van szó, így fenn áll a

$$F_1 t_1 = F_2 t_2 \tag{6.3.2}$$

összefüggés, amelyből $t_2 = 15$ s időtartam adódik.

6.4. Feladat: (HN 8C-42) * Egy 8 kg tömegű test nyugalmi helyzetből indulva $F = At - Bt^2$ erő hatására gyorsul, ahol $A = 24$ N/s és $B = 1,2$ N/s^2.

(a) Határozzuk meg, hogy mekkora maximális sebességet ér el a tömeg mielőtt újra megállna!

(b) Mennyi idő múlva következik ez be?

Megoldás:

(a) A test impulzusváltozása

$$\Delta I = \int_0^t F(t)\mathrm{d}t = \int_0^t (At - Bt^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}At^2 - \frac{1}{3}Bt^3. \tag{6.4.1}$$

Innen a sebesség

$$v(t) = \frac{1}{m}(\frac{1}{2}At^2 - \frac{1}{3}Bt^3). \tag{6.4.2}$$

A sebesség maximuma akkor van, ha a gyorsulás zérus, azaz most

$$t = \frac{A}{B}. \tag{6.4.3}$$

A behelyettesítések után a maximális sebesség

$$v_{max} = \frac{1}{6m}\frac{A^3}{B^2} = 200\,\mathrm{m/s}. \tag{6.4.4}$$

(b) A maximális sebesség elérése $t = 20$ s idő múlva következik ez be.

6.5. Feladat: (HN 8C-43) * A 2,5 kg tömegű test nyugalmi helyzetből indulva $F = At^2$ erő hatására gyorsul, ahol $A = 0,75$ N/s^2.

(a) Határozzuk meg a test sebességét 15 másodperccel az erő alkalmazása után!

(b) Mekkora állandó erővel lehetne elérni ezt a sebességet?

Megoldás:

(a) A test gyorsulása

$$a = \frac{1}{m}At^2, \tag{6.5.1}$$

amellyel a sebesség

$$v(t) = \int_0^t a(t)\mathrm{d}t = \int_0^t \frac{1}{m}At^2\mathrm{d}t = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{3}At^3\right]_0^{15} = 337,5\,\mathrm{m/s}. \tag{6.5.2}$$

(b) Ha az erő állandó, akkor

$$v = at = \frac{F}{m}t, \tag{6.5.3}$$

ahonnan az erő

$$F = \frac{mv}{t} = 56,25\,\mathrm{N} \tag{6.5.4}$$

kell legyen ekkora sebesség eléréséhez.

6.6. Feladat: Egy $M = 80$ kg tömegű ember jégen egy helyben állva eldob vízszintes irányban egy $m = 20$ kg tömegű golyót. A golyó az embertől mérve $v_0 = 20$ m/s sebességgel távolodik. Mekkora az ember v_M sebessége a jéghez viszonyítva? (A jég és az ember közötti súrlódási erő elhanyagolhatóan kicsi.)

Megoldás: Jelölje v_m a golyó jéghez viszonyított sebességét. Az impulzus megmaradás miatt

$$M v_M = m v_m. \tag{6.6.1}$$

A golyó és az ember relatív sebessége pedig

$$v_0 = v_m + v_M \tag{6.6.2}$$

A két egyenletből

$$v_M = \frac{m}{m+M}\, v_0 \tag{6.6.3}$$

Behelyettesítve a számértékeket $v_M = 4$ m/s adódik.

Rugalmatlan ütközések

6.7. Feladat: Az m tömegű v_0 sebességű test tökéletesen rugalmatlanul ütközik az M tömegű álló testtel. Mekkora lesz az ütközés utáni együttes sebességük? Mekkora átlagos erőhatás lép fel köztük, ha az ütközés ideje (a becsapódástól számítva az összeragadásig) t.

Megoldás: Az impulzus megmaradás miatt:

$$m v_0 = (m+M)v, \tag{6.7.1}$$

ahol v az összeragadt testek együttes sebessége. Az ütközés utáni együttes sebesség ezért

$$v = \frac{m}{m+M} v_0. \tag{6.7.2}$$

Az ütközés közben fellépő átlagos erőhatás pedig: $F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$, ahol ΔP az m tömegű test impulzus impulzusváltozása:

$$\Delta P = mv - mv_0 = \frac{m^2}{m+M} v_0 - mv_0 = -\frac{mM}{m+M} v_0. \tag{6.7.3}$$

A negatív előjel arra utal, hogy a m tömegű test impulzusa csökken. Az F erő nagysága így

$$F = -\frac{mM}{m+M}\frac{v_0}{t}. \tag{6.7.4}$$

Hasonló meggondolásokból az M tömegű testre

$$F = \frac{mM}{m+M}\frac{v_0}{t} \tag{6.7.5}$$

erő hat, amely eredmény pont azt mutatja, hogy a kölcsönható erők párosával lépnek fel: azonos nagyságúak és ellentétes irányúak.

6.8. Feladat: Vízszintes légpárnás sínen két kis test mozoghat súrlódásmentesen. A testek tömege $m_1 = 0,2$ kg és $m_2 = 0,3$ kg, sebessége $v_1 = 2$ m/s illetve $v_2 = 1,5$ m/s. Mekkora lesz a testek sebessége, ha tökéletesen rugalmatlanul ütköznek?

Megoldás: A rugalmatlan ütközés azt jelenti, hogy a két test együtt fog mozogni, ugyanazzal a sebességgel. Az impulzusmegmaradás miatt

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1+m_2)u, \tag{6.8.1}$$

ahol u a kialakuló közös sebesség. Innen

$$u = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1+m_2} = 1,7\,\mathrm{m/s}. \tag{6.8.2}$$

6.9. Feladat: Két azonos m tömegű test azonos nagyságú v_0 sebességgel halad, az egyik az y tengelyen, a másik az x tengelyen, mindkét esetben a pozitív irányban. Az origóban a testek tökéletesen rugalmatlanul ütköznek. Mekkora lesz az együttes sebességvektoruk és annak nagysága?

Megoldás: Az y tengelyen mozgó test impulzusvektora

$$\mathbf{p_y} = m(0; v_0), \tag{6.9.1}$$

az x tengelyen mozgó test impulzusvektora pedig

$$\mathbf{p_x} = m(v_0; 0). \tag{6.9.2}$$

Az ütközés utáni $2m$ tömegű együttes test impulzusa e két impulzusvektor összege, azaz

$$\mathbf{P} = \mathbf{p_y} + \mathbf{p_x} = m(v_0; v_0). \tag{6.9.3}$$

Az összeragadt test sebességvektora pedig

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{2m} = \left(\frac{v_0}{2}; \frac{v_0}{2}\right). \tag{6.9.4}$$

a sebesség nagysága:

$$V = |\mathbf{V}| = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0. \tag{6.9.5}$$

6.10. Feladat: (HN 8A-4) Egy m tömegű v_0 sebességgel mozgó test vele egyenlő tömegű, eredetileg nyugalomban lévő testbe ütközik és összeragad vele. Határozzuk meg a kinetikus energia $(K-K_0)/K_0$ relatív megváltozását!

Megoldás: Az ütközés tökéletes rugalmatlan, így az impulzus megmarad, a kinetikus energia viszont nem. Az impusumegmaradás az

$$mv_0 = 2mv \tag{6.10.1}$$

egyenlettel fejezhető ki, amelyben v az összeragadt testek végső együttes sebessége. Innen

$$v = \frac{v_0}{2}. \tag{6.10.2}$$

A kezdeti K_0 kinetikus energia

$$K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2. \tag{6.10.3}$$

A végső kinetikus energia pedig:

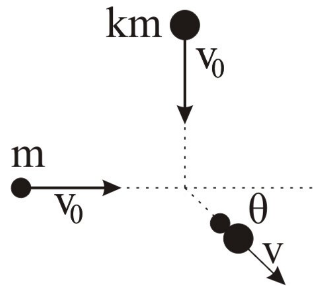
$$K = \frac{1}{2} 2mv^2 = \frac{1}{4} m v_0^2. \tag{6.10.4}$$

A kinetikus energia $(K-K_0)/K_0$ relatív megváltozása:

$$\frac{K-K_0}{K_0} = -\frac{1}{2}. \tag{6.10.5}$$

A negatív előjel arra utal, hogy az ütközés mechanikai energiaveszteséggel jár.

6.11. Feladat: (HN 8B-11) Két, m illetve km (k állandó) tömegű test egyenlő v_0 sebességgel halad merőleges irányból a 29. ábrán látható módon közeledik egymáshoz, összeütközik, és összeragadva mozgnak együtt tovább. Fejezzük ki a végsebességük irányát meghatározó θ szöget a k segítségével!



29. ábra.

Megoldás: Az ütközés közben megmarad a testek lendülete az x és y irányban egyránt. Az összeregadt testek össz lendülete

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} mv_0 \\ kmv_0 \end{pmatrix}. \tag{6.11.1}$$

Az összeragadt testek össz lendületéből meghatározható azok sebességvektora is:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{m(1+k)} = \frac{v_0}{1+k}\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}. \tag{6.11.2}$$

A 29. ábrán jelölt θ szög meghatározható a $\mathbf{V}$ sebességvektor komponenseivel:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{V_y}{V_x} = k. \tag{6.11.3}$$

6.12. Feladat: (HN 8B-14) Két, m illetve km (k állandó) tömegű test egyenlő v_0 sebességgel halad a $+x$ és $-x$ irányban. Ütközésük után összeragadva haladnak tovább.
(a) Határozzuk meg az adott paraméterek függvényében, hogy mekkora az összeragadt testek v sebességének nagysága és iránya?
(b) Mekkora a v/v_0 arány, ha $k = 2$?

Megoldás:
(a) Az ütközés folyamatára érvényes a lendületmegmaradás törvénye:

$$mv_0 - kmv_0 = (1+k)mv. \tag{6.12.1}$$

Az egyenlet bal oldala a részrendszerek ütközés előtti lendületeinek összegét írja le, míg a jobb oldal az összeragadt testek összlendületét jelöli. Az egyenletből meghatározható az összeregadt testek együttes sebessége:

$$v = \frac{1+k}{1-k}v_0. \tag{6.12.2}$$

Az eredményből látható, hogy $k > 1$ esetben az összeragadt testek $-x$ irányba haladnak, míg $k < 1$ esetben az ellenkező irányba.
(b) $k = 2$ esetben a sebességek aránya

$$\frac{v}{v_0} = -3. \tag{6.12.3}$$

6.13. Feladat: (HN 9B-7) Fából készült $M = 800$ g tömegű ballisztikus ingatestbe vízszintes irányból $m = 20$ g tömegű ólomsörétet lőttünk. A lengésbe jövő ingatest $h = 10$ cm magasba emelkedik.
(a) Mekkora v közös sebességgel indul az ingatest-sörét rendszer?
(b) Mekkora v_0 sebességgel csapódik az ingába a golyó? A sörét K kinetikus energiájának hányadrésze veszett el, azaz fordítódott a fa deformálására, ill. felmelegítésére?

Megoldás:
(a) Az összeragadt inga-sörét rendszer össz mozgási energiája teljes egészében átalakul helyzeti energiává miközben h magasságba emelkedik:

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = (m+M)gh, \tag{6.13.1}$$

mely egyenletből az együttes sebesség

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{6.13.2}$$

Behelyettesítve a számadatokat $v \approx = 1,414$ m/s adódik.
(b) A golyó becsapódására az impulzus megmaradás tételét alkalmazhatjuk a sörétszemek sebességének meghatározására:

$$mv_0 = (m+M)v. \tag{6.13.3}$$

Az egyenlet segítségével meghatározhatjuk a sörétszemek sebsségét:

$$v_0 = \frac{m+M}{m}v. \tag{6.13.4}$$

Behelyettesítve a számadatokat $v_0 \approx 57,98$ m/s adódik. A kezdeti kinetikus energia

$$K = E_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 \approx 33,62\,\mathrm{J}, \tag{6.13.5}$$

míg az ütközés után

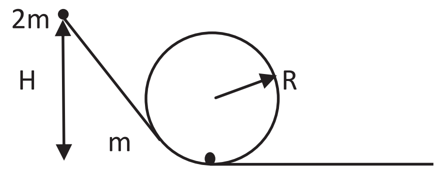
$$E_2 = \frac{1}{2}(m+M)v^2 \approx 0,82\,\mathrm{J}. \tag{6.13.6}$$

A mechanikai energiának az ütközés során a

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{E_1 - E_2}{E_1} \approx 97,6\,\%. \tag{6.13.7}$$

része veszett el, illetve alakult át hőenergiává.

6.14. Feladat: Egy $2m$ tömegű test súrlódás mentesen csúszik le a hurokhoz illeszkedő lejtőn a 30. ábrának megfelelően. Mekkora H magasságból indítsuk a testet, hogy a tökéletesen rugalmatlan ütközés után a pálya alján lévő m tömegű test végighaladjon a hurkon?



30. ábra.

Megoldás: A test mozgását három szakaszra oszthatjuk:
(a) *A $2m$ tömegű test lecsúszik a hurok aljára az ütközés előtti pillanatig.* A $2m$ tömegű test H magasságból való lecsúszásra a

$$2mgH = \frac{1}{2}2mv_0^2 \tag{6.14.1}$$

mechanikai energia-megmaradást kifejező egyenlet írható fel, amelyből az ütközés előtti sebesség

$$v_0 = \sqrt{2gH}. \tag{6.14.2}$$

(b) *Ezután a $2m$ tömegű test rugalmatlanul ütközik az m tömegű testtel, majd összetapadva mozognak tovább.* Az A m tömegű testtel való tökéletesen rugalmatlan ütközésre az impulzus megmaradásának tételét alkalmazzuk

$$2mv_0 = 3mv_1, \tag{6.14.3}$$

ahonnan az ütközés utáni v_1 sebesség

$$v_1 = \frac{2}{3}v_0 = \frac{2}{3}\sqrt{2gH}. \tag{6.14.4}$$

(c) *Végül az összetapadt $3m$ tömegű test feljut a hurok tetejére és éppen áthalad a tetőponton.* A $2R$ magas hurok tetején az összeragadt $3m$ tömegű test v_2 sebessége az

$$\frac{1}{2}3mv_1^2 = \frac{1}{2}3mv_2^2 + 3mg\,2R \tag{6.14.5}$$

egyenletből határozható meg. Innen a v_2 tetőponti sebesség

$$v_2 = \sqrt{\frac{8}{9}gH - 4gR}. \tag{6.14.6}$$

A tetőponton való áthaladáshoz szükséges minimális sebességet a test és a hurok között fellépő nyomási erő eltűnése határozza meg. Ekkor a testet csak a súlyerő tartja körpályán, azaz

$$3m\frac{v_2^2}{R} = 3mg. \qquad (6.14.7)$$

Behelyettesítés után a minimális indítási magasság

$$H = \frac{45}{8}R. \qquad (6.14.8)$$

Rugalmas ütközések

6.15. Feladat: Mutassa meg, hogy a kemény asztallapon pattogó m tömegű golyó hosszú idő átlagában mg erővel nyomja az asztallapot!

Megoldás: Ha a golyót h magasságból leejtük, az $v = \sqrt{2gh}$ sebességgel csapódik be az asztallapba. Tökéletesen rugalmas ütközéskor a sebesség nagysága nem, csupán az iránya változik meg az ellenkezőjére. Ennek megfelelően a golyó impulzusváltozása

$$\Delta P = mv - (mv) = 2mv = 2m\sqrt{2gh}. \qquad (6.15.1)$$

Két ütközés között eltelt Δt idő (mely a mozgás során fellépő átlagos erőhatás kiszámolásához szükséges) kétszerese a szabadon eső test h magasságból történő esési idejének, azaz

$$\Delta t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}. \qquad (6.15.2)$$

Így az átlagos erő

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2m\sqrt{2gh}}{2\sqrt{\frac{2h}{g}}} = mg, \qquad (6.15.3)$$

ami a feladat állításával megegyezik.

6.16. Feladat: Egy L oldalélű hasábban az oldallal párhuzamosan, v_0 sebességgel mozog egy m tömegű részecske.

(a) Mekkora átlagos erővel nyomja a reészecske a szembenlévő falakat?

(b) Mekkora az átlagos nyomás, ha a mozgásra merőleges lapok felülete A?

(c) Hogyan változik a megoldás, ha N részecske teszi ezt?

Megoldás:
(a) A részecske impulzusváltozása a fallal való ütközés során $\Delta P = 2mv_0$. Két egymást követő ütközés között eltelt idő pedig $\Delta t = \frac{2L}{v_0}$. Az ütközések során fellépő átlagos erő tehát

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2mv_0}{\frac{2L}{v_0}} = \frac{mv_0^2}{L}. \tag{6.16.1}$$

(b) A falakon ébredő átlagos nyomás:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{mv_0^2}{LA}. \tag{6.16.2}$$

(c) N részecske esetén a falakat nyomó F_N erő, illetve p_N nyomás megsokszorozódnak:

$$F_N = N\frac{mv_0^2}{L}, \qquad p_N = N\frac{mv_0^2}{LA}. \tag{6.16.3}$$

(*Megjegyzés:* Utóbbi eredmények szolgálnak a kinetikus gázelmélet alapjául!)

6.17. Feladat: Vízszintes légpárnás sínen két kis test mozoghat súrlódásmentesen. A testek tömege $m_1 = 0{,}2$ kg és $m_2 = 0{,}3$ kg, sebessége $v_1 = 2$ m/s illetve $v_2 = 1{,}5$ m/s. Mekkora lesz a testek sebessége, ha tökéletesen rugalmasan ütköznek?

Megoldás: A rugalmas ütközés azt jelenti, hogy a két test külön-külön fog mozogni u_1 illetve u_2 sebességgel. Az impulzusmegmaradás miatt

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2. \tag{6.17.1}$$

A tökéletesen rugalmas fogalom pedig azt jelenti, hogy az ütközésben a kinetkus energia megmarad, azaz

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2. \tag{6.17.2}$$

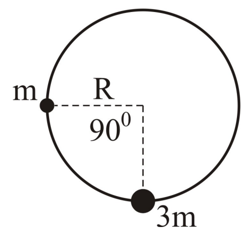
Az egyenletrendszert u_1-re és u_2-re megoldva

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} = 1{,}4\,\mathrm{m/s} \tag{6.17.3}$$

és

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2} = 1{,}9\,\mathrm{m/s}. \tag{6.17.4}$$

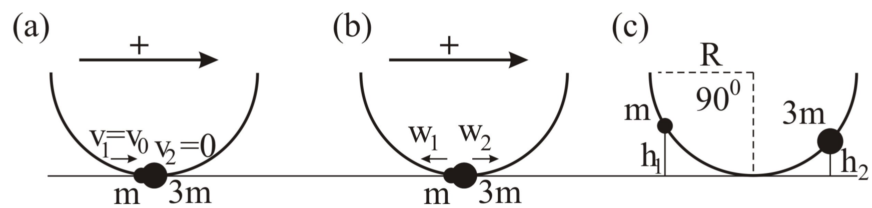
adódik.



31. ábra.

6.18. Feladat: (HN 9C-32) Függőleges síkú, R sugarú körré hajlított, merev huzalon a rá fűzött m tömegű gyöngy a 31. ábrán látható módon lecsúszik. A körpálya oldalsó pontjából nyugalomban lévő gyöngy pusztán a gravitáció hatására lecsúszik és rugalmasan ütközik a kör legmélyebb pontjában nyugalomban lévő $3m$ tömegű másik gyönggyel.
(a) Az R sugárral kifejezve határozzuk meg, hogy milyen magasra emelkednek a gyöngyök az ütközés után!
(b) Az ütközés után a gyöngyök súrlódámentesen folyamatosan tovább mozognak és újra rugalmasan ütköznek. Határozzuk meg, hogy mennyi a gyöngyök sebessége közvetlenül a második ütközés után!

Megoldás:
(a) A 32.(a) ábra az R magasságból lecsúszó v_0 sebességű és m tömegű gyöngy a $3m$ tömegű



32. ábra.

gyönggyel való ütközésének pillanatát mutatja. Az ütközés pillanatáig az R magasságból lecsúszó gyöngy potenciális energiája átalakul mozgási energiává:

$$mgR = \frac{1}{2}mv_0^2. \tag{6.18.1}$$

Ezért az m tömegű gyöngy sebessége $v_0 = \sqrt{2gR}$. A rugalmas ütközés folyamatára az impulzus megmaradás mellett fennáll a mechanikai energia-megmaradása is. A 32.(a) és 32.(b) ábrákon bejelölt pozitív irányok alapján felírhatjuk az ütközés előtti és utáni lendületek mérlegét.

$$m_1v_1 - m_2v_2 = -m_1w_1 + m_2w_2. \tag{6.18.2}$$

A mechanikai energia-megmaradása pedig a

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1w_2^2+\frac{1}{2}m_2w_2^2 \tag{6.18.3}$$

egyenlettel fejezhető ki. A (6.18.2) és (6.18.3) egyenletek egy általános, egyenes menti rugalmas ütközést írnak le. Esetünkben $m_1=m$, $m_2=3m$, $v_1=v_0$, $v_2=0$ és w_1, valamint w_2 ismeretlen paraméterek. Átalakítva a (6.18.2) és (6.18.3) egyenleteket:

$$m_1(v_1+w_1)=m_2(w_2+v_2), \tag{6.18.4}$$

és

$$m_1(v_1^2-w_1^2)=m_2(w_2^2-v_2^2) \tag{6.18.5}$$

adódnak. Elosztva egymással a két egyenletet és felhasználva az $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ aznosságot

$$v_1-w_1=w_2-v_2 \tag{6.18.6}$$

adódik. A (6.18.6) és (6.18.2) egyenletekből kiküszöbölve a w_2 sebességet,

$$w_1=\frac{2m_2}{m_1+m_2}v_2+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_1. \tag{6.18.7}$$

adódik. Analóg módon

$$w_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1+\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_2. \tag{6.18.8}$$

Esetünkben az ütközés utáni sebességek (lásd a 32.(b) ábrát) $w_1=w_2=\frac{v_0}{2}$-nek adódnak. Mivel a gyöngyök sebessége az ütközés után azonos, a gyöngyök tömegüktől függetlenül ugyanolyan $h_1=h_2=h$ magasba emelkednek (lásd a 32.(c) ábrát). Az emelkedési magasságot a mechanikai energia-megmaradás segítségével számolhatjuk ki. Az m tömegű gyöngy esetében

$$mgh=\frac{1}{2}mw_1^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2=\frac{1}{8}mv_0^2=\frac{1}{4}mgR. \tag{6.18.9}$$

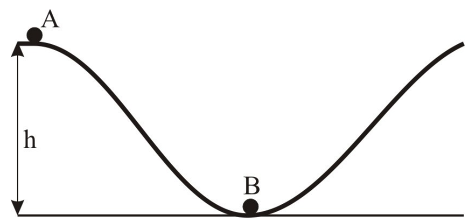
Az emelkedési magasság tehát $h=R/4$.

(b) A (6.18.7) és (6.18.8) egyenleteket felhasználhatjuk a második ütközés utáni sebességek meghatározásához is. Ebben az esetben a „beérkező” sebességek nagysága megegyezik az első ütközés utáni sebességek nagyságával. Behelyettesítve az értékeket, a második ütközés után $w_1=v_0$ és $w_2=0$ adódik rendre az m és $3m$ tömegű gyöngyök sebességére. A sebességek nagysága pont akkora, mint amekkora sebességgel közvetlenül az első ütközés előtt találkoztak a gyöngyök. Ez az eredmény nem meglepő, hiszen a (6.18.2) és (6.18.3) egyenleteknek két független megoldása van, melyek mindegyike kielégíti a lendület és energia-megmaradás törvényit.

6.19. Feladat: A 33. ábrán látható súrlódásmentes pálya A pontjából elengedünk egy testet. Végigcsúszva a B pontban ütközik egy másik testtel.

(a) Mekkora v sebességgel ér az A pontból indított test a B pontban lévő testhez?

(b) Milyen magasra emelkedik a másik test, ha az ütközés tökéletesen rugalmas ($m_A = m_B/2$, $h = 1.8$ m)?



33. ábra.

Megoldás:

(a) A h m magasból kezdő sebesség nélkül induló, súrlódásmentesen lecsúszó test sebessége felhasználva az energia-megmaradás elvét $v = \sqrt{2gh} = 6$ m/s.

(b) A tökéletesen rugalmas ütközés esetében az

$$m_A v = m_A v_A + m_B v_B \tag{6.19.1}$$

impulzus-megmaradás mellett érvényes a mechanikai energia megmaradása is:

$$\frac{1}{2} m_A v^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2. \tag{6.19.2}$$

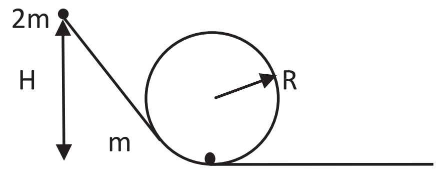
Az egyenletekben v_A és v_B az A illetve B testek ütközés utáni sebességét jelöli. Figyelembe véve, hogy $m_A = m_B/2$, e két egyenlettel a B test ütközés utáni sebessége:

$$v_B = \frac{2}{3} v = \frac{2}{3}\sqrt{2gh} = 4\,\mathrm{m/s}. \tag{6.19.3}$$

A B test emelkedési magassága pedig

$$h_B = \frac{v_B^2}{2g} = 0,8\,\mathrm{m}. \tag{6.19.4}$$

6.20. Feladat: Egy $2m$ tömegű test súrlódás mentesen csúszik le a hurokhoz illeszkedő lejtőn a 34. ábrának megfelelően. Mekkora H magasságból indítsuk a testet, hogy a tökéletesen rugalmas ütközés után a pálya alján lévő m tömegű test végighaladjon a hurkon? Megoldás:



34. ábra.

Általános ütközések

6.21. Feladat: $h_1 = 1,25$ m magasból $m = 1$ kg tömegű golyó a $\Delta t = 0,05$ s időtartamú kölcsönhatás után $h_2 = 80$ cm magasra pattan vissza. Mekkora átlagos erőt fejtett ki a talaj a golyóra ezen ütközés alatt?

Megoldás: A h_1 magasságból eső test

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} \tag{6.21.1}$$

sebességgel csapódik be, míg a h_2 magasságba feljutó test a talajról

$$v_2 = \sqrt{2gh_2} \tag{6.21.2}$$

sebességgel pattan vissza. Az ütközés alatt a teljes impulzusváltozás

$$\Delta P = mv_1 - (-mv_2). \tag{6.21.3}$$

A talaj és a golyó közt ébredő erő ezért

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m(\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_2})}{\Delta t}. \tag{6.21.4}$$

Behelyettesítve a számadatokat $F = 180$ N adódik.

Folytonos közegek impulzusváltozása

6.22. Feladat: (HN 8A-33) A 600 l/perc hozamú és 20 m/s sebességű vízszintes irányú vízsugár függőleges falba ütközik, s számottevő freccsenés nélkül szétterül rajta. Mekkora erőt fejt ki a vízsugár a falra? (A víz sűrűsége 1000 kg/m^3.)

Megoldás: Jelölések: $\eta = 600$ l/perc = 10 l/s = 0.01 m^3/s, $v = 20$ m/s és $\varrho = 1000$ kg/m^3. A falra Δt idő alatt

$$\Delta m = \eta\varrho\Delta t \tag{6.22.1}$$

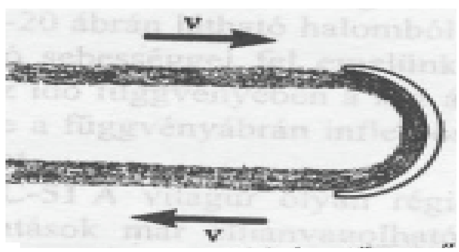
tömeg esik és áll meg. A beérkező víz teljes impulzusváltozása

$$\Delta P = v\Delta m = v\eta\varrho\Delta t. \tag{6.22.2}$$

A falon ébredő erő

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = v\eta\varrho = 200\,\mathrm{N}. \tag{6.22.3}$$

6.23. Feladat: (HN 8A-34) Egy nyugvó turbinalapátba vízsugár ütközik. A lapát a vízsugár irányát az 35. ábrán látható módon megfordítja. A víz sebessége mind az ütközés előtt, mind



35. ábra.

az ütközés után v. Határozzuk meg a lapátra ható erőt, ha az időegységentként becsapódó víz tömege μ!

Megoldás: Az időegységentként becsapódó víz tömege

$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t}. \tag{6.23.1}$$

A beérkező víz impulzusa $I_{\rightarrow} = mv$, a távozóé $I_{\leftarrow} = -mv$. Az impulzusváltozás:

$$\Delta I = 2mv, \tag{6.23.2}$$

amellyel az ébredő erő:

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\Delta 2mv}{\Delta t} = 2v\frac{\Delta m}{\Delta t} = 2\mu v. \tag{6.23.3}$$

6.24. Feladat: (HN 8A-40) Egy 3000 kg tömegű rakéta meghajtású űrhajó egy helyben lebeg a Hold felszíne felett, ahol a $g = 1,63$ m/s^2. Mekkora sebességgel bocsátja ki a rakéta a hajtóanyagot, ha 2 kg/s sebességgel fogyasztja a fűtőanyagot?

Megoldás: A kezdeti lépésben tételezzük fel, hogy a t időpillanatban az m rakéta v sebességgel halad felfelé. Ekkor az impulzusa:

$$I_1 = mv \qquad (6.24.1)$$

A $t+\Delta t$ időpillanatban a Δm kiáramlott gázzal kevesebb – azaz $m-\Delta m$ –, sebessége Δv-vel nő – azaz $v+\Delta v$. Ha kiáramló gáz sebessége a rakétához képest u – lefele irányban –, akkor a Δm kiáramlott gáz sebessége az álló megfigyelőhöz képest: $v-u$. A $t+\Delta t$ időpillanathoz tartozó impulzus:

$$I_2 = (m-\Delta m)(v+\Delta v)+\Delta m(v-u). \qquad (6.24.2)$$

A Δt alatti impulzusváltozás:

$$\Delta I = I_2 - I_1 = m\Delta v - u\Delta m. \qquad (6.24.3)$$

Az m tömegű rakétára ható erő: $F = -mg$. Így az impulzus tétel értelmében:

$$F = -mg = \frac{\Delta I}{\Delta t} = I_2 - I_1 = m\frac{\Delta v}{\Delta t} - u\frac{\Delta m}{\Delta t}. \qquad (6.24.4)$$

Felhasználva a feladat szövegét, hogy a rakéta áll, azaz $\frac{\Delta v}{\Delta t} = 0$, $\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t}$, valamint a rakéta tömegének időbeli változását $m(t) = m_0 - \mu t$ (m_0 a kezdeti tömeg), felírható:

$$(m_0 - \mu t)g = \mu u(t), \qquad (6.24.5)$$

amelyből

$$u(t) = \frac{m_0 - \mu t}{\mu} g = 1,63\frac{3000-2t}{2}. \qquad (6.24.6)$$

Világos, hogy egyre kisebb kiáramlási sebességre van szükség a csökkenő tömeg miatt. A $t = 0$ időpillanatban $u = 2445$ m/s.

6.25. Feladat: (HN 8B-41) A 130000 kg tömegű rakéta függőlegesen helyezkedik el a kilövőálláson.
(a) Mekkorának kell lennie a hajtóművek tolóerejének ahhoz, hogy a rakéta 17 m/s^2 gyorsulással induljon felfelé?
(b) Hány kg/s a hajtóanyag fogyasztás akkor, ha a hajtógáz rakétához viszonyított sebessége 2100 m/s?

Megoldás: Jelölések: $m = 130000$ kg; $a = 17$ m/s^2 és $u = 2100$ m/s.

(a) Az indulás pillanatában

$$ma = F - mg \tag{6.25.1}$$

a rakéta mozgásegyenlete. Innen a tolóerő

$$F = m(a+g) = 3{,}51 \cdot 10^6\,\mathrm{N}. \tag{6.25.2}$$

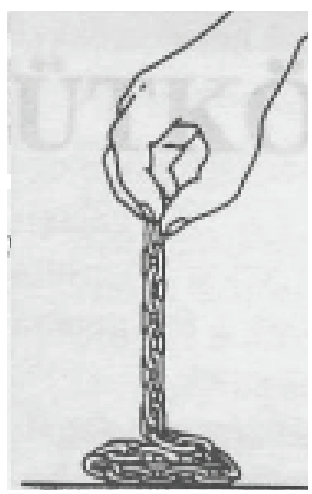
(b) Ez a tolóerő az u sebességgel kiáramló gáz következménye, azaz

$$F\Delta t = (\Delta m)u, \tag{6.25.3}$$

amelyből a hajtóanyag fogyasztás

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{F}{u} = 1671\,\mathrm{kg/s}. \tag{6.25.4}$$

6.26. Feladat: (HN 8C-48) Egy függőlegesen lógó, m tömegű hajlékony l hosszúságú láncot állandó v sebességgel engedünk le az asztalra az 36. ábrán látható módon. Adjuk meg az idő függvényében, hogy mekkora erőt fejt ki a lánc az asztalra!



36. ábra.

Megoldás: A hosszegységenkénti tömeget jelölje $\lambda = \frac{m}{l}$; a t idő alatti süllyedés hossza $x = vt$. Így ennyi idő alatt $m(t) = \lambda x = \frac{m}{l}vt$ tömeg van az asztalon, amely

$$N_1 = \frac{m}{l}vtg \tag{6.26.1}$$

erővel nyomja az asztalt. Ez az ébredő erő egyik része. A másik rész ahhoz kötődik, hogy a v sebességű dx hossz megáll. Ennek a hossznak az impulzusváltozása:

$$\Delta I = \lambda dx\, v = \frac{m}{l} v \Delta t\, v = \frac{mv^2}{l} \Delta t. \tag{6.26.2}$$

A megállításból eredő másik rész

$$N_2 = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{mv^2}{l}. \tag{6.26.3}$$

Az összes erő tehát

$$N = \frac{m}{l} vtg + \frac{mv^2}{l}. \tag{6.26.4}$$

6.27. Feladat: (HN 9C-47) A Földhöz viszonyítva v sebességű és időegységenként μ tömeget szállító vízáram csapódik a turbinalapátra. Az ütközés hatására a turbinalapát egyenesvonalú mozgásba kezd, míg a vízáram $v/4$ sebességgel visszafelé halad a Földhöz képest.

(a) Mekkora sebességgel mozog a turbinalapát?

(b) Határozzuk meg v és μ függvényében, hogy mekkora erő hat a mozgó lapátra?

Megoldás:

(a) Az u sebességgel mozgó turbinalapáton fordul meg a vízáram. Figyelembe véve a relatív sebességeket fennáll, hogy

$$v - u = u + \frac{1}{4} v. \tag{6.27.1}$$

Innen a turbinalapát sebessége

$$u = \frac{3}{8} v. \tag{6.27.2}$$

(b) Ha m tömegű víz fordul meg, akkor annak impulzusváltozása

$$\Delta I = 2m(v - u) = \frac{5}{4} mv. \tag{6.27.3}$$

A Δt idő alatt a turbinalapátra beérkező tömeg

$$m = \mu \Delta t \frac{v - u}{v}, \tag{6.27.4}$$

amellyel az impulzusváltozás

$$\Delta I = \frac{25}{32} \mu v \Delta t. \tag{6.27.5}$$

Az ébredő erő

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{25}{32} \mu v. \tag{6.27.6}$$

7. Feladatok a gravitásiós erő tárgyköréből. Kepler törvényei

Centrális erőtér. Potenciális energia

7.1. Feladat: (HN 16B-16) A "szinkron" műhold akkora sebességgel kering körpályán, hogy a földi megfigyelő számára nyugalomban lévőnek látszik.
(a) Magyarázzuk meg, miért csak az egyenlítő síkjában lévő pályán lehetséges az ilyen mozgás!
(b) Határozzuk meg a pálya sugarát a Föld középpontjától mérve!
(c) Határozzuk meg azt a legtávolabbi szélességi fokot, ahonnan ez a műhold a Földről még látható!

Megoldás: Jelölések: m a műhold tömege; M a Föld tömege; T a Föld forgásának periódus ideje; R a műhold távolsága a Föld középpontjától; R_F a Föld sugara.
(a) A körmozgás a Föld forgástengelye körül kell történjen, amelyhez kizárólag e tengelyre merőleges erő szükséges. A Föld a centruma felé vonzza a testeket. Az első feltétel csak akkor teljesül, ha a test az Egyenlítőn van.
(b) A műhold ún. geostacionárius pályán kering, azaz szögsebessége megegyezik a Föld forgáshoz tartózó $\omega = \frac{2\pi}{T}$ szögsebességgel. A keringő műhold mozgásegyenlete

$$mR\omega^2 = \gamma \frac{mM}{R^2}. \tag{7.1.1}$$

A szögsebesség behelyettesítése és az egyenlet átrendezése után az R sugár

$$R = \sqrt[3]{\frac{\gamma M T^2}{4\pi^2}} = 42170\,\mathrm{km}. \tag{7.1.2}$$

(c) Az szélesség kör, ahonnan a műhold még látható

$$\cos\theta = \frac{R_F}{R} = 0,1511 \;\longrightarrow\; \theta = 81,3^0. \tag{7.1.3}$$

7.2. Feladat: (HN 16B-31) Egy nem forgó gömb alakú bolygó tömege M, sugara R. A bolygó felszínéről radiális irányban egy részecskét lőnek ki $\sqrt{\gamma M/(2R)}$ sebességgel. Számítsuk ki mekkora távolságra jut el a részecske a bolygó középpontjától?

Megoldás: A mechanikai energia megmaradás tételét kell alkalmazni – figyelembe véve, hogy az "eljutás" zérus pillanatnyi sebességet jelent –

$$\frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{mM}{R} = -\gamma\frac{mM}{R'}, \tag{7.2.1}$$

ahol R' a kérdéses távolság. A sebesség behelyettesítése után

$$R' = \frac{4}{3}R. \tag{7.2.2}$$

7.3. Feladat: (HN 16B-34) Jelölje M illetve R a Föld tömegét illetve sugarát.
(a) Mekkora az a minimális v_0 sebesség, amellyel az egyenlítőn függőlegesen kilőtt test a Föld felszínétől éppen két földsugárnyi magasságig emekedik? A Föld forgását és a légköri súrlódást ne vegyük figyelembe.
(b) A Föld forgását is számításba véve, növekszik, csökken vagy változatlan marad-e az a, kérdésre adott válasz számértéke?

Megoldás:
(a) A mechanikai energia megmaradásának tételét alkalmazva

$$-\gamma\frac{mM}{R} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -\gamma\frac{mM}{3R} \tag{7.3.1}$$

egyenlet írható fel, amelyből a kérdezett sebesség:

$$v_0 = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{\gamma M}{R}} = 9152\,\text{m/s}. \tag{7.3.2}$$

(b) A Föld forgása csökkenti ezt az értéket, mert a kinetikus energiában a sebesség négyzete van. A forgáshoz tartozó v_f sebesség érintő irányú (a kilövésre merőleges), amivel a kezdő sebesség négyzete: $v_0^2 + v_f^2$ mindig nagyobb mint v_0^2.

7.4. Feladat: (HN 16B-36) A Föld felszínén egy testet emelünk.
(a) Határozzuk meg annak a munkának a nagyságát, amivel egy 100 kg tömegű hasznos terhet 1000 km-rel a Föld felszíne felé lehet juttatni!
(b) Határozzuk meg azt a többletmunkát, ami ezen a szinten a hasznos teher körpályára állításához szükséges!

Megoldás: Adatok: $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2; $m = 100$ kg; $h = 1000$ km. A Föld tömege: $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg; sugara: $R = 6,37 \cdot 10^6$ m.
(a) Az általunk végzett munka

$$W = \int_R^{R+h} \gamma\frac{mM}{r^2}\,\mathrm{d}r = \left[\gamma\frac{mM}{r}\right]_R^{R+h} = \gamma\frac{mM}{R} - \gamma\frac{mM}{R+h} = 1,42 \cdot 10^8\,\text{J}. \tag{7.4.1}$$

(b) Az $R+h$ sugárnyi távolságban keringés feltétele, hogy az

$$\gamma\frac{mM}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{R+h} \tag{7.4.2}$$

fennálljon. E keringéshez tartozó többlet energia

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\gamma\frac{mM}{R+h} = 2,7\cdot 10^9\mathrm{J}.^* \tag{7.4.3}$$

* *Megjegyzés:* Tekintettel arra, hogy a Föld forog, és így a rakéta nem álló helyzetből indul, ennél kisebb energiára van szükség. Nem véletlen, hogy a kilővő állomásokat az Egyenlítőhöz közel igyekeznek telepíteni.

7.5. Feladat: (HN 16B-37) Mutassuk ki, hogy egy állandó sűrűségű bolygó felületéről a szökési sebesség a bolygó sugarával arányos!

Megoldás: A gömb alakú bolygó térfogata:

$$V = \frac{4R^3\pi}{3}, \tag{7.5.1}$$

tömege:

$$M = \varrho\frac{4R^3\pi}{3}. \tag{7.5.2}$$

A szökéshez minimálisan szükséges kinetikus energia

$$\frac{1}{2}mv^2 = \gamma\frac{mM}{R} = \gamma\frac{m\varrho\frac{4R^3\pi}{3}}{R} = \gamma m\varrho\frac{4R^2\pi}{3}. \tag{7.5.3}$$

Egyszerűsítések után:

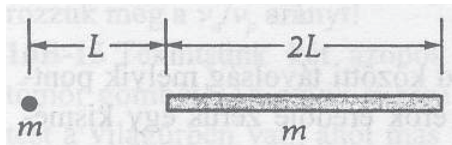
$$v = \sqrt{\frac{8}{3}\gamma\varrho\pi}R, \tag{7.5.4}$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

7.6. Feladat: (HN 16C-47) * A 37. ábrán látható kicsiny test és vékony rúd mindegyikének tömege m. A pontszerű test a rúd vonalában fekszik. A test L távolságban van a 2L hosszúságú rúd végétől. Mekkora a kicsiny m tömegű testre ható gravitációs erő?

Megoldás: A rúd hosszegységnyi tömege $\lambda = \frac{m}{2L}$, így a dx hosszhoz tartozó dm tömeg

$$dm = \lambda dx. \tag{7.6.1}$$



37. ábra.

Legyen a dm tömeg x távolságra az m tömegű testtől. A két test között ható erő nagysága

$$dF = \gamma \frac{m\,dm}{x^2}. \tag{7.6.2}$$

A teljes erő

$$F = \int_L^{3L} \gamma \frac{m\,\lambda dx}{x^2} = \gamma \frac{m^2}{2L}\left[-\frac{1}{x}\right]_L^{3L} = \gamma \frac{m^2}{3L^2}. \tag{7.6.3}$$

7.7. Feladat: (HN 16C-58) Egy ember a Föld felszínén gugguló helyzetből tömegközéppontját h magassággal tudja emelni. Számítsuk ki annak a legnagyobb (a Föld átlagsűrűségével azonos sűrűségű) kisbolygónak a sugarát, amelyről ez az ember ugyanilyen sebességgel felugorva elszökhetne, azaz elhagyhatná annak vonzáskörzetét.

Megoldás: A h magasságba ugró ember kezdősebessége

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{7.7.1}$$

A kisbolygó M tömege a ϱ sűrűséggel és az R sugárral kifejezve

$$M = \varrho \frac{4R^3\pi}{3}. \tag{7.7.2}$$

A kisbolygón v sebességgel felugró emberre a mechanikai energia megmaradás tételét alkalmazzuk azzal az ismerettel, hogy a távolban a sebessége – így a kinetikus energiája – zérus, másrészt a távoli pontban zérus a potenciális energia. Felírhatjuk tehát, hogy

$$\frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mM}{R} = 0, \tag{7.7.3}$$

amelybe a fenti tömeget behelyettesítve és az egyenltet a sugárra átrendezve kapjuk:

$$R = \sqrt{\frac{3gh}{4\pi\gamma\varrho}}. \tag{7.7.4}$$

7.8. Feladat: * Az M tömegű R sugarú bolygó egyenletes ϱ tömegsűrűségű.
(a) Hogyan változik az m tömegű kicsiny testre ható erő a bolygó belsejébe való haladás során?
(b) Hogyan változik a potenciális energia a bolygón belül?

Megoldás:
(a) Ha az m test a bolygó belsejében, annak középpontjától r távolságra van, akkor a gravitációs erőhatásba a bolygónak csak az r sugaron belüli része ad járulékot. Ezért először ezt a tömeget kell kiszámolni. A bolygó sűrűsége

$$\varrho = \frac{M}{\frac{4}{3}R^3\pi}, \tag{7.8.1}$$

amelyből az r sugárhoz tartozó $M(r)$ tömeg

$$M(r) = \frac{M}{\frac{4}{3}R^3\pi}\frac{4}{3}r^3\pi = M\frac{r^3}{R^3}. \tag{7.8.2}$$

Mostmár alkalmazni tudjuk a gravitációs erőtörvényt

$$\mathbf{F} = -\gamma\frac{mM(r)}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = -\gamma\frac{mM\frac{r^3}{R^3}}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = -\gamma mM\frac{r}{R^3}\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{7.8.3}$$

azaz a középponttól való távolsággal lineárisan változik. (Az $\mathbf{r}/r$ vektor a radiális egységvektor.)
(b) A bolygó felszínén a potenciális energia végtelen távoli ponthoz képest

$$U_p(R) = -\gamma\frac{mM}{R}. \tag{7.8.4}$$

Ehhez az értékhez képest az r sugárnyi távolságnál

$$U_p(r) - U_p(R) = \int_R^r \gamma mM\frac{r}{R^3}\mathrm{d}r = \left[\frac{1}{2}\gamma mM\frac{r^2}{R^3}\right]_R^r = \frac{1}{2}\gamma mM\frac{r^2}{R^3} - \frac{1}{2}\gamma mM\frac{1}{R}. \tag{7.8.5}$$

Így az a gravitációs potenciál az r pontban a végtelenhez képest

$$U_p(r) = -\gamma\frac{mM}{R} + \frac{1}{2}\gamma mM\frac{r^2}{R^3} - \frac{1}{2}\gamma\frac{mM}{R}. \tag{7.8.6}$$

Megjegyzés: Látható, hogy – talán nem meglepő módon – a bolygó közepén is véges a potenciális energia értéke

$$U_p(0) = -\frac{3}{2}\gamma\frac{mM}{R}. \tag{7.8.7}$$

7.9. Feladat: A *V1FIZ* nevű, $R = 40020$ km sugarú és $M = 6\cdot 10^{24}$ kg tömegű bolygó felszínétől R távolságban v_0 sebességgel keringő űrhajó pályájáról letér és a bolygó felszínébe csapódik. Mekkora a becsapódás sebessége? ($\gamma = 6,67\cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2)

Megoldás: Az űrhajó $2R$ sugarú keringésére érvényes, hogy

$$m\frac{v_0^2}{2R} = \gamma\frac{mM}{4R^2}, \tag{7.9.1}$$

ahonnan

$$v_0^2 = \gamma\frac{M}{2R}. \tag{7.9.2}$$

Másrészt érvényes a mechanikai energia megmaradás tétele, az a kezdeti kinetikai és potenciális energiák összege egyenlő a végső kinetikai és potenciális energiák összegével, azaz

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \gamma\frac{mM}{2R} = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{mM}{R}. \tag{7.9.3}$$

Ebből és a v_0 sebesség belyettesítével a becsapódási sebesség

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\gamma\frac{M}{R}} = \sqrt{\frac{5}{4}\gamma\frac{M}{R}} = 3535\,\mathrm{m/s}. \tag{7.9.4}$$

Kepler törvényei

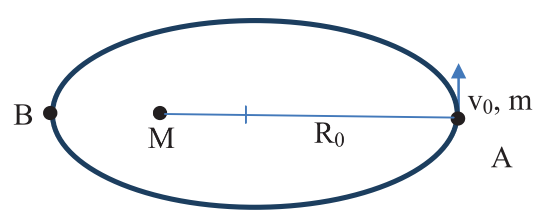
7.10. Feladat: M tömegű csillag körül m tömegű bolygó kering ellipszis pályán (– a csillag rögzítettnek tekinthető) a 38. ábra szerint. Az ellipszis fél nagytengelyét jelöljük "a"-val. A bolygó az $R_0 = R_A$ naptávolban (A) v_0 sebességgel halad.

(a) Mekkora a napközeli (B) távolság?

(b) Mekkora a bolygó sebessége?

(c) Mekkora munkát végzett a gravitációs erőtér?

(d) Ábrázolja grafikonon a potenciális energia értékeket (A, B)!



38. ábra.

Megoldás:

(a) Az ellipszisre nagytengelyére fennálló összefüggés

$$R_B + R_A = 2a, \tag{7.10.1}$$

ahol R_B a napközeli távolságot jelöli. Innen ez a távolság

$$R_B = 2a - R_A. \tag{7.10.2}$$

(b) Centrális erőtérről lévén szó, fennáll az impulzusmomentum megmaradás tétele, vagyis

$$mR_A v_0 = mR_B v_B, \tag{7.10.3}$$

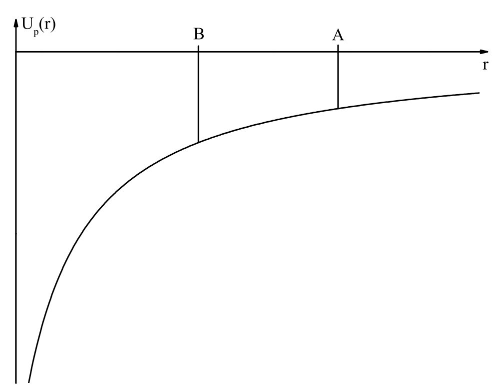
ahol v_B a B pontbeli (napközeli) sebességet jelöli. Innen

$$v_B = \frac{R_A v_0}{R_B} = \frac{R_A v_0}{2a - R_A}. \tag{7.10.4}$$

(c) Az erőtér által végzett munka

$$W = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{R_A^2}{(2a-R_A)^2} - 1\right) > 0. \tag{7.10.5}$$

(d) Az A és B pontokbeli potenciális energia értékeket a 39. ábra mutatja.



39. ábra.

8. Feladatok merev testek fizikájának tárgyköréből

Forgatónyomaték, impulzusmomentum, impulzusmomentum tétel

8.1. Feladat: (HN 10B-4) Egy $\mathbf{F} = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} + f_z\mathbf{k}$ ($f_x = 2$ N; $f_y = 3$ N; $f_z = 0$ N) erő hat egy testre. A test a z koordinátatengely mentén fekvő forgástengellyel van rögzítve. Az erő az $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

($x = 4$ m; $y = 5$ m; $z = 0$ m) pontban támad. Határozzuk meg a forgatónyomaték nagyságát és irányát!

Megoldás: A forgatónyomaték definíciója $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ szerint a

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = (yf_z - zf_y)\mathbf{i} + (zf_x - xf_z)\mathbf{j} + (xf_y - yf_x)\mathbf{k} \tag{8.1.1}$$

determináns kiszámolását kell elvégezzük. A számszerű adatok behelyettesítésével forgatónyomaték vektor

$$\mathbf{M} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \tag{8.1.2}$$

azaz a vektor nagysága 2 Nm, iránya a z tengely irányításával megegyezik.

8.2. Feladat: Egy "L" hosszúságú kötél végén 0,2 kg tömegű test függőleges síkban körmozgást végez. A pálya csúcsán a kör középpontjára vett perdület fele akkora, mint a pálya alján, ahol a tömeg kinetikus energiája 4 J. Mekkora az "L"?

Megoldás: Jelölések: $m = 0,2$ kg, $E = 4$ J, valamint v_a az alsó, v_f a felső pontbeli sebességek. Mivel a pálya alsó pontján ismerjük a kinetikus energiát, így az

$$E = \frac{1}{2}mv_a^2 \tag{8.2.1}$$

összefüggésből az alsóponti sebesség

$$v_a = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{40}\,\mathrm{m/s} = 6,32\,\mathrm{m/s}. \tag{8.2.2}$$

Az impulzusmomentum $N = (L =)mvL$ definíciójából következik, hogy a felső pontban úgy lehet a fele az alsó impulzusmomentumnak, ha a felsőponti sebesség

$$v_f = \frac{v_a}{2} = \sqrt{10}\,\mathrm{m/s} = 3,16\,\mathrm{m/s}. \tag{8.2.3}$$

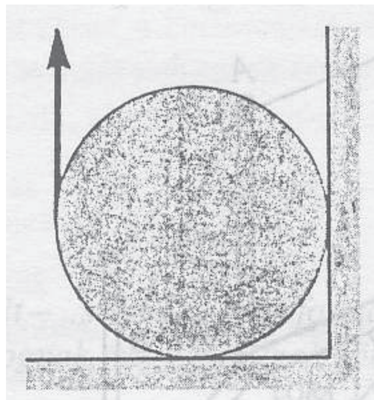
A két sebesség valamint az alsó és felső pontok magasssága közötti kapcsolatot a mechanikai energia megmaradását kifejező összefüggéssel teremthetjük meg:

$$\frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + mg \cdot 2L. \tag{8.2.4}$$

Az alsó és felső pontok közötti távolság $2L$. A behelyettesítések után a kötél hossza

$$L = 0,75\,\mathrm{m}. \tag{8.2.5}$$

8.3. Feladat: (HN 10C-48) A 40. ábra egy G súlyú homogén hengerre függőleges irányban ható F erőt mutat. A henger és a felületek közötti nyugalmi súrlódási együttható $\mu = 0,5$. Fejezzük ki a G függvényében azt a legnagyobb F erőt, amely még nem indítja meg a henger forgását!



40. ábra.

Megoldás: Jelölje N_1 a alsó érintkezési ponton felfele mutató támaszerőt, F_{s1} a balról jobbra mutató súrlódási erőt ugyanitt. Legyen N_2 a falnál jobbról balra mutató támaszerő, míg az itt ható felfele mutató súrlódási erő F_{s2}. E mennyiségek közötti kapcsolat

$$F_{s1} = \mu N_1 \tag{8.3.1}$$

és

$$F_{s2} = \mu N_2. \tag{8.3.2}$$

A henger akkor van egyensúlyban, ha a ható erők eredője és forgatónyomatéka zérus. Azaz előjel helyesen — pozitív az az erő, amely balról jobbra, illetve alulról felfele mutat — a függőleges irányban

$$0 = F - G + N_1 + F_{s2}, \tag{8.3.3}$$

a vízszintes irányban

$$0 = F_{s1} - N_2. \tag{8.3.4}$$

A forgatónyomatékra

$$0 = F_{s2}R + F_{s2}R - FR \tag{8.3.5}$$

A fenti öt egyenletből kell az F erőt kifejezni. A (8.3.1) és (8.3.2) súrlódási erők behelyettesítésével illetve az (8.3.5) egyenletben az R-rel való egyszerűsítés után kapjuk:

$$0 = F - G + N_1 + \mu N_2, \tag{8.3.6}$$

a vízszintes irányban

$$0 = \mu N_1 - N_2. \tag{8.3.7}$$

A forgatónyomatékra

$$0 = \mu N_2 + \mu N_1 - F \tag{8.3.8}$$

A (8.3.7) egyenletből N_2-őt kifejezve és a (8.3.6) valamint a (8.3.8) egyenletekbe helyettesítve

$$0 = F - G + (1+\mu^2)N_1 \tag{8.3.9}$$

és

$$0 = \mu(\mu+1)N_1 - F \tag{8.3.10}$$

adódik. Az N_1 eliminálásával az F erő

$$F = \frac{\mu(\mu+1)}{2\mu^2+\mu+1}G. \tag{8.3.11}$$

A $\mu = 0,5$ behelyettesítési értékkel az F erő maximális értéke

$$F = 0,375G. \tag{8.3.12}$$

8.4. Feladat: (HN 13B-7) Homogén tömör henger csúszás nélkül gördül le az α szög alatt hajló lejtőn. Bizonyítsuk be, hogy a csúszást gátló nyugalmi tapadási súrlódási együttható legkisebb értéke $\mathrm{tg}\alpha/3$ kell, hogy legyen! (A henger tehetetlenségi nyomatéka $\theta = \frac{1}{2}mR^2$.)

Megoldás: A hengerre az mg súlyerő, az $N = mg\cos\alpha$ támaszerő és az F_s tapadási súrlódási erő hat. A mozgásegyenletek a haladó mozgásra

$$ma = mg\sin\alpha - F_s, \tag{8.4.1}$$

és a forgómozgásra

$$\theta\beta = F_s R. \tag{8.4.2}$$

A tiszta gördülés feltétele az

$$a = R\beta. \tag{8.4.3}$$

összefüggéssel fogalmazható meg. A három egyenletből az F_s erő alakja

$$F_s = \frac{mg\sin\alpha}{1+\frac{mR^2}{\theta}}. \tag{8.4.4}$$

Figyelembe véve, hogy a tapadási erő maximális, ha

$$F_s = \mu mg\cos\alpha, \tag{8.4.5}$$

így ezt behelyettesítve a minimális μ tapadási együttható értékére — felhasználva a tehetetlenségi nyomaték kifejezését —

$$\mu = \frac{mg\sin\alpha}{(1+\frac{mR^2}{\theta})mg\cos\alpha} = \frac{\mathrm{tg}\theta}{1+\frac{mR^2}{\theta}} = \frac{\mathrm{tg}\theta}{3}. \tag{8.4.6}$$

adódik. Q.E.D.

8.5. Feladat: Egy tömör hengert és egy vékony falú csövet egyszerre engedünk el egy adott hajlásszögű lejtő tetejéről. Mindkét tárgy tisztán gördül.
(a) Határozza meg a henger tömegközéppontjának gyorsulását!
(b) Határozza meg a cső tömegközéppontjának gyorsulását!
(c) Milyen messze gurul el a cső, míg a henger s_h utat tesz meg?

Megoldás: Jelölje α a lejtő hajlásszögét, θ_h a henger és θ_{cs} a cső tehetetlenségi nyomatékát, F_s a tapadási súrlódási erőt. Az m és R a gördülő test tömege és sugara. ($\theta_h = \frac{1}{2}mR^2$; $\theta_{cs} = mR^2$)
A lejtőn legördülő test mozgásegyenlete a haladómozgásra

$$ma = mg\sin\alpha - F_s, \tag{8.5.1}$$

és a forgómozgásra — θ a gördülő test tehetetlenségi nyomatéka —

$$\theta\beta = F_s R. \tag{8.5.2}$$

A tiszta gördülés feltétele az

$$a = R\beta. \tag{8.5.3}$$

összefüggéssel fogalmazható meg. E három egyenletből a gyorsulás

$$a = \frac{m}{m+\frac{\theta}{R^2}} g\sin\alpha. \tag{8.5.4}$$

(a) A henger gyorsulása

$$a_h = \frac{m}{m+\frac{\theta_h}{R^2}} g\sin\alpha = \frac{2}{3} g\sin\alpha. \tag{8.5.5}$$

(b) A cső gyorsulása

$$a_{cs} = \frac{m}{m+\frac{\theta_{cs}}{R^2}} g\sin\alpha = \frac{1}{2} g\sin\alpha. \tag{8.5.6}$$

(c) A henger az s_h utat

$$t = \sqrt{\frac{2s_h}{a_h}} \tag{8.5.7}$$

idő alatt teszi meg. Ezalatt a cső

$$s_{cs} = \frac{1}{2}a_{cs}t^2 = \frac{1}{2}a_{cs}\frac{2s_h}{a_h} = \frac{3}{4}s_h \tag{8.5.8}$$

utat tesz meg.

8.6. Feladat: Egy jojó külső R sugara tízszerese belső r sugarának. A jojó orsója körüli tehetetlenségi nyomatéka jó közelítéssel $\theta = \frac{1}{2}mR^2$, ahol m a jojó teljes tömege. A fonál vége nem mozog.
(a) Számítsa ki a jojó tömegközéppontjának gyorsulását!
(b) Határozza meg a fonálban ébredő erőt!

Megoldás: Jelölés: a kötélerő K és $r = R/10$.
(a) A jojó tömegközéppontja körüli forgásra vonatkozó mozgásegyenlet

$$\theta\beta = Kr, \tag{8.6.1}$$

azaz a kötélerő hozza létre a β szöggyorsulású forgást. A haladó mozgásra felírható, hogy

$$ma = mg - K. \tag{8.6.2}$$

A haladó és forgómozgás közötti kapcsolat (tiszta gördülés)

$$a = r\beta. \tag{8.6.3}$$

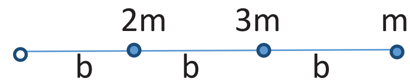
A három egyenletből a gyorsulás

$$a = \frac{g}{\frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2} + 1} = \frac{1}{51}g. \tag{8.6.4}$$

(b) A kötélerő

$$K = \frac{50}{51}mg. \tag{8.6.5}$$

8.7. Feladat: Egy elhanyagolható tömegű merev rúdra három pontszerű testet erősítettek. Az egyik végén csapágyazott rúd függőleges síkban lenghet.
(a) Mekkora a tehetetlenségi nyomaték a csapágyra nézve?
(b) Mekkora lesz az alsó test sebessége a rúd függőleges helyzeten való áthaladásakor, ha a 41. ábrán látható helyzetből kezdősebesség nélkül elengedjük?



41. ábra.

Megoldás:
(a) A felfüggesztési pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\theta = \sum_i m_i r_i^2 = 2mb^2 + 3m(2b)^2 + m(3b)^2 = 23mb^2. \tag{8.7.1}$$

(b) A testek helyzeti energiájának összes megváltozása:

$$\Delta E_h = 2mgb + 3mg \cdot 2b + mg \cdot 3b = 11mgb. \tag{8.7.2}$$

E helyzeti energiaváltozás alakul forgási energiává:

$$\Delta E_h = \frac{1}{2}\theta\omega^2, \tag{8.7.3}$$

amelyből behelyettesítés után a szögsebességre kapjuk:

$$\omega = \sqrt{\frac{22g}{23b}}. \tag{8.7.4}$$

Az m tömegű test sebessége az alsó pontban:

$$v = R\omega = 3b\omega = 3\sqrt{\frac{22gb}{23}}. \tag{8.7.5}$$

8.8. Feladat: Homogén tömör tárcsa sugara 6 cm, tömege 1,5 kg. Nyugalomból indul a motor által kifejtett 0,6 Nm forgatónyomaték hatására. Mennyi idő alatt éri el az 1200 1/perc fordulatszámot? ($\theta = \frac{1}{2}mr^2$)

Megoldás: Jelölések: $r = 6$ cm $= 0{,}06$ m, $m = 1{,}5$ kg, $M = 0{,}6$ Nm és $f = 1200$ 1/perc $= 20$ 1/s. A forgómozgás alapegyenlete szerint

$$\theta\beta = M, \tag{8.8.1}$$

ahonnan a β szöggyorsulás

$$\beta = \frac{M}{\theta} = \frac{2M}{mr^2} = 222{,}2\ 1/\mathrm{s}^2. \tag{8.8.2}$$

A szögsebesség és a fordulatszám közötti összefüggés

$$\omega = 2\pi f, \tag{8.8.3}$$

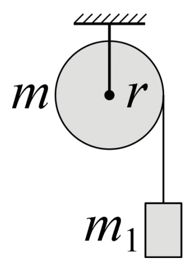
másrészt

$$\omega = \beta t. \tag{8.8.4}$$

A kérdéses fordulatszám eléréséhez szükséges idő

$$t = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = 0,565\,\mathrm{s}. \tag{8.8.5}$$

8.9. Feladat: Egy tömör, homogén m tömegű és r sugarú henger a rögzített, vízszintes helyzetű tengelye körül szabadon foroghat. A henger palástjára vékony, nyújthatatlan fonalat tekerünk, amelynek egyik vége a henger palástjára van rögzítve, a másik végére pedig m_1 tömegű testet rögzítünk. A homogén henger tehetetlenségi nyomatéka $\theta = 1/2mr^2$.



42. ábra.

(a) Mekkora szöggyorsulással mozog a henger, ha az m_1 testet elengedjük?
(b) Mekkora lesz a henger szöggyorsulása, ha az m_1 tömegű test helyett egy $F = m_1 g$ húzóerőt alkalmazunk?

Megoldás:
(a) A kötélben ébredő erőt jelöljük K-val. Így az m_1 tömegű test mozgásegyenlete

$$m_1 a = m_1 g - K. \tag{8.9.1}$$

A K kötélerő nyomatékot gyakorol az m tömegű hengerre, így a forgómozgás egyenlete

$$\theta\beta = Kr. \tag{8.9.2}$$

Az a gyorsulás és a β szöggyorsulás között érvényes a tiszta gördülés feltétele

$$a = r\beta. \tag{8.9.3}$$

Az egyenletrendszer megoldása a szöggyorsulásra

$$\beta = \frac{m_1 g}{(m_1 + m/2)r}. \tag{8.9.4}$$

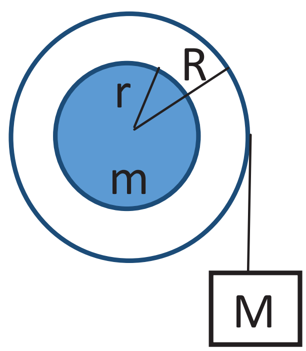
(b) Amennyiben $F = m_1 g$ húzóerőt alkalmazunk, úgy a szöggyorsulás közvetlenül kifejezhető a

$$\theta\beta = m_1 g r \tag{8.9.5}$$

egyenletből, azaz

$$\beta = \frac{2m_1 g}{mr}. \tag{8.9.6}$$

8.10. Feladat: Egy $r = 20$ cm "tehetetlenségi" sugarú, $m = 40$ kg tömegű kerék sugara $R = 30$ cm. Az R sugárhoz tartozó keréktömeget hanyagoljuk el.) Függőlegesen helyeztük egy vízszintes tengelyre. Egy $M = 2.0$ kg tömegű testet erősítettünk a szélére tekert kötélre a 43. ábrának megfelelően. Határozza meg a kerék elengedés utáni kezdeti szöggyorsulását! (A kerékre: $\theta = mr^2$.)



43. ábra.

Megoldás: Jelölés: a kötelben ébredő erő K. A kerék forgómozgására felírhatjuk, hogy

$$\theta\beta = KR, \tag{8.10.1}$$

míg az m tömegű test haladó mozgására

$$Ma = Mg - K. \tag{8.10.2}$$

A tiszta gördülés feltétele, hogy

$$a = R\beta. \tag{8.10.3}$$

E három egyenletből a kiszámolt szöggyorsulás

$$\beta = \frac{MgR}{\theta + MR^2} = \frac{MgR}{mr^2 + MR^2} = 3,37\,1/\mathrm{s}^2. \tag{8.10.4}$$

8.11. Feladat: Egy lendkerék fordulatszáma 60 rad/s-ról 180 rad/s-ra növekedett a rajta történt 100 J munkavégzés következtében.
(a) Mekkora a tehetetlenségi nyomatéka?
(b) Ezt követően egy 3-szor nagyobb tehetetlenségi nyomatékú álló kereket nyomunk a lendkerékhez. Mekkora lesz a kialakuló közös fordulatszám?

Megoldás: a, A végzett munka a kinetikus energiát változtatja meg, azaz

$$W = \frac{1}{2}\theta\omega_2^2 - \frac{1}{2}\theta\omega_1^2, \tag{8.11.1}$$

ahol ω_1 a kezdeti, ω_2 a végső szögsebesség, θ a tehetetlenségi nyomaték. Innen a tehetetlenségi nyomaték

$$\theta = \frac{2W}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = 0,00694\,\mathrm{kgm}^2. \tag{8.11.2}$$

b, Az impulzusmomentum megmaradása miatt

$$\theta\omega_2 = (\theta + 3\theta)\omega', \tag{8.11.3}$$

amelyből

$$\omega' = \frac{1}{4}\omega_2 = 45\,\mathrm{rad/s}. \tag{8.11.4}$$

8.12. Feladat: Egy m tömegű, $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ tehetetlenségi nyomatékú kereket ω_0 szögsebességgel megforgatunk és zérus kezdősebességgel a μ súrlódási együtthatójú talajra engedjük.
(a) Mennyi idő múlva fog tisztán gördülni a kerék?
(b) Mekkora utat tesz meg eközben?

Megoldás:
(a) A kerék és a talaj között ébredő μmg súrlódási erő kezdi haladó (transzlációs) mozgásában gyorsítani a kereket, másrészt az súrlódási erő miatt ébredő forgatónyomaték fékezi forgó (rotációs) mozgásában. A kerék haladó mozgására érvényes dinamikai egyenlet

$$ma = \mu mg, \tag{8.12.1}$$

ahol a poziztív előjel a sebesség növekedését fejezi ki. Míg a forgómozgásra felírható egyenlet — a forgómozgás alapegyenlete — a

$$\theta\beta = M = -\mu mgR, \tag{8.12.2}$$

ahol a negatív előjel azt fejezi ki, hogy a súrlódási erő által létrehozott forgatónyomaték csökkenti a szögsebességet. Ezekből a kerék a gyorsulása és β szöggyorsulása

$$a = \mu g \tag{8.12.3}$$

és

$$\beta = -\frac{\mu mgR}{\theta}. \tag{8.12.4}$$

A $v(t)$ sebesség és az $\omega(t)$ szögsebesség egyszerűen

$$v(t) = \mu gt \tag{8.12.5}$$

és

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{\mu mgR}{\theta}t. \tag{8.12.6}$$

A tiszta gördülés feltétele, hogy az

$$v(t) = R\omega(t) \tag{8.12.7}$$

feltétel teljesüljön, azaz

$$\mu gt = R\left(\omega_0 - \frac{\mu mgR}{\theta}t\right). \tag{8.12.8}$$

A θ behelyettesítésével a kérdezett eltelt idő

$$t = \frac{R\omega_0}{3\mu g}. \tag{8.12.9}$$

(b) Az eközben megtett út

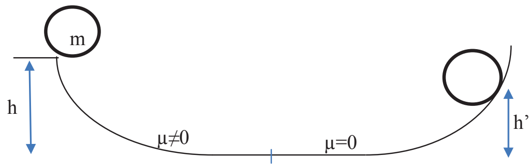
$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\mu g\frac{R^2\omega_0^2}{9\mu^2 g^2} = \frac{1}{18}\frac{R^2\omega_0^2}{\mu g}. \tag{8.12.10}$$

8.13. Feladat: A 44. ábrán látható módon az m tömegű $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ tehetetlenségi nyomatékú korongot egy lejtőn h magasságban elengedünk. A lejtő tapadási súrlódási együtthatója $\mu \neq 0$, ezért a korong itt tisztán gördül. A pálya második fele viszont súrlódásmentes.

(a) Mekkora sebessége és szögsebessége van a korongnak a lejtő alján?

(b) Milyen h' magasra megy fel a súrlódásmentes emelkedőn a korong?

(c) Mennyi a lejtő tetején a korong impulzus momentuma?



44. ábra.

Megoldás:

(a) A korong a lejtőn tisztán gördül, ezért sebesség és szögsebesség között fenn áll a $v = R\omega$. A mechanikai energia megmaradás tétele miatt:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{8.13.1}$$

A két összefüggés segítségével kifejezhető a sebesség

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} \tag{8.13.2}$$

és

$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh}. \tag{8.13.3}$$

(b) A lejtő jobb oldala súrlódásmentes, ami azt jelenti, hogy a test a lejtőn felszalad h' és ott egy helyben forog ω szögsebességgel. Azaz transzlációs kinetikus energiája alakul csak át helyzeti energiává:

$$mgh' = \frac{1}{2}mv^2. \tag{8.13.4}$$

Innen az emelkedés magassága

$$h' = \frac{2}{3}h. \tag{8.13.5}$$

(c) A lejtő tetején forgó korong az impulzusmomentuma:

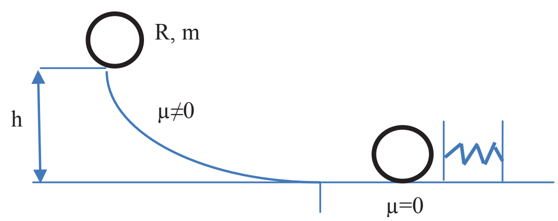
$$N = \theta\omega = \frac{1}{2}mR^2\frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh} = mR\sqrt{\frac{gh}{3}}. \tag{8.13.6}$$

8.14. Feladat: Egy $R = 10$ cm sugarú, $m = 1$ kg tömegű tömör korong ($\theta = \frac{1}{2}mR^2$) tisztán legördül egy $h = 0,3$ m magasságú lejtős pályán. A lejtő alján nekiütközik a 45. ábrán látható fékezőrugónak, amelynek ütközője és a pálya ezen szakasza súrlódásmentes. A $k = 400$ N/m rugóállandójú rugó nyugalmi hossza $l_0 = 20$ cm.

(a) Mekkora a korong sebessége és szögsebessége a lejtő alján?

(b) Mekkora a korong impulzusmomentuma a rugó összenyomódása után?

(c) Mennyivel nyomódott össze a rugó?



45. ábra.

Megoldás:

(a) A korong a lejtőn tisztán gördül, ezért sebesség és szögsebesség között fenn áll a $v = R\omega$. A mechnikai energia megmaradás tétele miatt:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{8.14.1}$$

A két összefüggés segítségével kifejezhető a sebesség

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = 2\text{m/s} \tag{8.14.2}$$

és

$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh} = 20\,\text{rad/s}. \tag{8.14.3}$$

(b) A lejtő jobb oldala súrlódásmentes, ami azt jelenti, hogy a test a rugót összenyomja és ott egyhelyben forog ω szögsebességgel:

$$N = \theta\omega = \frac{1}{2}mR^2\frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh} = mR\sqrt{\frac{gh}{3}} = 0,1\,\text{kg m}^2/\text{s}. \tag{8.14.4}$$

(c) A fentiek szerint a transzlációs kinetikus energiája alakul csak át rugalmas energiává:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(l_0 - l)^2. \tag{8.14.5}$$

Innen az összenyomódás mértéke:

$$\Delta = l_0 - l = \sqrt{\frac{mv^2}{k}} = 0,1\,\mathrm{m}. \tag{8.14.6}$$

8.15. Feladat: Egy R sugarú, m tömegű homogén tömegeloszlású nem forgó kereket tengelyre merőlegesen v_0 sebességgel meglökünk és a μ súrlódási együtthatójú talajra engedjük. A kerék tehetetlenségi nyomatéka $\theta = \frac{1}{2}mR^2$.

(a) Mennyi idő múlva fog tisztán gördülni a kerék?

(b) Mekkora utat tesz meg eközben?

Megoldás:

(a) A kereket a talajra engedve a v_0 sebességgel ellentétes $F_s = -\mu mg$ súrlódási erő hat, amely egyrészt csökkenti a sebességet, másrészt a kerék középpontjára forgatónyomatékot ad, amely a kereket forgásba hozza. A transzlációra vonatkozó mozgásegyenlet

$$ma = F_s = -\mu mg, \tag{8.15.1}$$

amelyből a gyorsulás

$$a = -\mu g. \tag{8.15.2}$$

Így a kerék sebessége a

$$v(t) = v_0 - \mu g t \tag{8.15.3}$$

függvény szerint változik. A forgómozgásra a forgómozgás alapegyenlete írható fel, amely — figyelembe véve a forgatónyomaték előjelét —

$$\theta\beta = \mu mgR. \tag{8.15.4}$$

A tehetetlenségi nyomaték behelyettesítésével, valamint az egyenlet rendezésével a szöggyorsulás

$$\beta = \frac{2\mu g}{R}. \tag{8.15.5}$$

A kerék szögsebessége az

$$\omega(t) = \frac{2\mu g}{R}t \tag{8.15.6}$$

függvény szerint változik. A tiszta gördülés feltétele, hogy a

$$v(t) = R\omega(t) \tag{8.15.7}$$

összefüggés teljesüljön, azaz a

$$v_0 - \mu g t = R\frac{2\mu g}{R}t \tag{8.15.8}$$

fennálljon. Ebből a tiszta gördülésig eltelt időt kifejezve kapjuk, hogy

$$t = \frac{v_0}{3\mu g}. \tag{8.15.9}$$

(b) A megtett út az

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{8.15.10}$$

négyzetes úttörvénybe helyettesítve

$$s = \frac{5}{18}\frac{v_0^2}{\mu g} \tag{8.15.11}$$

8.16. Feladat: Egy BMX versenyző sík talajon teker v_0 sebességgel. A bicikliváz és a biciklista együttes tömege M, a kerekek tömege egyenként m, sugaruk R. Tehetetlenségi nyomatékuk mR^2. Vizsgáljuk a biciklista, a bicikliváz és a kerekek által alkotott rendszert!

(a) Mekkora a rendszer teljes mozgási energiája? A kerekek tisztán gördülnek.

(b) A versenyző abbahagyja a tekerést, és felgurul egy h magasságú, 45^0-os hajlásszögű rámpán. Mekkora lesz a bicikli v_1 sebessége a rámpa tetején? (Feltételezzük, hogy adott v_0 kezdősebesség mellett a rendszer képes felgurulni a rámpa tetejéig.)

(c) A rámpa tetején a biciklista „ugratni” kezd, vagyis a rámpa tetejét elhagyva a rendszerre csak a nehézségi erő hat, a kerekek pedig szabadon forognak. Mekkora a rendszer tömegközéppontjának sebessége pályájának legfelső pontján? Mekkora lesz ott a kerekek szögsebessége?

(d) Mekkora lesz a rendszer mozgási energiája a pálya tetőpontján?

Megoldás:

8.17. Feladat: ** A m tömegű R sugarú homogén korongot forgástengelye körül ω_0 szögsebességgel megforgatunk, majd lapjával — a tengely merőleges a felületre — a sík asztalra helyezzük. A korong és asztal között μ súrlódási tényező van. Feltételezve, hogy korong egyenletesen nyomja az asztalt, mennyi idő múlva áll meg a korong? (A korong tehetetlenségi nyomatéka $\theta = \frac{1}{2}mR^2$.)

Megoldás: A feladat megoldásának kulcsa az eredő forgatónyomaték kiszámolása. Vezessük be a felületi tömegsűrűséget, amely

$$\eta = \frac{m}{R^2\pi}. \tag{8.17.1}$$

A korongból tekintsünk egy r sugarú dr szélességű körgyűrűt. Ennek tömege

$$dm = \eta 2r\pi dr. \tag{8.17.2}$$

A körgyűrű érintője mentén ébredő dF_s súrlódási erő

$$dF_s = \mu\, dm\, g, \tag{8.17.3}$$

amely erő a körgyűrű középpontjára vonatkoztatva

$$dM = \mu\, dm\, gr = 2\pi\mu\eta g r^2 dr \tag{8.17.4}$$

forgatónyomatékot hoz létre. A korongra ható teljes forgatónyomaték

$$M = \int_0^R 2\pi\mu\eta g r^2 dr = \frac{2\pi}{3}\mu\eta g R^3 = \frac{2}{3}\mu m g R. \tag{8.17.5}$$

Felírva a forgómozgás alapegyenletét

$$\theta\beta = M = \frac{2}{3}\mu m g R \tag{8.17.6}$$

a szögsebesség kiszámolható:

$$\beta = \frac{4}{3}\frac{\mu g}{R}. \tag{8.17.7}$$

A megállásig eltelt idő

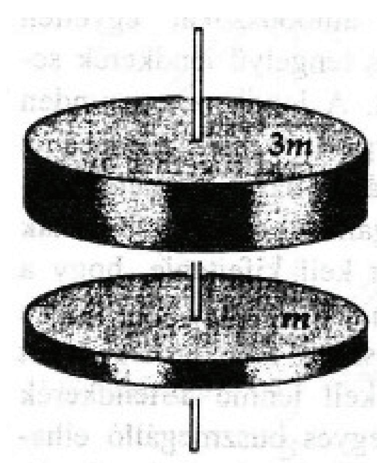
$$t = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{3}{4}\frac{\omega_0 R}{\mu g}. \tag{8.17.8}$$

Impulzusmomentum megmaradása

8.18. Feladat: (HN 12B-28) A 46. ábrán látható két tömör tárcsa sugara R, egyik tömeg m, a másiké $3m$. A bemutatott módon súrlódásmentes csapágyazással közös tengelyre vannak szerelve. A felső tárcsának ω_0 kezdő szögsebességet adunk, majd nagyon kis magasságból ráejtjük a kezdetben nyugalomban lévő alsó tárcsára. A tárcsák — a közöttük fellépő súrlódás hatására — végül közös ω szögsebességgel együtt forognak.
(a) A megadott mennyiségekkel fejezzük ki a végső ω szögsebességet, és
(b) a tárcsák egymáson való súrlódása közben végzett munkát!
(c) Mi lenne az egyenesvonalú analogonja ennek a forgási "ütközésnek"?

Megoldás:
(a) Külső forgatónyomatékok hiányában az impulzusmomentum megmaradás tételét alkalmazhatjuk. Kezdetben a $3m$ tömegű test forog ω_0 szögsebességgel. Az impulzusmomentum

$$N_1 = \theta_{3m}\omega_0 = \frac{1}{2}3mR^2\omega_0, \tag{8.18.1}$$



46. ábra.

ahol θ_{3m} a $3m$ tömegű test tehetetlenségi nyomatéka. Az összetapadás után együtt forog a két test, az együttes impulzusmomentum

$$N_2 = (\theta_m + \theta_{3m})\omega = (\frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{2}3mR^2)\omega, \tag{8.18.2}$$

ahol θ_m az m tömegű test tehetetlenségi nyomatéka. Mivel $N_1 = N_2$, így

$$\frac{1}{2}3mR^2\omega_0 = (\frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{2}3mR^2)\omega, \tag{8.18.3}$$

amelyből

$$\omega = \frac{3}{4}\omega_0. \tag{8.18.4}$$

(b) A kezdeti kinetikus energia

$$E_1 = \frac{1}{2}\theta_{3m}\omega_0^2 = \frac{1}{4}3mR^2\omega_0^2 = \frac{3}{4}mR^2\omega_0^2, \tag{8.18.5}$$

míg az összetapadás után

$$E_2 = \frac{1}{2}(\theta_m + \theta_{3m})\omega^2 = \frac{1}{4}4mR^2\omega^2 = \frac{9}{16}mR^2\omega_0^2. \tag{8.18.6}$$

A két energia különbsége, amennyi a belső energiát növeli:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{3}{4}mR^2\omega_0^2 - \frac{9}{16}mR^2\omega_0^2 = \frac{3}{16}mR^2\omega_0^2. \tag{8.18.7}$$

(c) Az egyenesvonalú analogon: a $3m$ tömegű v_0 sebességű test ütközése a nyugvó m tömegű testtel. Ekkor a közös sebesség:

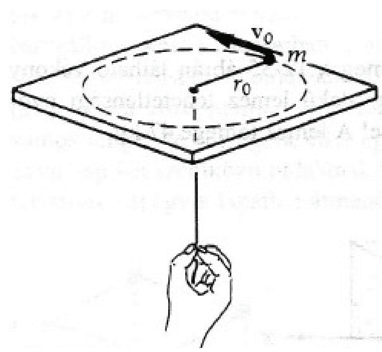
$$v = \frac{3}{4}v_0. \tag{8.18.8}$$

8.19. Feladat: (HN 12C-50) A 47. ábra egy r_0 sugarú körpályán v_0 sebességgel vízszintes súrlódásmentes felületen mozgó m tömegű testet mutat. A testre rögzített és kicsiny lyukon átvezetett fonál biztosítja a centripetális erőt. Most a fonalat lassan húzzuk úgy, hogy a test az $r_0/2$ sugarú körpályára kerüljön. Számítsuk ki az m, az r_0 és v_0 függvényében

(a) a test végső sebességét és

(b) a fonál új helyzetve húzása során végzett munkát!

(c) Mutassuk meg, hogy a végzett munka egyenlő a test kinetikus energiájának megváltozásával!



47. ábra.

Megoldás:

(a) Mivel jelen esetben a mozgás során mindvégig a kötélerő sugárirányú, azaz centrális, így az impulzusmomentum megmaradásának tétele alkamazható

$$mv_0r_0 = mv\frac{r_0}{2}. \tag{8.19.1}$$

Ebből a test végső sebessége

$$v = 2v_0. \tag{8.19.2}$$

(b) A munka kiszámolásához először a K kötélerőt egy közbenső r sugarú pályára kell megadni. Ehhez egyrészt újra alkalmazni kell az impulzusmomentum megmaradásának tételét

$$mv_0r_0 = mvr, \tag{8.19.3}$$

másrészt fel kell írni a körpályán való mozgásra a

$$K = m\frac{v^2}{r} \tag{8.19.4}$$

mozgásegyenletet. E kettőből az origó felé mutató K kötélerő

$$K = m\frac{v_0^2 r_0^2}{r^3}. \tag{8.19.5}$$

A végzett munka — figyelembe véve az erő és a radiális egységvektor ellentétes irányát —

$$W = -\int_{r_0}^{r_0/2} m\frac{v_0^2 r_0^2}{r^3}\mathrm{d}r = \frac{1}{2}mv_0^2 r_0^2\left[\frac{1}{r^2}\right]_{r_0}^{r_0/2} = \frac{3}{2}mv_0^2. \tag{8.19.6}$$

(c) A kinetikus energia megváltozása

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}m(2v_0)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{3}{2}mv_0^2 = W, \tag{8.19.7}$$

ahogy annak lennie is kell.

Forgási energia

8.20. Feladat: Az L hosszúságú m tömegű rúd függőlegesen áll, az alsó pontja súrlódásmentes csapággyal csatlakozik a talajhoz. Az egyensúlyi helyzetből kimozdul és a talajba csapódik. Mekkora a rúd szögsebessége a becsapódás pillanatában? A rúd tehetetlenségi nyomatéka a rúd végére vonatkoztatva $\theta = \frac{1}{3}mL^2$.

Megoldás: A talajszintet választva a potenciális energia zérus pontjának a rúd — a rúd tömegközéppontjának — potenciális energiája álló helyzetben

$$E_{p1} = mg\frac{L}{2}, \tag{8.20.1}$$

míg a fekvő helyzetben

$$E_{p2} = 0. \tag{8.20.2}$$

A kezdeti kinetikus energia

$$E_{k1} = 0, \tag{8.20.3}$$

míg a végső kinetikus energia a forgásból származó

$$E_{k2} = \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{8.20.4}$$

A mechanikai energiamegmaradás tételét alkalmazva ($E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$) kapjuk, hogy

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{8.20.5}$$

A tehetetlenségi nyomaték behelyettesítése és az egyenlet rendezése után a szögsebességre

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} \tag{8.20.6}$$

adódik.

8.21. Feladat: * Az L szárhosszúságú, száranként m tömegű létra egyik lába a falnál áll, míg a másik lába súrlódásmentesen csúszhat a vízszintes talajon. A kezdetben 2α szögre szétnyitott létra szára csúszik, és a létra teljesen szétnyílva a talajba csapódik. Mekkora a létra szárainak szögsebessége a becsapódás pillanatában? (A rúg végpontjára vett tehetetlenségi nyomatéka $\frac{1}{3}mL^2$.)

Megoldás: A létra a becsapódás pillanatában csak forgómozgást végez. Ez belátható, ha végiggondoljuk a következőt. Ha a létra csúcsa — a két szár találkozási pontja — v_x sebességgel halad, akkor csúszó talppont sebessége $2v_x$. A csúcspont a becsapódás pillanatában csak függőleges mozgást végez ($v_x = 0$), így a csúszó talppont sebessége ugyancsak zérus. Azaz a létra egyetlen pontja sem végez haladó mozgást. A kezdeti helyzeti energia alakul át forgási energiává:

$$2mg\frac{L}{2}\cos\alpha = 2\frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{8.21.1}$$

Egyszerűsítés és átrendezés után mindkét rúd szögsebessége

$$\omega\sqrt{\frac{3g}{L}}. \tag{8.21.2}$$

8.22. Feladat: * A h magasságú toronyugró a palló szélén áll és összegörnyedés nélkül — merev rúdként — a vízbe fordul. (A lába a pallón nem csúszik meg a dőlés során.) Mekkora szögnél válik el a pallótól?

Megoldás: Jelölje α azt a függőlegessel bezárt szöget, amelynél éppen elvélik a pallótól a toronyugró lába. Első lépésként számítsuk ki mekkora ebben a pillanatban a szögsebessége. A palló szintjét tekintve a potenciális energia zérus pontjának a kezdeti helyzeti energia

$$E_{p1} = mg\frac{L}{2}, \tag{8.22.1}$$

míg a dőlt helyzetben

$$E_{p2} = mg\frac{L}{2}\cos\alpha. \tag{8.22.2}$$

A kezdeti kinetikus energia

$$E_{k1} = 0, \tag{8.22.3}$$

míg az elválás pillanatához tartozó forgásból származó kinetikus energia

$$E_{k2} = \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{8.22.4}$$

A mechanikai energiamegmaradás tételét alkalmazva ($E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$) kapjuk, hogy

$$mg\frac{L}{2} = mg\frac{L}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{8.22.5}$$

A tehetetlenségi nyomaték behelyettesítése és az egyenlet rendezése után a szögsebességre azt kapjuk, hogy

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(1-\cos\alpha)}. \tag{8.22.6}$$

A rúd tömegközéppontjának sebessége

$$v = \frac{L}{2}\omega = \sqrt{\frac{3}{4}gL(1-\cos\alpha)}. \tag{8.22.7}$$

Az elválás pillanatában — egyetlen erőként — az mg súlyerő rúdirányú (radiális) komponense hat és tartja körpályán a rúd tömegközéppontját, azaz

$$m\frac{v^2}{(\frac{L}{2})} = mg\cos\alpha. \tag{8.22.8}$$

A sebesség behelyettesítése és az egyszerűsítések után

$$\cos\alpha = \frac{3}{5} \tag{8.22.9}$$

adódik, amelyből az elválás pillanatához tartozó szög $\alpha = 53,1^0$.

9. Feladatok a rezgőmozgás és a mechanikai hullámok tárgyköréből

Harmonikus rezgőmozgás

9.1. Feladat: (HN 15A-1) 20 g tömegű részecske harmonikus rezgőmozgást végez 3 rezgés/másodperc frekvenciával és 5 cm amplitúdóval.

(a) Mekkora teljes távolságot fut be a részecske egy teljes periódus folyamán?

(b) Mekkora a legnagyobb sebessége? Hol lép ez fel?

(c) Határozzuk meg a részecske legnagyobb gyorsulását! Hol lép fel a mozgás során a legnagyobb gyorsulás?

Megoldás: Jelölések: $m = 20$ g = 0,02 kg, $f = 3$ 1/s és $A = 5$ cm = 0,05 m. A rezgés körfrekvenciája $\omega = 2\pi f = 18,85$ 1/s.
(a) Egy teljes periódus alatt 4-szer futja be az amplitúdónyi kitérést, így a megtett út

$$s = 4A = 20\,\mathrm{cm} = 0,2\,\mathrm{m}. \tag{9.1.1}$$

(b) A sebesség maximális értéke

$$v_{max} = A\omega = 0,94\,\mathrm{m/s}. \tag{9.1.2}$$

Ezt az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor éri el a részecske.
(c) A gyorsulás maximális értéke

$$a_{max} = A\omega^2 = 17,77\,\mathrm{m/s^2}. \tag{9.1.3}$$

Ezt a maximális kitérésű helyeken való áthaladáskor éri el a részecske.

9.2. Feladat: Pontszerűnek tekinthető 1 kg tömegű testre $F = -Dx$ alakú rugalmas erő hat. A rugóállandó $D = 0,25$ N/cm. A $t = 0$ pillanatban a kitérés 20 cm, a sebesség 2,83 m/s. Mekkora a rezgés amplitúdója?

Megoldás: Jelölések: $m = 1$ kg, a $t = 0$ pillanathoz tartozó kitérés és sebesség értékek $y_0 = 20$ cm és $v_0 = 2,83$ m/s.
A rezgés körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 5\,1/\mathrm{s}. \tag{9.2.1}$$

A rezgés kitérése és sebessége

$$y(t) = A\sin(\omega t + \varphi), \tag{9.2.2}$$

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi), \tag{9.2.3}$$

ahol A az amplitrúdó és φ a kezdőfázis. A $t = 0$ pillanatra

$$y_0 = A\sin\varphi, \tag{9.2.4}$$

$$v_0 = A\omega\cos\varphi. \tag{9.2.5}$$

E két egyenletből behelyettesítés után az amplitúdó

$$A = \frac{\sqrt{y_0^2\omega^2 + v_0^2}}{\omega} = 0,6\,\mathrm{m}. \tag{9.2.6}$$

9.3. Feladat: A 4 N/m rugóállandójú rugóra egy 0,8 kg tömegű testet függesztünk. Nyugalmi helyzetéből 12 cm-t kitérítjük és itt 0,4 m/s kezdősebességgel indítva harmonikus rezgőmozgásba hozzuk. Mézbe merítve megáll a test. Mekkora a súrlódás által disszipált mechanikai energia?

Megoldás: Jelölések: $k = 4$ N/m, $m = 0,8$ kg, $x = 12$ cm = 0,12 m és $v = 0,4$ m/s.
A mozgás kezdetén a teljes mechanika energia a rugalmas energiából és a mozgási energiából áll

$$E_{mech} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = 0,0928\,\mathrm{J}. \tag{9.3.1}$$

Mivel a text megáll és a kitérése zérus lesz, így éppen ennyi a súrlódás következtében disszipált ("szétszórt") mechanikai energia.

9.4. Feladat: Mutassa meg, hogy a $F = -kx$ rugalmas erejű rugóra akasztott m tömegű test g homogén nehézségi erőtérben harmonikus rezgőmozgást végez!

Megoldás: Fordítsuk lefelé az y tengely irányítását. Tegyük a rugó végére a testet és engedjük megnyúlni y hosszal, amíg el nem éri az egyensúlyi (gyorsulásmentes) helyzetét. Ekkor érvényes, hogy

$$0 = mg - ky. \tag{9.4.1}$$

Ezt követően húzzuk lejjebb további x távolsággal, aminek következtében, ha elengedjük, a test gyorsulni fog. Az erre a helyzetre felírható mozgásegyenlet

$$ma = mg - k(x+y). \tag{9.4.2}$$

Figyelembe az ezt megelőző egyenletet végül az

$$ma = -kx \tag{9.4.3}$$

egyenletre jutunk, amely éppen a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete.
Megjegyzés: A megoldásból az is kiolvasható, hogy egyrészt a rezgés az egyensúlyi helyzet körül jön létre, másrészt a homogén nehézségi erőtér jelenléte ellenére a mozgás harmonikus.

9.5. Feladat: Egy harmonikus rezgőmozgást végző test legnagyobb gyorsulása 8π m/s^2, legnagyobb sebessége 1,6 m/s.
(a) Határozza meg a rezgésidőt és az amplitúdót!
(b) Mennyi a rezgés összenergiája?

Megoldás:
(a) A maximális gyorsulás illetve sebesség

$$a_{max} = A\omega^2 \tag{9.5.1}$$

illetve

$$v_{max} = A\omega, \tag{9.5.2}$$

ahol A az amplitúdó, ω a körfrekvencia. E két egyenletből

$$\omega = \frac{a_{max}}{v_{max}} = \frac{8\pi}{1,6} = 15,7\,\text{rad/s} \tag{9.5.3}$$

és

$$A = \frac{v_{max}^2}{a_{max}} = \frac{2,56}{8\pi} \sim 0,1\,\text{m}. \tag{9.5.4}$$

A rezgésidő

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \sim 0,4\,\text{s}. \tag{9.5.5}$$

(b) Jelölje m a tömeget kg-ban. A rezgés teljes energiája

$$E = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = 1,28m\,\text{J}. \tag{9.5.6}$$

Megjegyzés: Látható, hogy a kinematikai adatok önmagukban nem elegek a dinamikai mennyiségek meghatározásához!

9.6. Feladat: Két, azonos amplitúdójú rezgés, melyek frekvenciája $\nu_1 = 40$ Hz és $\nu_2 = 60$ Hz, egyszerre kezdi meg rezgését az egyensúlyi helyzetből. Mikor lesz legelőször ismét azonos a kitérésük?

Megoldás: A rezgések kitérését az $y(t) = A\sin 2\pi\nu_1 t$ illetve $y(t) = A\sin 2\pi\nu_2 t$ alakba írjuk fel. Az első találkozási idő a kettő egyenlőségéből számolható

$$A\sin 2\pi\nu_1 t = A\sin 2\pi\nu_2 t. \tag{9.6.1}$$

Az egyenletet átrendezve és a szögek szinusza különbségére vonatkozó összefüggést alkalmazva

$$0 = \sin 2\pi\nu_2 t - \sin 2\pi\nu_1 t = 2\cos\frac{2\pi\nu_2 + 2\pi\nu_1}{2}t\sin\frac{2\pi\nu_2 - 2\pi\nu_1}{2}t \tag{9.6.2}$$

írható. Leghamarabb akkor teljesül az egyenlőség, ha

$$\cos\frac{2\pi\nu_2 + 2\pi\nu_1}{2}t = 0, \tag{9.6.3}$$

azaz

$$\frac{2\pi\nu_2 + 2\pi\nu_1}{2}t = \frac{\pi}{2}. \tag{9.6.4}$$

Innen az első találkozás időpontja

$$t = \frac{1}{2(\nu_2 + \nu_1)} = 0,005\mathrm{s}. \tag{9.6.5}$$

9.7. Feladat: (HN 15A-19) Határozzuk meg a 2,3 m hosszú fonálinga

(a) frekvenciáját és

(b) lengésidejét a Hold felszínén, ahol a gravitációtól származó nehézségi gyorsulás 1,67 m/s^2.

Megoldás:

(a) A kitérített inga pályagörbéje kör. A g nehézségi gyorsulású erőtérben α szöggel kitérített l hosszúságú fonálingán az m tömegű testet a testre ható gravitációs erőnek a pályagörbe érintője irányába eső erőkomponense fogja az egyensúlyi irányba mozgatni. A mozgásegyenlet

$$ma_t = -mg\sin\alpha, \tag{9.7.1}$$

ahol a tangenciális (érintő irányú) gyorsulás, a negatív előjel pedig arra utal, hogy a növekvő szögekkel ellentétes irányú az erőkomponens. A tangenciális gyorsulás

$$a_t = l\beta = l\ddot{\alpha}, \tag{9.7.2}$$

ahol $\beta = \ddot{\alpha}$ a szöggyorsulás. Így az

$$l\ddot{\alpha} = -g\sin\alpha, \tag{9.7.3}$$

differenciál egyenlet kapható. Ez az egyenlet kis szögekre – ha $\alpha << 5^0$, akkor $\sin\alpha \sim \alpha$ – a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenletébe megy át, azaz

$$l\ddot{\alpha} = -g\alpha. \tag{9.7.4}$$

Innen az inga körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{9.7.5}$$

A frekvencia

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = 0,135\,1/\mathrm{s}. \tag{9.7.6}$$

(b) A periódusidő

$$T = \frac{1}{f} = 7,4\,\mathrm{s}. \tag{9.7.7}$$

9.8. Feladat: A földi Egyenlítőn egy zárt épületben egy fonálinga segítségével hogyan állapítanánk meg, hogy a Hold felettünk vagy a Föld túlsó oldalán van?

Megoldás: Ha a Hold a Föld túlsó oldalán van, akkor a Holdtól származó vonzó kölcsönhatás hozzáadódva a Földéhez a g nehézségi gyorsulásnál nagyobb g' értékkel kell számolni. Így a kialakuló rezgés ω' körfrekvenciája nagyobb mint az az ω, amely csak a Föld hatását veszi figyelembe:

$$\omega' = \sqrt{\frac{g'}{l}} > \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{9.8.1}$$

Ennek megfelelően a periódusidőkre az áll fenn, hogy $T' < T$.

9.9. Feladat: (HN 15A-20) Egy világítótorony látogatója meg akarja mérni a torony magasságát. Van nála egy orsó cérna, erre kis kavicsot köt, és a torony spirál-lépcsőházának közepén – mint fonálingát – lelógatja. A lengésidő 9,4 s. Milyen magas a torony?

Megoldás: A fonálinga ω körfrekvenciája az l fonálhosszal és a g nehézségi gyorsulással

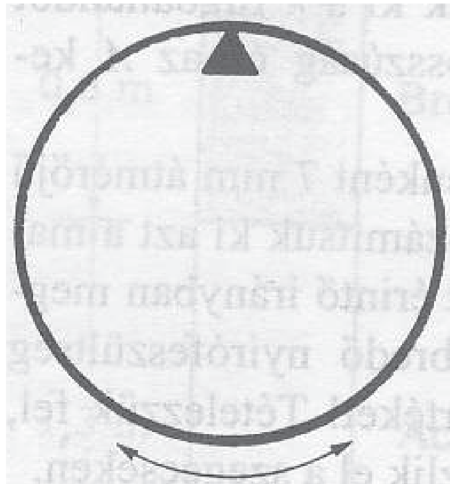
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{9.9.1}$$

A T periódusidő

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{9.9.2}$$

Innen az inga hossza, ami most a torony h magassága is egyben

$$h = l = \frac{T^2}{4\pi^2}g = 22,38\,\mathrm{m}. \tag{9.9.3}$$



48. ábra.

9.10. Feladat: (HN 15B-26) Vékony, 20 cm sugarú karikát vízszintesen álló késélre helyezünk a 48. ábra szerint úgy, hogy fizikai ingaként a karika síkjában leng.
(a) Határozzuk meg kis amplitúdójú lengéseinek periódusidejét.
(b) Mekkora annak a fonálingának a hossza, amelynek azonos a lengésideje?

Megoldás: Jelölés: $R = 20$ cm $= 0{,}2$ m; m a karika tömege, $\theta_0 = mR^2$ a szimmetria tengelyére vett tehetetlenségi nyomatéka; φ a kitérés szöge a függőlegeshez viszonyítva.
(a) A kés élén felfüggesztett inga karja – felfüggesztés és tömegközéppont távolsága – az R sugár, a felfüggesztésre vett θ tehetetlenségi nyomaték a Steiner-tétel szerint

$$\theta = \theta_0 + mR^2 = 2mR^2. \tag{9.10.1}$$

Kitérítve φ szöggel a karikát

$$M = -mgR\sin\varphi \tag{9.10.2}$$

forgatónyomaték fog hatni. A negatív előjel éppen arra utal, hogy a nyomaték az egyensúlyi helyzet felé mozgat. A forgómozgás alapegyenlete szerint

$$\theta\beta = M = -mgR\sin\varphi, \tag{9.10.3}$$

ahol β a szöggyorsulás. Mivel $\beta = \ddot{\varphi}$, így

$$\theta\ddot{\varphi} = -mgR\sin\varphi, \tag{9.10.4}$$

amely "majdnem" a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. Ha kis szögkitérésekre szorítkozunk, akkor alkalmazhatjuk a $\sin\varphi \sim \varphi$ közelítést, így a

$$\theta\ddot{\varphi} = -mgR\varphi \tag{9.10.5}$$

egyenlet harmonikus rezgomozgást ír le. Az ω körfrekvencia közvetlenül leolvasható:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{\theta}} = \sqrt{\frac{g}{2R}}. \tag{9.10.6}$$

A periódusidő

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}. \tag{9.10.7}$$

(b) A fonálinga (matematikai inga) lengésideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{9.10.8}$$

ahonnan a kérdéses fonál hossz

$$l = 2R. \tag{9.10.9}$$

9.11. Feladat: Egy m tömegű, l hosszúságú homogén rudat tömegközéppontján átmenő, rúdra merőleges, vízszintes tengelyre rögzítjük, hogy egy hagyományos mérleghintát kapjunk. A rúd vízszintes helyzetében mindkét vége alá k rugóállandójú rugót rögzítünk.

(a) A rugók kismértékű x megnyúlását (összenyomódását) fejezze ki a mérleghinta vízszintes helyzethez képesti kicsiny φ szögkitérésének függvényében! (Éljünk a $\sin\varphi \sim \tan\varphi \sim \varphi$ és a $\cos\varphi \sim 1$ közelítésekkel.)

(b) Fejezze ki a mérleghintára ható erők forgatónyomatékainak eredőjét a φ szögkitérés függvényében!

(c) Írja fel a fenti rendszerre a forgómozgás alapegyenletét! ($\theta = 1/12ml^2$) Mutassa meg, hogy a rendszer kis kitérések esetén harmonikus rezgőmozgást végez, valamint határozza meg a rezgés körfrekvenciáját!

(d) Hogyan módosul a körfrekvencia, ha a mérleghinta végeire egy-egy M tömegű gyerek ül?

Megoldás:

9.12. Feladat: (HN 15C-37) Egy meg nem feszített l hosszúságú, k rugóállandójú homogén rugót úgy vágunk két részre, hogy az egyik darab kétszer akkora, mint a másik.

(a) Fejezzük ki rugódarabok k_1 és k_2 rugóállandóját!

(b) Ha mindkét darab egyik végére azonos tömegű testet akasztanánk, mi lenne a frekvenciák aránya?

Megoldás:

(a) Elég csak gondolatban szétválasztani az l hosszúságú rugót egy l_1 és l_2 hosszúságú darabra, ahol legyen $l_1 = 2l_2$. Ha a rugót F erővel húzzuk, akkor jelölje a megnyúlást Δx, azaz

$$F = k\Delta x. \tag{9.12.1}$$

Az l_1 és l_2 szakaszok megnyúlása Δx_1 és Δx_2

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2, \tag{9.12.2}$$

amelyekre, mivel az F erő a rugó teljes hosszában hat – fennáll, hogy

$$F = k_1\Delta x_1 \tag{9.12.3}$$

és

$$F = k_2\Delta x_2. \tag{9.12.4}$$

A Δx_1 és Δx_2 megnyúlások arányosak az l_1 és l_2 szakaszok hosszaival, így

$$\Delta x_1 = 2\Delta x_2. \tag{9.12.5}$$

A fenti egyenletekből

$$k_1 = 1,5k, \tag{9.12.6}$$

míg

$$k_2 = 3k. \tag{9.12.7}$$

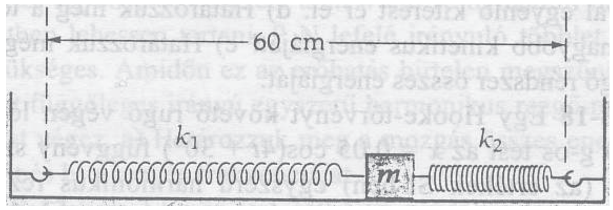
(b) A frekvenciák aránya

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{\frac{k_1}{m}}}{\sqrt{\frac{k_2}{m}}} = \sqrt{\frac{1}{2}}. \tag{9.12.8}$$

9.13. Feladat: (HN 15C-38) Két rugó mindegyike feszítetlen állapotban $l_0 = 20$ cm hosszú, de rugóállandóik különbözőek: $k_1 = 40$ N/m és $k_2 = 80$ N/m. A rugókat vízszintes súrlódásmentes felületen nyugvó $m = 0,60$ kg tömegű kicsiny testhez rögzítik. A rugókat ellentétes irányban megfeszítik és egymástól $L = 60$ cm távolságban lévő kampókhoz rögzítik a 49. ábra szerint. Feltéve, hogy a test mérete elhanyagolható.

(a) A balodali kampótól milyen távol lesz a test egyensúlyi helyzete?

(b) Mekkora a test rugóirányú harmonikus rezgőmozgásának a körfrekvenciája?



49. ábra.

Megoldás:
(a) Jelölje az egyes rugók megnyúlását x_1 illetve x_2. A teljes megnyúlás

$$D = L - 2l_0 = x_1 + x_2. \tag{9.13.1}$$

Az egyensúlyi helyzetben a rugókban ugyanakkora nagyságú erő ébred, azaz

$$k_1 x_1 = k_2 x_2. \tag{9.13.2}$$

A test baloldali faltól való távolságának meghatározásához az x_1 kiszámolására van szükség

$$x_1 = \frac{Dk_2}{k_1 + k_2} = 12\,\text{cm}. \tag{9.13.3}$$

Tehát a test egyensúlyi helyzete a faltól

$$l_0 + x_1 = 32\,\text{cm} \tag{9.13.4}$$

távolságra van.
(b) Mozdítsuk ki a testet az egyensúlyi helyzetéből a pozitív irányba x-szel és írjuk fel a mozgásegyenletet a ható erőkkel – figyelembe véve az irányokat és azt, hogy a megnyúlások megváltoztak –

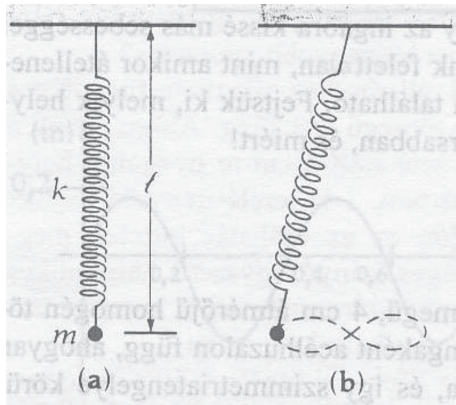
$$ma = -k_1(x_1 + x) + k_2(x_2 - x). \tag{9.13.5}$$

Alkalmazva a (9.13.2) egyenletbeli összefüggést az

$$ma = -(k_1 + k_2)x \tag{9.13.6}$$

egyenletre jutunk, amely a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. Innen a rezgés körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}. \tag{9.13.7}$$



50. ábra.

9.14. Feladat: (HN 15C-39) Egy k rugóállandójú rugó végére akasztott m tömegű test a rugót (nyugalmi állapotban) l hosszúságúra nyújtja a 50.a ábra szerint. A testet most mozgásba hozzuk úgy, hogy fel-le rezeg és ingaként ide-oda leng. A test a 50.b ábra szerint a függőleges síkban mozogva "nyolcasokat" ír le. Fejezzük ki a k rugóállandót az m, l és g függvényében!

Megoldás: A mozgás egy rezgésre és egy ingalengésre bontható. A rezgés ω_r körfrekvenciája

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{9.14.1}$$

az ingamozgás ω_i körfrekvenciája

$$\omega_i = \sqrt{\frac{g}{l}}, \tag{9.14.2}$$

alakban írható fel. A "8"-as leírása során egy ingalengéshez két rezgés tartozik, tehát

$$\omega_r = 2\omega_i, \tag{9.14.3}$$

vagyis

$$\frac{k}{m} = 4\frac{g}{l}. \tag{9.14.4}$$

Innen a rugóállandó

$$k = 4\frac{mg}{l}. \tag{9.14.5}$$

9.15. Feladat: Egy d vastagságú egyenletes A keresztmetszetű falapocskát vízre teszünk g homogén nehézségi erőtérben. A falapocskát függőleges irányban kicsit megnyomva, majd elengedve rezgőmozgást jön létre. Mutassuk meg, hogy a mozgás harmonikus rezgőmozgás. A közegellenállástól és a felületi feszültségtől tekintsünk el. A fa sűrűsége ϱ_f , a vízé ϱ_v.

Megoldás: Helyezzük a falapocskát a vízre és várjuk meg az egyensúlyi helyzet beálltát. Ha ekkor x-szel jelöljük a bemerülés nagyságát, akkor lefele irányított koordinátarendszer esetén a testre ható erők a

$$0 = \varrho_f A d g - \varrho_v A x g \tag{9.15.1}$$

egyenletnek tesznek eleget. Ezt követően a falapocskát y-nal lejjebb nyomjuk, majd elengedjük. A falapocska mozgásegyenlete a

$$\varrho_f A d \ddot{y} = \varrho_f A d g - \varrho_v A (x+y) g \tag{9.15.2}$$

lesz. Figyelembe véve a (9.15.1) egyenletet a

$$\varrho d \ddot{y} = -\varrho_v g y \tag{9.15.3}$$

egyenlethez jutunk, amely a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. Innen a rezgés körfrekvenciája közvetlenül leolvasható:

$$\omega = \sqrt{\frac{\varrho_v g}{\varrho_f d}}. \tag{9.15.4}$$

9.16. Feladat: Az M tömegű, R sugarú homogén anyageloszlású bolygó északi és déli pólusa között lyukat fúrunk. Mutassuk meg, hogy a bedobott m tömegű test harmonikus rezgőmozgást végez! (A súrlódástól tekintsünk el.)

Megoldás: A homogén bolygó közepétől r távolságban lévő testre a bolygónak attól a részétől származik eredő erőhatás, amennyi az r sugáron belül van. Így az arányosság miatt a figyelembe veendő tömeg

$$M(r) = \frac{r^3}{R^3} M. \tag{9.16.1}$$

Az m tömegű test mozgásegyenlete

$$m\ddot{r} = -\gamma \frac{mM}{r^2} = -\gamma \frac{mM}{R^3} r, \tag{9.16.2}$$

amelyből

$$\ddot{r} = -\gamma \frac{M}{R^3} r \tag{9.16.3}$$

adódik. Ez egy harmonikus rezgőmozgás egyenlete. A körfrekvencia közvetlenül leolvasva:

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma M}{R^3}}. \tag{9.16.4}$$

9.17. Feladat: Az M tömegű, R sugarú homogén bolygó északi pólusán lefektetünk egy súrlódásmentes sík lapot, amely a póluson átmenő érintősík. Mutassuk meg, hogy egy, a póluson átmenő egyenes mentén mozgó m tömegű test harmonikus rezgőmozgást végez! Mi az itteni harmonikus rezgés feltétele? (A bolygó forgásától tekintsünk el.)

Megoldás: A síkon az érintési ponttól x távolságban a testre ható erő

$$F = -\gamma \frac{mM}{R^2+x^2}, \tag{9.17.1}$$

amely a bolygó középpontja felé mutat. Az egyensúlyi helyzet felé mutató tangenciális komponens

$$F = -\gamma \frac{mM}{R^2+x^2} \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}. \tag{9.17.2}$$

Ezzel a test mozgásegyenlete

$$m\ddot{x} = -\gamma \frac{mM}{(R^2+x^2)^{3/2}} x. \tag{9.17.3}$$

Ha kis $x << R$ kitérésekre szorítkozunk, akkor alkalmazhatjuk a

$$\frac{1}{(R^2+x^2)^{3/2}} \sim \frac{1}{R^3} \tag{9.17.4}$$

közelítést, amellyel a mozgásegyenlet

$$m\ddot{x} = -\gamma \frac{mM}{R^3} x \tag{9.17.5}$$

alakú lesz. Ez pedig a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. Innen a körfrekvencia

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma M}{R^3}}. \tag{9.17.6}$$

Csillapodó és gerjesztett rezgések

9.18. Feladat: (HN 15B-28) Egy 2 kg tömegű testet 200 N/m rugóállandójú rugóra függesztünk. Súrlódás miatt a test csillapított harmonikus mozgást végez. A rezgés amplitúdója a t = 0 s időpillanatban 0,20 m, majd ezt követően 6 másodperc múlva 0,16 m-re csökken.

(a) Határozzuk meg a súrlódási erőtől származó csillapítási együtthatót.

(b) Határozzuk meg a rendszer rezonanciafrekvenciáját.

Megoldás: Jelölések: $m = 2$ kg; $k = 200$ N/m; $A = 0,2$ m; $t = 6$ s és $A(t) = 0,16$ m.

(a) A csillapodó rezgés mozgásegyenlete

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 = 0, \tag{9.18.1}$$

ahol

$$\beta = \frac{c}{2m} \tag{9.18.2}$$

a keresett c csillapítási együtthatóval és

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}. \tag{9.18.3}$$

A (9.18.1) mozgásegyenletet kielégítő kitérés az idő függvényében

$$y(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \delta), \tag{9.18.4}$$

ahol δ a kezdeti feltételhez illesztett kezdőfázis, valamint $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ Itt a t időpillanathoz tartozó amplitúdó

$$A(t) = Ae^{-\beta t}. \tag{9.18.5}$$

Ebből β kifejezhető és a paraméterek behelyettesítése után kiszámolható:

$$\beta = -\frac{1}{t} \ln \frac{A(t)}{A} = 0,037\,1/\mathrm{s}. \tag{9.18.6}$$

A c csillapodási tényező a (9.18.2) összefüggésből

$$c = 2m\beta = 0,1488\,\mathrm{kg/s}. \tag{9.18.7}$$

(b) A rendszer rezonanciafrekvenciája

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = 99,99\,1/\mathrm{s}. \tag{9.18.8}$$

9.19. Feladat: Egy csillapítatlan rezgő rendszerben mozgó test tömege 0,5 g. A rendszert változtatható frekvenciájú gerjesztő erő hajtja, amplitúdója minden frekvencián F_0. A test 400 Hz-en 9 mm, 405 Hz-en 5 mm amplitúdóval rezeg.
(a) Határozzuk meg az oszcillátor ω_0 sajátfrekvenciáját és
(b) a rezgés amplitúdóját 395 Hz frekvencián.
(c) Állapítsuk meg a gerjesztő erő nagyságát. Megoldás:

Rugalmas közegekben terjedő hullámok

9.20. Feladat: Mindkét végén nyitott síp alapfrekvenciája 110 Hz. Milyen hosszú a síp, ha a hang terjedési sebessége 340 m/s?

Megoldás: Ha a síp minkét vége nyitott, akkor mindkét helyen duzzadóhely van. Ebből következik, hogy a hang fél hullámhossza a síp hossza, azaz

$$d = \frac{\lambda}{2}. \tag{9.20.1}$$

A hullámhossz a kifejezhető a frekvenciával és a terjedési sebességgel, amely

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 3,091\,\mathrm{m}. \tag{9.20.2}$$

Így a síp hossza

$$d = 1,55\,\mathrm{m}. \tag{9.20.3}$$

9.21. Feladat: A pozitív x tengely irányában egy transzverzális harmonikus hullám terjed 2 m/s sebességgel, amely a $t = 0$ időpillanatban az origóban van. Amplitúdója 10 cm, frekvenciája 0,5 Hz.

(a) Mennyi a körfrekvencia?

(b) Mekkora a hullámhossz?

(c) Mekkora a cirkuláris hullámszám?

Megoldás:

(a) A körfrekvencia

$$\omega = 2\pi\nu = 3,14\,1/\mathrm{s}. \tag{9.21.1}$$

(b) A hullám terjedési v sebessége, a ν frekvencia és a λ hullámhossz közötti összefüggés

$$v = \lambda\nu, \tag{9.21.2}$$

ahonnan

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = 4\,\mathrm{m}. \tag{9.21.3}$$

(c) A cirkusláris hullámszám

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 1,57\,1/\mathrm{m}. \tag{9.21.4}$$

9.22. Feladat: (HN 18B-8) Kifeszített huzalon haladó transzverzális hullám apmlitúdója 0,2 mm, frekvenciája 500 Hz, sebessége 196 m/s.
(a) Írjuk fel SI egységekkel a hullámfüggvényt $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ alakban.
(b) A huzal lineáris tömegsűrűsége 4,1 g/m. Mekkora a huzalt feszítő erő?

Megoldás:
(a) Az amplitúdó méterben

$$A = 2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}. \tag{9.22.1}$$

A körfrekvencia

$$\omega = 2\pi f = 3140\,1/\mathrm{s}. \tag{9.22.2}$$

A hullámhossz

$$\lambda = v/f = 0,392\,\mathrm{m}. \tag{9.22.3}$$

A cirkusláris hullámszám

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 16\,1/\mathrm{m}. \tag{9.22.4}$$

Így a hullámfüggvény

$$y(x,t) = 2 \cdot 10^{-4} \sin(16x - 3140t). \tag{9.22.5}$$

(b) A terjedési sebesség négyzete

$$v^2 = \frac{F}{\mu}, \tag{9.22.6}$$

ahol μ a hosszegységenkénti tömeg. Innen a kötelet feszítő erő

$$F = \mu v^2 = 157\,\mathrm{N}. \tag{9.22.7}$$

9.23. Feladat: Egy húron csillapítatlan transzverzális harmonikus hullám terjed 20 m/s sebességgel pozitív irányba. Amplitúdója 50 cm, frekvenciája 2 Hz. A $t_0 = 0$ pillanatban az $x_0 = 0$ helyen levő részecske kitérése 25 cm, és negatív irányban mozog. Mekkora a kitérése az $x = 5$ m helyen lévő részecskének a $t = 2$ s pillanatban?

Megoldás: Jelölések: $v = 20$ m/s; $A = 50$ cm = 0,5 m; $\nu = 2$ Hz; $A(x_0 = 0, t_0 = 0) = A(0,0) = 25$ cm = 0,25 m.
A hullámfüggvény általános alakja

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \delta), \tag{9.23.1}$$

amelyre a kezdeti feltételeket alkalmazva

$$A(0,0) = A\sin\delta. \tag{9.23.2}$$

Ahhoz, hogy a hullámfüggvény a kezdeti időpillanatot követően az $x_0 = 0$ helyen csökkenjen, úgy $0 < \delta < \pi/2$ kell legyen. Így az adatok behelyettesítése után

$$\delta = \frac{\pi}{6}. \tag{9.23.3}$$

Az ω körfrekvencia

$$\omega = 2\pi\nu = 12,56\,1/\text{s}. \tag{9.23.4}$$

A hullám terjedési sebessége a

$$v = \frac{\omega}{k} \tag{9.23.5}$$

összefüggéssel számolható, ahonnan a k cirkuláris hullámszám

$$k = \frac{\omega}{v} = 0,628\,1/\text{m}. \tag{9.23.6}$$

A hullámfüggvény az SI egységekkel kifejezve a

$$y(x,t) = 0,5\sin\left(0,628x - 12,56t + \frac{\pi}{6}\right) \tag{9.23.7}$$

alakot ölti. Az $x = 5$ m és $t = 2$ s helyettesítést elvégezve az ezen a helyen és ebben az időpontban a kitérés

$$y(5,2) = -0,25\,\text{m}. \tag{9.23.8}$$

9.24. Feladat: Megszólaltatjuk egy $L = 0,6$ m hosszúságú, mindkét végén rögzített gitárhúr alapharmonikusát, amely $f_0 = 440$ Hz frekvenciájú.
(a) Rajzolja le az állóhullámot! Mekkora a hullámhossz?
(b) Mekkora a hang terjedési sebessége a húrban?
(c) Tudjuk, hogy a húr közepe $A_1 = 2$ mm-es amplitúdóval rezeg. A húr végétől mekkora távolságra található a húrnak azon része, ahol az állóhullám amplitúdója $A_2 = 1$ mm?
(d) A húr végétől mekkora távolságban fogjuk le a húrt, ha azt szeretnénk, hogy egy $f_1 = 660$ Hz frekvenciájú hang szólaljon meg?

Megoldás:

10. Feladatok a termodinamika tárgyköréből

Hővezetés, hőterjedés sugárzással

10.1. Feladat: (HN 19A-23) Határozzuk meg egy 20 cm hosszú, 4 cm átmérőjű hengeres vörösréz rúdon időegység alatt átvezetett hőmennyiséget, ha a rúd két vége 0 ^{0}C, ill. 220 ^{0}C hőmérsékletű!
Megoldás:

10.2. Feladat: (HN 19A-25) Egy épület téglafalának mérete: 4 m $\times$ 10 m és, a fal 15 cm vastag. A hővezetési együtthatója $\lambda = 0,8$ W/m K. Mennyi hő áramlik át a falon 12 óra alatt, ha az átlagos belső hőmérséklet 20 ^{0}C, a külső pedig 5 ^{0}C?

Megoldás: Jelölések: a fal felülete A = 4 m $\times$ 10 m = 40 m^2; a falvastagság d = 15 cm; az eltelt idő t = 12 óra = 43200 s; T_1 = 20 ^{0}C és T_2 = 5 ^{0}C.
A hőáram (a belső energia árama, itt most a fal teles felületére vett teljesítmény) a Fourier-törvény szerint

$$I = P = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d} A. \tag{10.2.1}$$

A 12 óra alatt átáramlott hő

$$Q = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d} At = 1,38 \cdot 10^8 \mathrm{J}. \tag{10.2.2}$$

10.3. Feladat: (HN 19B-33) Egy 3 cm élhosszúságú alumínium kockát lámpakorommal vontak be és így ideális hősugárzó lett. A kockát vákuumkamrába tették, amelynek falait 27 ^{0}C-on tartották. Milyen teljesítményű legyen az a fűtőtest, amely annyi energiát ad a kockának, hogy hőmérséklete állandóan 90 ^{0}C maradjon?

Megoldás: Jelölések, adatok: $a = 3$ cm; $T_0 = 27\ ^0\mathrm{C} = 300$ K; $T_1 = 90\ ^0\mathrm{C} = 363$ K és $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ W/(m^{2}K^4).
A stacionárius (időben állandó) állapot beálltakor a fűtőtest teljesítménye

$$P = \sigma(T_1^4 - T_0^4)A \tag{10.3.1}$$

ahol a kocka felszíne $A = 6a^2$. Az adatok behelyettesítése után

$$P = 2,836 \mathrm{W}. \tag{10.3.2}$$

Ideális gázok állapotegyenlete

10.4. Feladat: (HN 20B-26) Egy tó fenekén, ahol a hőmérséklet 4 ^{0}C, egy 0,2 cm átmérőjű légbuborék képződött. Ez 25 m-t emelkedik a felszínig, ahol a víz hőmérséklete 24 ^{0}C. Határozzuk meg a gömb alakú buborék méretét, amint éppen eléri a víz felszínét, feltételezve, hogy a buborék belsejében lévő levegő mindig felveszi a környező víz hőmérsékletét! A légköri nyomás 10^5 Pa.

Megoldás: Jelölések: $T_1 = 4$ ^{0}C $= 277$ K; $d_1 = 0,2$ cm; $h = 25$ m; $T_2 = 24$ ^{0}C $= 297$ K; a külső légnyomás $p_k = 10^5$ Pa; a víz sűrűsége $\varrho = 1000$ kg/m^3.
Az egyesített gáztörvény szerint

$$\frac{(p_k + \varrho g h)\frac{4}{3}(\frac{d_1}{2})^3\pi}{T_1} = \frac{p_k\frac{4}{3}(\frac{d_2}{2})^3\pi}{T_2}, \tag{10.4.1}$$

ahonnan — behelyettesítés után — a buborék átmérője

$$d_2 = 0,31\text{cm}. \tag{10.4.2}$$

10.5. Feladat: (HN 20A-29) A Nap belsejének hőmérséklete kb. $2 \cdot 10^7$ K.
(a) Határozzuk meg egy proton átlagos kinetikus energiáját a Nap belsejében!
(b) Határozzuk meg a proton négyzetes középsebességét!
Megoldás:

10.6. Feladat: (HN 20B-36) Milyen hőmérsékleten egyenlő az oxigén atomok négyzetes középsebessége a Föld felszínéről való szökési sebességgel?

Megoldás: Adatok: A Föld sugara $R_F = 6370$ km, tömege $M_F = 6 \cdot 10^{24}$ kg; gravitációs állandó $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2; egyetmes gázállandó $R = 8,31$ J/(mol K); az oxigén móltömege $M = 16$ g/mol.
A v_{sz} szökési sebesség

$$v_{sz} = \sqrt{\frac{2\gamma M_F}{R_F}}, \tag{10.6.1}$$

a v_{nks} négyzetes középsebesség

$$v_{nks} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \tag{10.6.2}$$

A kettő egyenlőségéből a fenti adatokkal a kérdéses hőmérséklet

$$T = 80642\text{K}. \tag{10.6.3}$$

10.7. Feladat: 2 mól, 2 atomos gázzal állandó nyomáson 747,9 J hőt közlünk. A hőmérséklete 10 ^{0}C-kal változik. Hány szabadsági fokú a gáz?

Megoldás: Az állandó nyomásom vett mólhő és a szabadsági fokok száma közötti összefüggés

$$c_p = \frac{f+2}{2}R. \tag{10.7.1}$$

A közölt hő és a hőmérséklet változás között fenn áll, hogy

$$Q = c_p n \Delta T, \tag{10.7.2}$$

amelyből behelyettesítés után az állandó nyomáson vett mólhőre $c_p = \frac{9}{2}$ adódik. Innen egyszerűen leolvasható, hogy a szabadsági fokok száma

$$f = 7. \tag{10.7.3}$$

Megjegyzés: A szoba hőmérsékletű kétatomos gázok állandó nyomáson vett mólhője $c_p = \frac{7}{2}$, a szabadsági fokok száma $f = 5$, amelyek a transzlációs és rotációs mozgásokhoz kapcsolódnak. Magas hőmérsékleten ($\sim$ 2000 K) azonban a rezgéshez tartozó 2 újabb szabadsági fok jelenik meg. A mérést ezen a hőmérsékleten végezték!

10.8. Feladat: (HN 21B-12) Mutassuk meg, hogy egyatomos ideális gázra az izotermikus kompresszió-modulus ($K = -V \cdot dp/dV$) egyenlő a nyomással!

Megoldás: Az ideális gáz állapotegyenlete

$$pV = nRT, \tag{10.8.1}$$

ahonnan a nyomás

$$p(V) = nRT\frac{1}{V}. \tag{10.8.2}$$

A dp/dV differenciálhányadost kiszámolva

$$\frac{dp}{dV} = -nRT\frac{1}{V^2}, \tag{10.8.3}$$

az izoterm kompresszió-modulus — felhasználva az állapotegyenlet alakját —

$$K = -V\frac{dp}{dV} = VnRT\frac{1}{V^2} = p. \tag{10.8.4}$$

Körfolyamatok ideális gázzal

10.9. Feladat: (HN 21C-22) Kezdeti p_1, V_1, T_1 állapotjelzőkkel jellemzett egyatomos ideális gázzal a következő, három lépésből álló körfolyamatot végezzük: izotermikus expanzió V_2 térfogatig, izobár kompresszió az eredeti térfogatig és izochor melegítés a kezdeti nyomás és hőmérséklet visszaállítására.
(a) Ábrázoljuk a körfolyamatot a $p-V$ síkon!
(b) Határozzuk meg a gáz mólszámát a megadott paraméterekkel, a gázállandóval és c_v-vel kifejezve.
(c) Határozzuk meg a T_2 hőmérsékletet az izobár kompresszió végén a b) feladat eredményét felhasználva!
(d) Írjuk fel mindhárom folyamatra a hőmérséklet változását a megfelelő változók függvényében.

Megoldás:
(a) (ábra)
(b) Az ideális gáz

$$pV = nRT \tag{10.9.1}$$

állapotegyenletéből és a mólhőre érvényes

$$c_v = \frac{3}{2}R \tag{10.9.2}$$

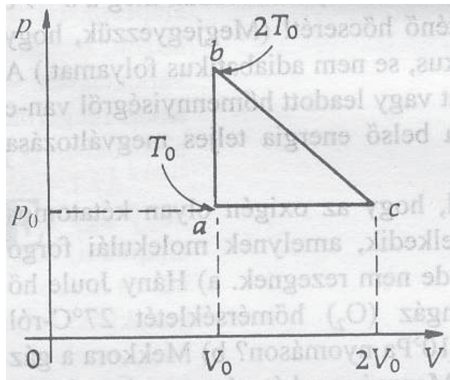
összefüggéssel az n mólszám

$$n = \frac{3p_1V_1}{2c_vT_1} = \frac{3p_2V_2}{2c_vT_1} = \frac{3p_2V_1}{2c_vT_2}. \tag{10.9.3}$$

(c) A fenti egyenletből a T_2 hőmérséklet

$$T_2 = \frac{V_1}{V_2}T_1. \tag{10.9.4}$$

(d) Az első folyamatban $\Delta T = 0$; a másodikban $\Delta T = T_2 - T_1 = (\frac{V_1}{V_2} - 1)T_1$; míg a harmadikban $\Delta T = T_1 - T_2 = (1 - \frac{V_1}{V_2})T_1$.



51. ábra.

10.10. Feladat: (HN 21C-26) Két mól egyatomos gázzal a 51. ábrán látható abca körfolyamatot végezzük. A $p-V$ síkon mindhárom folyamat ábrája egyenes. Az a pontban a paraméterek: p_0, V_0, T_0. Az alábbi feladatokat oldjuk meg RT_0 függvényében.

(a) Határozzuk meg egy teljes ciklus alatt végzett munkát.

(b) Határozzuk meg a $b \to c$ folyamat során történő hőcserét! A rendszer által felvett vagy leadott hőmennyiségről van-e szó?

(c) Mekkora a belső energia teljes megváltozása egy ciklus során?

Megoldás: Az egyesített gáztörvény alkalmazásával az egyes pontokban az állapothatározók:

a: (p_0, V_0, T_0)

b: $(2p_0, V_0, 2T_0)$

c: $(p_0, 2V_0, 2T_0)$

(a) A körfolyamatban végzett munka

$$W = \frac{1}{2}(2p_0 - p_0)(2V_0 - V_0) = \frac{1}{2}p_0V_0 = \frac{1}{2}nRT_0. \tag{10.10.1}$$

(b) A $b \to c$ folyamat kezdő és végállapotában a hőmérséklet egyaránt T_2, de ettől a folyamat maga nem izotermikus. Ugyanakkor a belső energia megváltozása zérus. A gáz által végzett munka

$$W_{b\to c} = \frac{1}{2}(2p_0 + p_0)(2V_0 - V_0) = \frac{3}{2}p_0V_0 = \frac{3}{2}nRT_0, \tag{10.10.2}$$

s ennek megfelelően a felvett hő

$$Q_{b\to c} = \frac{3}{2}nRT_0. \tag{10.10.3}$$

Megjegyzés: E folyamat további diszkusszióra érdemes!

(c) A körfolyamat egy teljes ciklusában a belső energia megváltozása zérus.

10.11. Feladat: (HN 22A-5) Egy hőerőgép, amelynek a Carnot-hatásfoka 30%, a 400 K hőmérsékletű hőtartályból vesz fel hőt. Határozzuk meg a hidegebb hőtartály hőmérsékletét!

Megoldás: A Carnot-körfolyamat hatásfoka

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \tag{10.11.1}$$

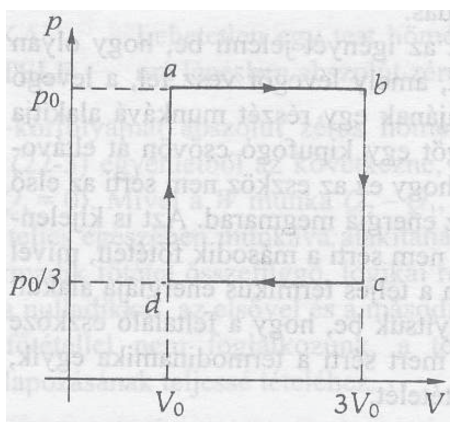
ahol T_1 a felső, T_2 az alsó hőtartály hőmérséklete. Innen

$$T_2 = (1-\eta)T_1 = 280\text{K}. \tag{10.11.2}$$

10.12. Feladat: (HN 22B-23) Egyatomos ideális gázzal a 52. ábrán látható, a $\to b \to c \to d \to a$ körfolyamatot végezzük.

(a) Határozzuk meg a gáz által végzett eredő munkát p_0 és V_0 segítségével!

(b) Határozzuk meg a körfolyamat hatásfokát! Megoldás:

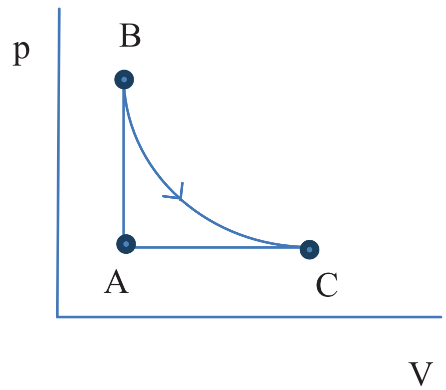


52. ábra.

10.13. Feladat: A 53. ábra 1 kmol héliumgázon végzett körfolyamatot mutat. A BC ív izotermát jelöl, $p_A = 10^5$ Pa, V_A =22,4 m^3, $p_B = 2 \cdot 10^5$ Pa. a, Határozzuk meg T_A, T_B és V_C értékeit! b, Számítsuk ki a körfolyamatban az AB és BC folyamatban végzett munkát!

Megoldás: a, Az ideális gáz állapotegyenletét

$$p_A V_A = nRT_A \tag{10.13.1}$$



53. ábra.

felhasználva az A-beli hőmérséklet

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = 269,6\,\mathrm{K}. \tag{10.13.2}$$

A B-beli hőmérsékletet Gay-Lussac II. törvénye

$$\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_B}{T_B} \tag{10.13.3}$$

segítségével határozhatjuk meg. Innen

$$T_B = T_A \frac{p_B}{p_A} = 539,2\,\mathrm{K}. \tag{10.13.4}$$

Mivel a $B \longrightarrow C$ folyamat izoterm, így

$$T_C = T_B = 539,2\,\mathrm{K}. \tag{10.13.5}$$

A C-beli térfogatot pl. Gay-Lussac I. törvénye

$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_C}{T_C} \tag{10.13.6}$$

segítségével határozhatjuk meg. Innen

$$V_C = V_A \frac{T_C}{T_A} = 44,8\,\mathrm{m}^3. \tag{10.13.7}$$

b, Mivel az $A \longrightarrow B$ folyamatban nincs térfogatváltozás, így a végzett munka is zérus:

$$W_{A\longrightarrow B} = 0. \tag{10.13.8}$$

A $B \longrightarrow C$ izoterm folyamatban a gáz által végzett munka

$$W = \int_{V_B}^{V_C} p(V)\mathrm{d}V = \int_{V_B}^{V_C} \frac{nRT_B}{V}\mathrm{d}V = nRT_B \ln\frac{V_C}{V_B} = 3,1\cdot 10^6\,\mathrm{J}. \tag{10.13.9}$$

10.14. Feladat: 1 m^3, 0 C^0-os 10^5 Pa nyomású héliumot állandó nyomáson addig hűtenek, amíg térfogata 0,75 m^3 nem lesz. Mennyi hőt kell ehhez elvonni?

Megoldás: Jelölések: $V_1 = 1$ m^3, $T_1 = 0$ C^0 = 273 K, $p_1 = p_2 = 10^5$ Pa és $V_2 = 0,75$ m^3. Mivel egyatomos gázról van szó, az állandó nyomáson vett mólhő $c_p = \frac{5}{2}R$. A folyamat állandó nyomáson történik, így

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \tag{10.14.1}$$

amelyből a hűtés utáni hőmérséklet

$$T_2 = T_1\frac{V_2}{V_1} = 204,75\,\mathrm{K}. \tag{10.14.2}$$

A elvont hő kiszámolásához tudni kell, hány mól hélium van rendszerben. Ez a

$$pV = nRT \tag{10.14.3}$$

összefüggésből tehető meg, azaz

$$n = \frac{p_1V_1}{RT_1} = 44,08\,\mathrm{mol}. \tag{10.14.4}$$

Ezzel a közölt hő

$$Q = c_pn(T_2-T_1) = \frac{5}{2}Rn(T_2-T_1) = -62500\,\mathrm{J}. \tag{10.14.5}$$

Megjegyzés: A negatív előjel arra utal, hogy hőelvonás történik.

10.15. Feladat: Tekintsünk $n = 2$ mólnyi egyatomos ideális gázt: $p_1 = 10^5$ Pa, $T_1 = 273$ K. A gázzal $Q = 6806$ J hőt közlünk, állandó térfogat mellett, majd izoterm módon tágulni engedjük úgy, hogy a végső térfogat háromszorosa legyen a kiindulási térfogatnak.

(a) Ábrázolja a folyamatot állapotdiagramon!

(b) Mennyi lesz a hőközlés utáni hőmérséklet?

(c) Mekkora lesz a nyomás a folyamat végén?

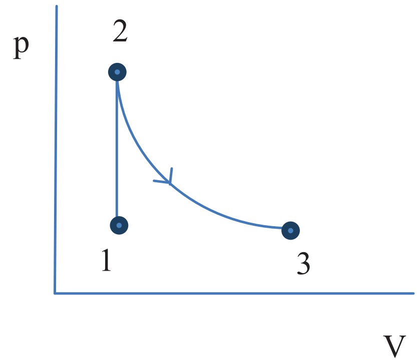
(d) Mekkora az entrópia-változás a két folyamatban?

Megoldás:

(a) Az állapotdiagram a 54. ábrán látható.

(b) A közölt hő és a hőmérséklet-változás közötti összefüggés

$$Q = c_vn\Delta T, \tag{10.15.1}$$



54. ábra.

ahol $c_v = \frac{3}{2}nR$. Innen a hőközlés során a hőmérséklet-változás

$$\Delta T = \frac{Q}{c_v n} = \frac{Q}{\frac{3}{2}nR} = 273\,\mathrm{K}. \tag{10.15.2}$$

Így az állandó nyomású hőközlés utáni hőmérséklet

$$T_2 = 546\,\mathrm{K}. \tag{10.15.3}$$

(c) Az állandó térfogaton végzett hőközlés során kialakuló p_2 nyomás a

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \tag{10.15.4}$$

összefüggésből

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}. \tag{10.15.5}$$

A térfogatváltozás miatti nyomás – figyelembe véve, hogy $V_1 = V_2$ és $V_3 = 3V_1$ – a Boyle-Mariotte törvény szerint a

$$p_2 V_2 = p_3 V_3 \tag{10.15.6}$$

összefüggésből

$$p_3 = \frac{V_2}{V_3} p_2 = 0,667 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}. \tag{10.15.7}$$

(d) Az izochor ($1 \longrightarrow 2$) folyamatbeli S_1 entrópiaváltozás a

$$S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_v n \mathrm{d}T}{T} = \frac{3}{2} nR \ln \frac{T_2}{T_1} = 17,28\,\mathrm{J/K}. \tag{10.15.8}$$

Az izoterm ($2 \longrightarrow 3$) folyamatban a gáz belsőenergia változása, a felvett hő a tágulási munkára fordítódik. Így a felvett hő

$$Q = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_2}{V}\mathrm{d}V = nRT_2 \ln\frac{V_2}{V_1} = 9969,4\,\mathrm{J}. \qquad (10.15.9)$$

Az izoterm S_2 entrópiaváltozás

$$S_2 = \frac{Q}{T_2} = 18,26\,\mathrm{J/K}. \qquad (10.15.10)$$

Az össz entrópiaváltozás: 35,54 J/K.

10.16. Feladat: 8 g tömegű, 5 l térfogatú, 27 ^{0}C hőmérsékletű N_2 gázt (M = 28 g) adiabatikusan kiterjesztünk 50 liter térfogatra. Mennyi hőmennyiséget kell ezen a térfogaton a gázzal közölni, hogy hőmérséklete újra 27 ^{0}C legyen?

Megoldás: Jelölések: $m = 8$ g, $V_1 = 5$ l, $T_1 = 27^0\mathrm{C} = 300$ K és $V_2 = 50$ l. Mivel kétatomos szoba hőmérsékletű gázról van szó, ezért a mólhők $c_p = \frac{7}{2}R$, $c_v = \frac{5}{2}R$, így $\kappa = c_p/c_v = \frac{7}{5}$. Elsőként az adiabatikus folyamat végi hőmérsékletet határozzuk meg a $TV^{\kappa-1} = const.$ összefüggés alapján

$$T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}. \qquad (10.16.1)$$

Behelyettesítés után

$$T_2 = 119,43\,\mathrm{K}. \qquad (10.16.2)$$

A 8 g nitrogén gáz n = 0,2857 molnak felel meg, így az állandó térfogaton történő visszamelegítéshez szükséges hő

$$Q = c_v n \Delta T = \frac{5}{2} R n (T_1 - T_2) = 1071,8\,\mathrm{J}. \qquad (10.16.3)$$

Hőátadás

10.17. Feladat: A c_1 fajhőjű, m_1 tömegű, T_1 hőmérsékletű pohárba c_2 fajhőjű, m_2 tömegű, T_2 hőmérsékletű sört öntünk. ($c_1 = 670$ J/kgK, $T_1 = 37$ ^{0}C, $m_1 = 0,3$ kg, $c_2 = 4000$ J/kgK, $T_2 = 8$ ^{0}C, $m_2 = 0,5$ kg)

(a) Mekkora lesz a közös hőmérséklet?

(b) Mennyi az átadott hő?

(c) Mekkora a hőáram, ha $\Delta t = 5$ s alatt áll be az egyensúly?

(d) Mekkora a teljes entrópia változás?

Megoldás:
(a) Az energiamegmaradás kifejezhető úgy, hogy a belső energiákat a $T_0 = 0$ ^{0}C-hoz viszonyítjuk:

$$c_1 m_1 T_1 + c_2 m_2 T_2 = (c_1 m_1 + c_2 m_2) T, \tag{10.17.1}$$

ahol T a közös hőmérséklet. Innen

$$T = \frac{c_1 m_1 T_1 + c_2 m_2 T_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2} = 10,64\,^0\mathrm{C} = 283,64\,\mathrm{K}. \tag{10.17.2}$$

(b) Az átadott hő nagysága

$$\Delta Q = c_1 m_1 (T_1 - T) = 5298\,\mathrm{J}. \tag{10.17.3}$$

(c) A hőáram

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = 1059,6\,\mathrm{W}. \tag{10.17.4}$$

(d) A teljes entrópiaváltozás

$$S = \int_{T_1}^{T} c_1 m_1 \frac{\mathrm{d}T}{T} + \int_{T_2}^{T} c_2 m_2 \frac{\mathrm{d}T}{T} = c_1 m_1 \ln\frac{T}{T_1} + c_2 m_2 \ln\frac{T}{T_2} \tag{10.17.5}$$

$$= (-17,86 + 18,70)\,\mathrm{J/K} = 0,84\,\mathrm{J/K}.^* \tag{10.17.6}$$

**Emlékeztető:* A hőmérsékletet kelvinben kell behelyettesíteni.

10.18. Feladat: $m = 1$ kg tömegű, $T_1 = 273$ K hőmérsékletű vizet $T_2 = 300$ K hőmérsékletű végtelen hőkapacitású hőtartállyal hozunk kapcsolatba. (A víz fajhője: 4,18 kJ/kg.) Mennyi a rendszer teljes entrópiájának megváltozása?

Megoldás: A víz és a hőtartály által cserélt hő nagysága

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} c_v m \,\mathrm{d}T = c_v m (T_2 - T_1), \tag{10.18.1}$$

amely pozitív a vízre, negatív a hőtartályra nézve. A víz S_1 entrópiaváltozása – figyelembe véve, hogy a hőfelvétel a víz esetén nem állandó hőmérsékleten történik –

$$S_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_v m \frac{\mathrm{d}T}{T} = c_v m \ln\frac{T_2}{T_1} = 394,2\,\mathrm{J/K}. \tag{10.18.2}$$

A hőtartály végtelen hőkapacitású, ami azt jelenti, hogy T_2 hőmérséklete nem változik, azaz a hőtártály S_2 entrópiaváltozása egyszerűen

$$S_2 = -\frac{Q}{T_2} = -376,2\,\mathrm{J/K}. \tag{10.18.3}$$

Azaz az össz entrópiaváltozás: 18 J/K.

10.19. Feladat: (HN 23B-9) Igazoljuk, hogy n mól ideális gáz V_0 kezdeti térfogatról $2V_0$ végső térfogatra való izobár tágulásakor a gáz entrópiaváltozása $nR[\kappa/(\kappa-1)]$ ln 2 !

Megoldás: A folyamat során felvett elemi hő

$$\mathrm{d}Q = nc_p \mathrm{d}T, \tag{10.19.1}$$

így az entrópiaváltozás

$$\triangle S = \int \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} nc_p \frac{\mathrm{d}T}{T} = nc_p \ln \frac{T_2}{T_1}, \tag{10.19.2}$$

ahol T_1 a kezdeti, T_2 a végső hőmérséklet. Felhasználva Gay-Lussac I. törvényét

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_k}, \tag{10.19.3}$$

ahol most $V_1 = V_0$ a kezdeti, $V_2 = 2V_0$ a végső térfogat, az entrópiaváltozás

$$\triangle S = nc_p \ln \frac{V_2}{V_1} = nc_p \ln 2. \tag{10.19.4}$$

Most már csak az kell belátni, hogy

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} R = \frac{\frac{c_p}{c_v}}{\frac{c_p}{c_v} - 1} R = c_p. \tag{10.19.5}$$

Így az állítást igazoltuk.

10.20. Feladat: (HN 23C-17) Igazoljuk, hogy az egyatomos ideális gáz izochor állapotváltozása során az entrópiaváltozás 3/2 nR ln (p_v/p_k), ahol p_k a kezdeti, p_v a végső nyomás!

Megoldás: Mivel egyatomos gázról van szó, az állandó térfogaton vett mólhő

$$c_v = \frac{3}{2} R. \tag{10.20.1}$$

A folyamat során felvett elemi hő

$$dQ = nc_v dT, \tag{10.20.2}$$

így az entrópiaváltozás

$$\triangle S = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_k}^{T_v} \frac{3}{2} nR \frac{dT}{T} = \frac{3}{2} nR \ln \frac{T_v}{T_k}, \tag{10.20.3}$$

ahol T_k a kezdeti, T_v a végső hőmérséklet. Felhasználva Gay-Lussac II. törvényét

$$\frac{T_v}{T_k} = \frac{p_v}{p_k}, \tag{10.20.4}$$

az entrópiaváltozás

$$\triangle S = \frac{3}{2} nR \ln \frac{p_v}{p_k}. \tag{10.20.5}$$

11. Feladatok az elektrosztatika tárgyköréből

Coulomb-törvény

11.1. Feladat: (HN 24B-7) Két kicsiny, 100 g-os ezüst gömb egymástól 1 m-es távolságra helyezkedik el. Az ezüstgömb elektronjainak hányadrészét kell az egyik gömbről a másikra átvinni, hogy közöttük 10^4 N vonzóerő hasson? (Az ezüstben atomonként 47 elektron van, és az ezüst atomtömege 107,9.)

Megoldás: A fellépő erő nagysága

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{r^2}, \tag{11.1.1}$$

amelyből az adatok behelyettesítésével az átvitt töltés

$$Q = 1,054 \cdot 10^{-3} \text{C}. \tag{11.1.2}$$

Ez $6,58 \cdot 10^{15}$ számú elektronnak felel meg. A 100 g ezüst $2,61 \cdot 10^{25}$ elektront tartalmaz. Így az elektronok $\underline{2,51 \cdot 10^{-10}}$-nyi hányadát kell átvinni.

11.2. Feladat: (HN 24B-9) Két pontszerű töltés az x tengelyen a következőképpen helyezkedik el: egy -3 μ C töltés az origóban, és egy +2 μ C töltés az x = 0,15 m koordinátájú pontban van. Keressük meg azt a helyet, egy q' ponttöltésre ható erő zérus.

Megoldás: A q' töltésre ható erő ott zérus, ahol zérus a két töltéstő származó elektromos térerősség. Osszuk fel az x tengelyt három intervallumra. Jelölje D a q' helyét az x tengelyen.
(a) $-\infty < D < 0$: Számolás nélkül belátható, hogy a térerősség egyetlen D pontban sem lehet zérus. A -3 μ C töltéstől származó tér nagysága – az $1/r^2$-es erőtörvény miatt – mindenütt felülmúlja a +2 μ C töltéstől származó teret. Itt tehát nincs megoldás.
(b) $0 < D < x$: Az intervallum minden pontjában mindkét töltéstől származó erőtér negatív irányú, így az összegük is. Itt sincs megoldás.
(c) $x < D < \infty$: Legyen $Q_1 = -3\mu$ C és $Q_2 = +2\mu$ C. A két töltéstől származó tér zérus voltát a

$$0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{D^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{(D-x)^2} \tag{11.2.1}$$

egyenlet fejezi ki. Ezt D-re megoldva és az adatokat behelyettesítve

$$D = 0,82\text{m} \tag{11.2.2}$$

adódik. Ebben a pontban zérus a térerősség.

11.3. Feladat: Egy homogén elektromos erőtér térerőssége (derékszögű koordinátarendszerben) $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{y}} = E_0\mathbf{j} = E_0 \cdot (0,1,0)$, ahol E_0 konstans. (Itt a többféle lehetséges jelölés látható.) Egy m tömegű és $+q$ töltésű részecskét juttatunk a koordinátarendszer origójába $\mathbf{v} = v_0\hat{\mathbf{x}} = v_0\mathbf{i} = v_0 \cdot (1,0,0)$ sebességgel. Számítsuk ki a részecske pályájának egyenletét!

Megoldás: A $+q$ töltésre ható erő

$$\mathbf{F} = qE_0 \cdot (0,1,0) = (0, qE_0, 0), \tag{11.3.1}$$

amely

$$\mathbf{a} = \frac{qE_0}{m} \cdot (0,1,0) = \left(0, \frac{qE_0}{m}, 0\right) \tag{11.3.2}$$

gyorsulást hoz létre. A sebességre vonatkozó kezdőfeltételt figyelembe véve a test sebessége az idő függvényében

$$\mathbf{v} = \left(v_0, \frac{qE_0}{m}t, 0\right). \tag{11.3.3}$$

Míg a test helyzete – figyelembe véve, hogy az origóból indult –

$$\mathbf{r} = \left(v_0 t, \frac{1}{2}\frac{qE_0}{m}t^2, 0\right). \tag{11.3.4}$$

Látható, hogy

$$x(t) = v_0 t \tag{11.3.5}$$

és

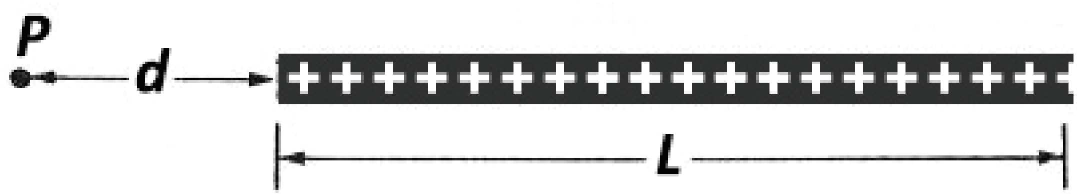
$$y(t) = \frac{1}{2}\frac{qE_0}{m}t^2, \tag{11.3.6}$$

ahonnan a t eliminálásával az

$$y(x) = \frac{1}{2}\frac{qE_0}{mv_0^2}x^2 \tag{11.3.7}$$

pályagörbe adódik.

11.4. Feladat: (HN 24B-19) A $+Q$ töltés egy L hosszúságú egyenes szakasz mentén oszlik el egyenletesen (ld. 55. ábra.). Számítsuk ki az E elektromos térerősséget a vonal irányában lévő,



55. ábra. 24B-19 feladat

annak végpontjától d távolságra lévő P pontban!

Megoldás: Mivel a P pont a szakasz meghosszabbításában van és a szakasz töltése pozitív a térerősség vektora a szakasztól el mutat. Válasszuk a koordinátarendszerünket úgy, hogy a szakasz az x tengelyén feküdjön és a P pont legyen az origóban! Osszuk fel a szakaszt kis dx hosszúságú darabokra! Egy ilyen darab töltése $dQ = dx \cdot \frac{Q}{L}$. A teljes térerősség ezen kis dx szakaszok térerősségeinek összegével közelíthető ami integrállá válik, amennyiben $dx \to 0$. A P ponttól x távolságban levő szakasz darabtól származó térerősség nagysága:

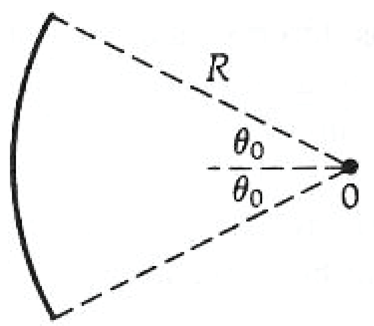
$$dE(x) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dQ}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dx\,Q}{Lx^2} \tag{11.4.1}$$

A teljes térerősség

$$\begin{aligned} E(x) &\approx -\sum_{x=d}^{x=d+L} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q\,dx}{Lx^2} = -\frac{Q}{4L\pi\varepsilon_0} \sum_{x=d}^{x=d+L} \frac{dx}{x^2} \qquad (11.4.2) \\ E(x) &= -\frac{Q}{4L\pi\varepsilon_0} \int_{x=d}^{x=d+L} \frac{dx}{x^2} = -\frac{Q}{4L\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{x}\right]_d^{x+L} \\ &= -\frac{Q}{4L\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{d+L} + \frac{1}{d}\right) = -\frac{Q}{4L\pi\varepsilon_0} \left(\frac{L}{d(d+L)}\right) \end{aligned}$$

$$E(x) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d(d+L)} \tag{11.4.3}$$

11.5. Feladat: (HN 24B-20) Egy vékony, nem vezető rudat a 56. ábrán vázolt módon meghajlítunk úgy, hogy az egy R sugarú kör íve legyen, mely e kör középpontjából 20^o szög alatt látszik. Legyen e hajlított rúdon egyenletes pozitív λ töltéssűrűség. Számítsuk ki az E elektromos tér tér-



56. ábra. 24B-20 feladat

erősséget a kör O középpontjában. (Útmutatás: számítsuk ki a $dl = Rd\theta$ hosszúságú szakasz dq töltésétől származó dE térerősséget. Használjuk ki a rendszer szimmetriatulajdonságát a $\theta = -\theta_0$ és $\theta = +\theta_0$ közötti integrál kiszámításakor.)

Megoldás: Osszuk fel a körívet egyenlő dl hosszúságú kis darabokra! A körív középpontjában minden ilyen kis darab térerőssége ugyanakkora:

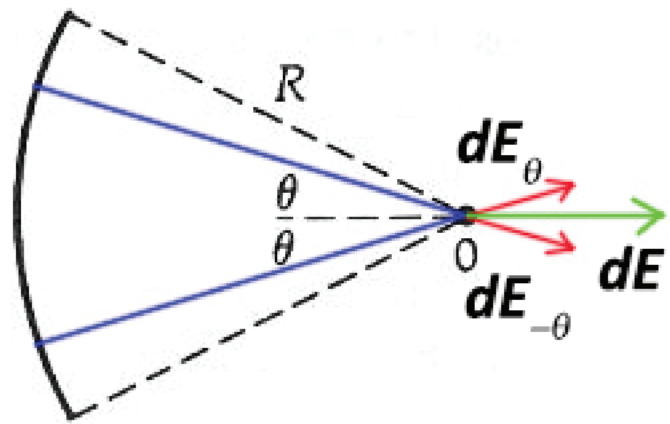
$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R d\theta}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda d\theta}{R} \tag{11.5.1}$$

nagyságú és az O pontból a körívvel ellentétes irányba mutat. Mivel a vízszintes tengelyre szimmetrikusan, θ és $-\theta$ szögben elhelyezkedő szakaszoktól származó térerősség nagysága ugyanakkora, és irányuk a vízszintes tengelyre szimmetrikus ezek függőleges komponensei kiejtik egymást: vízszintes komponenseik nagysága pedig összeadódik, az eredő térerősség kiszámításához elegendő a pozitív θ értékekre, vagyis fél körívre összegezni a dE_θ térerősségek vízszintes komponensének *kétszeresét*, azaz $2\,dE_\theta \cdot cos\,\theta$-t. A $dl \to 0$ határesetben egy integrált kapunk:

$$E = 2\int_0^{\theta_0} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R} cos\,\theta\, d\theta = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\,[sin\,\theta]_0^{\theta_0}, \tag{11.5.2}$$

azaz

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} sin\theta_0. \tag{11.5.3}$$



57. ábra. Az eredő térerősség kiszámításához

11.6. Feladat: (HN 24C-23) Mutassuk meg, hogy két egymástól meghatározott távolságban lévő kis tárgy, amelyek között adott töltésmennyiség oszlik meg, akkor taszítja egymást a legnagyobb erővel, ha a töltés egyenletesen oszlik meg közöttük.

Megoldás: Osszunk meg Q töltést úgy, hogy az egyik testen q, a másikon Q-q töltés legyen. Ekkor a két test között ható Coulomb-erő nagysága

$$F(q) = K\frac{q(Q-q)}{r^2}. \tag{11.6.1}$$

A erő maximális értékét úgy kereshetjük meg, ha megoldjuk a

$$\frac{dF(q)}{\mathrm{d}q} = 0 \tag{11.6.2}$$

egyenletet. A deriválást elvégezve

$$\frac{K}{r^2}(Q-2q) = 0 \tag{11.6.3}$$

adódik, amelyből a

$$q = \frac{1}{2}Q \tag{11.6.4}$$

következik. Ezzel az állítást igazoltuk.

11.7. Feladat: (HN 24C-26) Két (fix helyzetű) $+Q$ nagyságú ponttöltés egymástól d távolságra helyezkedik el. Egy harmadik, pozitív q töltést a két előbbi töltést összekötő egyenes mentén mozgatunk.

(a) Mutassuk meg, hogy ha a q töltést egyensúlyi helyzetéből kissé (x távolságnyira, $x \ll d$) kimozdítjuk, akkor közelítőleg egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez.
(b) Számítsuk ki az ehhez a mozgáshoz rendelhető k „rugóállandót".

Megoldás: Legyen mindegyik töltés az x tengelyen! Ekkor a q töltés által érzékelt térerősség is x irányú. Mivel mindegyik töltés azonos előjelű a q töltésre a két Q töltéstől ható erők ellentétes irányúak:

$$F_{bal\,oldali\,Qtol} = K\frac{Qq}{r^2_{bal\,oldali\,Qtol}} F_{jobb\,oldaliQtol} = -K\frac{Qq}{r^2_{jobb\,oldali\,Qtol}} \tag{11.7.1}$$

q egyensúlyi helyzete a két $+Q$ töltés között éppen félúton van, ahol a két erő kiegyenlíti egymást. Térítsük ki a q töltést egyensúlyi helyzetétől pozitív irányba. Ekkor a rá ható erők eredője már nem lesz 0, hanem :

$$F = F_{bal\,oldali\,Qtol} + F_{jobb\,oldali\,Qtol} = K\left[\frac{Qq}{\left(\frac{d}{2}+x\right)^2} - \frac{Qq}{\left(\frac{d}{2}-x\right)^2}\right]. \tag{11.7.2}$$

Ha $x \ll d$, akkor $x \ll \frac{d}{2}$ is igaz. Legyen $d = 2L$! Ekkor $\frac{d}{2} = L$ és a nevezők az előző képletben közelíthetőek a következő módon:

$$\frac{1}{(L\pm x)^2} = \frac{1}{L^2}\cdot\frac{1}{\left(1\pm\frac{x}{L}\right)^2} \approx \frac{1}{L^2}\cdot\frac{1}{\left(1\pm 2\frac{x}{L}\right)} \approx \frac{1}{L^2}\cdot\left(1\mp 2\frac{x}{L}\right). \tag{11.7.3}$$

Ez konkrét példákon is ellenőrizhető[1]. Tehát

$$F \approx \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{L^2}\left((1-2\frac{x}{L})-(1+2\frac{x}{L})\right) = = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{L^2}4\frac{x}{L} = = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4}{d^2}8\frac{x}{d}. \tag{11.7.5}$$

$$F = -\frac{8Qq}{\pi\varepsilon_0}\frac{x}{d^3}. \tag{11.7.6}$$

Mint látjuk, amennyiben a kitérés sokkal kisebb, mint d, az erő ellentétes irányú és arányos a kitéréssel vagyis valóban harmonikus rezgőmozgásról van szó amelynek "rugóállandója"

$$k = \frac{8Qq}{d^3\pi\varepsilon_0}. \tag{11.7.7}$$

[1]Egy példa: legyen $d = 10$, vagyis $L = 5$ és $x = 0,01$. Ekkor

$$\frac{1}{(L+x)^2} = 0,0398404\frac{1}{L^2}\cdot\frac{1}{\left(1+2\frac{x}{L}\right)} = 0,0398406\frac{1}{L^2}\cdot\left(1-2\frac{x}{L}\right) = 0,0398400. \tag{11.7.4}$$

11.8. Feladat: (HN 24C-27) Számítsuk ki azt a munkát, ami ahhoz szükséges, hogy egy R sugarú gömb felszínére Q töltést juttassunk. A feltöltést végezzük úgy, hogy infinitezimális dq elemi töltést viszünk a végtelenből a gömb felszínére mindaddig, amíg a gömb töltése a Q-t el nem éri.

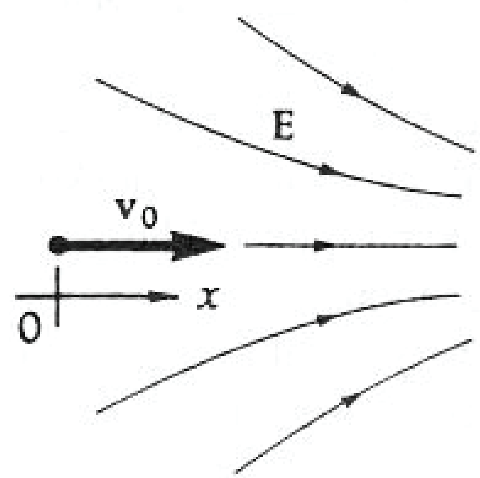
Megoldás: Tételezzük fel, hogy a gömbön már van q töltés. Ekkor a végtelenből további dq töltés viszünk a gömbre. Az eközben végzett munka

$$W(q \to q+dq) = -\int_{\infty}^{R} K\frac{q\mathrm{d}q}{r^2}dr = K\frac{q\mathrm{d}q}{r}. \tag{11.8.1}$$

A teljes feltöltéshez ezen munkákat kell összeadni:

$$W = \int_{0}^{Q} K\frac{q\mathrm{d}q}{r} = \frac{1}{2}K\frac{Q^2}{r}. \tag{11.8.2}$$

11.9. Feladat: (HN 24C-29) Miként az a 58. ábrán látható, egy elektron, amelynek az $x_o = 0$ helyen $v_o = 10^6\,m/s$ a kezdősebessége, az x tengely pozitív irányában halad olyan tértartományban, ahol az elektromos térerősséget az $E_x = (4V/m)\cdot(1+10^3 x)$ függvény adja meg (az x távolságot méterben kell megadni). Számítsuk ki azt a távolságot, ahol az elektron sebessége (legalábbis egy pillanatra) zérussá válik.



58. ábra. 24C-29 feladat

Megoldás: Az elektrosztatikus tér helytől függő potenciálja

$$\Phi(x) = -\int E(x)dx = -\int 4(1+10^3 x)\,dx = -4(x+500x^2). \tag{11.9.1}$$

Az elektron helyfüggő potenciális energiája ebben a térben (az elektron töltése negatív)

$$E_{pot} = -e\,\Phi(x) = 4\,e\,(x+500\,x^2). \tag{11.9.2}$$

Az elektron abban az x koordinátájú pontban áll meg amikor minden kinetikus energiáját elveszti. Az elektron potenciális energiájának megváltozása $\Delta x = x - x_o$ úton tehát egyenlő a kezdeti kinetikus energiájával:

$$\begin{aligned}\Delta E_{pot} &= E_{kin,kezdeti}\\ \Delta E_{pot} = E_{pot}(x) - E_{pot}(x_o) &= 4\,e\,(x+500\,x^2) - 0\\ 4\,e\,(x+500\,x^2) &= \frac{1}{2}\,m\,v_o^2\\ 500\,x^2 + x - \frac{1}{8}\frac{m}{e}\,10^{12} &= 0.\end{aligned} \tag{11.9.3}$$

A másodfokú egyenlet megoldása

$$\begin{aligned}x_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\frac{4}{8}\frac{m}{e}\,10^{12}\cdot 500}}{1000} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+\frac{1}{2}\frac{m}{e}\,10^{12}\cdot 500}}{1000}\\ = \frac{-1\pm\sqrt{1422,408}}{1000} &= \frac{-1\pm 37,715}{1000}\\ x_+ &= 3,67\cdot 10^{-2}\mathrm{m}\\ x_- &= -3,871\cdot 10^{-2}\mathrm{m}.\end{aligned} \tag{11.9.4}$$

A mi esetünkben csak a pozitív eredmény jöhet szóba.

11.10. Feladat: Egy dipól $-Q$ töltése a $(-\frac{l}{2},0)$ koordinátájú pontban, $+Q$ töltése a $(\frac{l}{2},0)$ koordinátájú pontban van. Mekkora az elektromos térerősségvektor
(a) az x tengelyen az origótól d távolságban, illetve
(b) az y tengelyen az origótól ugyancsak d távolságban?
(c) Minkét esetben vizsgáljuk meg azt, milyen közelítő végeredmény adható meg, ha $l << d$, azaz a dipóltól nagy távolságban adjuk meg a térerősséget?

Megoldás:
(a) A $-Q$ töltéstől származó elektromos térerősség vektor

$$\mathbf{E}_{-Q} = \left(-K\frac{Q}{\left(d+\frac{l}{2}\right)^2},\,0\right), \tag{11.10.1}$$

míg a $+Q$-tól származó

$$\mathbf{E}_{+Q} = \left(K\frac{Q}{\left(d-\frac{l}{2}\right)^2}, 0 \right). \tag{11.10.2}$$

Az eredő térerősség

$$\mathbf{E} = \left(K\frac{Q}{\left(d-\frac{l}{2}\right)^2} - K\frac{Q}{\left(d+\frac{l}{2}\right)^2}, 0 \right). \tag{11.10.3}$$

(b) A $-Q$ töltéstől származó elektromos térerősség vektor

$$\mathbf{E}_{-Q} = \left(-K\frac{Ql}{2\left(d^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)^{3/2}}, -K\frac{Qd}{2\left(d^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \right) \tag{11.10.4}$$

A $+Q$ töltéstől származó elektromos térerősség vektor

$$\mathbf{E}_{+Q} = \left(-K\frac{Ql}{2\left(d^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)^{3/2}}, K\frac{Qd}{2\left(d^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \right) \tag{11.10.5}$$

Az eredő térerősség

$$\mathbf{E}_{+Q} = \left(-K\frac{Ql}{\left(d^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)^{3/2}}, 0 \right) \tag{11.10.6}$$

(c) Az (a) feladatrészben végezzük el az alábbi közelítéseket:

$$\frac{1}{(d-\frac{l}{2})^2} - \frac{1}{(d-\frac{l}{2})^2} \sim \frac{1}{d^2}(1+\frac{l}{2d})^2 - \frac{1}{d^2}(1+\frac{l}{2d})^2 \sim \frac{1}{d^2}(1+\frac{l}{d}) - \frac{1}{d^2}(1-\frac{l}{d}) \sim \frac{2l}{d^3}. \tag{11.10.7}$$

Így a térerősség vektor:

$$\mathbf{E} = \left(K\frac{2Ql}{d^3}, 0 \right) \tag{11.10.8}$$

A (b) feladatrészben végezzük el azt közelítést, hogy $l << d$. Ekkor a nevezőbeli l-es tag a d-s tag mellett elhanyagolható, így

$$\frac{l}{\left(d^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \sim \frac{l}{d^3}. \tag{11.10.9}$$

A térerősség vektor:

$$\mathbf{E} = \left(-K\frac{Ql}{d^3}, 0 \right). \tag{11.10.10}$$

11.11. Feladat: (HN 24C-31) Egy elektromos dipólus egymástól l távolságra lévő, m tömegű pontszerű töltésekből áll, melyek nagysága $+q$ és $-q$. A dipólust E homogén elektromos erőtérbe helyezünk úgy, hogy a minimális potenciális energiájú állapot közelében legyen.
(a) Mutassuk meg, hogy a dipólus rezgő-forgó mozgást végez a tömegközéppontja körül.
(b) Vezessünk le olyan összefüggést, amely (közelítőleg) megadja a rezgés T periódusidejét.

Megoldás:
(a) A dipólus töltéseire azonos nagyságú, ellentétes erő hat (erőpár). A dipólusra ható erők eredője zérus, így haladó mozgást nem fog végezni. A forgatónyomaték azonban nem zérus, így a dipólus a tömegközéppontja (a két töltés felezőpontja) körül forgómozgást végezhet. Attól függően hogy a dipólnak milyen a térbeli helyzete, azaz a $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ dipólmomentum vektor és az $\mathbf{pE}$ elektromos erőtér iránya a szögelfordulás az $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ vektorral párhuzamos és mind a $\mathbf{p}$ mind az $\mathbf{E}$ vektorra merőleges. Azt, hogy kis kitérések esetén harmonikus rezgőmozgást végez a dipól, az a következőkben látjuk be.
(b) A minimális potenciálú állapot akkor van, ha a $\mathbf{p}$ dipólmomentum vektor párhuzamos és azonos irányba mutat az $\mathbf{E}$ elektromos térerősség vektorral. (A dipólus potenciális energiája $U = -\mathbf{pE}$.) Ha ebből a helyzetből φ szöggel kitérítjük, akkor

$$M = -qlE \sin\varphi \tag{11.11.1}$$

nagyságú forgatónyomaték fog a dipólusra hatni. A dipólus tehetetlenségi nyomatékát θ-val jelölve a forgómozgás mozgásegyenlete

$$\theta\ddot{\varphi} = -qlE \sin\varphi. \tag{11.11.2}$$

Kis szögelfordulásokra szorítkozva ($\sin\varphi \sim \varphi$)

$$\theta\ddot{\varphi} = -qlE\varphi \tag{11.11.3}$$

egyenletre jutunk, amely a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete[2]. Innen a rezgő-forgómozgás körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{qlE}{\theta}}. \tag{11.11.4}$$

Ha felhasználjuk, hogy a tehetetlenségi nyomaték

$$\theta = 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2, \tag{11.11.5}$$

[2]Csillapítás nélkül mindig rezgőmozgás alakul ki! Harmonikus rezgő-forgómozgás kis szögelfordulások esetén valósul meg.

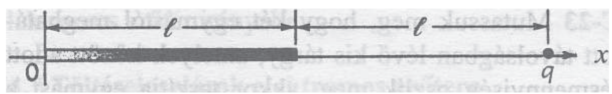
akkor

$$\omega = \sqrt{\frac{2qE}{ml}}. \tag{11.11.6}$$

A periódusidő

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{2qE}}. \tag{11.11.7}$$

11.12. Feladat: (24C-34) Az x tengely mentén – a $(0,l)$ intervallumban – elhelyezkedő l hosszúságú, vékony, szigetelő rúdon a $\lambda(x)$ töltéssűrűség helyfüggését a $\lambda(x) = Ax$ összefüggés írja le. A rúd végétől l távolságra – az $x = 2l$ pontban – egy pontszerű q töltés helyezkedik el az x tengelyen (59 ábra).



59. ábra.

(a) Mi az A állandó SI mértékrendszerbeli egysége?

(b) Mekkora a töltés helyén az elektromos térerősség?

Megoldás:

(a) Az A mértékegysége C/m^2.

(b) A x tengelyen az x pontban tekintsünk $\mathrm{d}q = \lambda(x)\mathrm{d}x$ töltést. Az ettől származó dE térerősség a $2l$ pontban

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(x)\mathrm{d}x}{(2l-x)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ax}{(2l-x)^2}\mathrm{d}x. \tag{11.12.1}$$

A teljes térerősség integrállal határozható meg:

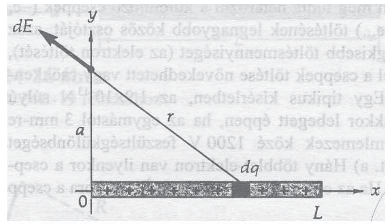
$$E = \int_0^l \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ax}{(2l-x)^2}\mathrm{d}x = \frac{A}{4\pi\varepsilon_0}(1-\ln 2). \tag{11.12.2}$$

11.13. Feladat: (HN 24C-35) Tekintsünk az $x = 0$ és $x = L$ pontok között, az x tengely mentén egy λ pozitív lineáris (hosszegységenkénti) töltéssűrűséget (60 ábra).

(a) Számítsuk ki az $\mathbf{E}$ elektromos térerősség vektor y komponensét az $x = 0$, $y = a$ pontban;

(b) Számítsuk ki az $\mathbf{E}$ elektromos térerősség vektor x komponensét ugyanebben a pontban.

Megoldás:



60. ábra.

(a) Az elektromos térerősség y komponensét a következőképpen számoljuk ki. Az origótól x távolságban lévő dx hossztól származó dE elektromos térerősség nagysága a $(0,a)$ pontban

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{x^2+a^2}. \tag{11.13.1}$$

Az a és r által közbezárt szöget θ -val jelölve, a $d\mathbf{E}$ térerősség vektor y komponense

$$\mathrm{d}E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{x^2+a^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{x^2+a^2}\frac{a}{(x^2+a^2)^{1/2}}. \tag{11.13.2}$$

A teljes E_y térerősség a

$$E_y = \int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\lambda \mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}} \tag{11.13.3}$$

integrállal számolható ki. A számolás végrehajtásához válasszuk a következő helyettesítést:

$$x = a\mathrm{tg}\theta, \tag{11.13.4}$$

amellyel

$$\mathrm{d}x = a\frac{1}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta. \tag{11.13.5}$$

Ezeket behelyettesítve, valamint a határokat illesztve a

$$E_y = \int_0^{\arcsin\frac{L}{(L^2+a^2)^{1/2}}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{a}\cos\theta \mathrm{d}\theta \tag{11.13.6}$$

integrálhoz jutunk. A számolást végrehajtva a térerősség y komponense

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda L}{a(L^2+a^2)^{1/2}}. \tag{11.13.7}$$

(b) A $d\mathbf{E}$ térerősség x komponense

$$\mathrm{d}E_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{x^2+a^2}\sin\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{x^2+a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}, \tag{11.13.8}$$

ahol a "-" előjel a koordinátarendszerbeli irányítást jelenti. Ezzel a teljes E_x komponens

$$E_x = -\int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\lambda \mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}} \tag{11.13.9}$$

integrállal fejezhető ki. A számolás az előbbinél egyszerűbben elvégezhető

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{\lambda}{(x^2+a^2)^{1/2}}\right]_0^\infty = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\lambda}{a}-\frac{\lambda}{(L^2+a^2)^{1/2}}\right). \tag{11.13.10}$$

Tehát a térerősség vektor a $(0,a)$ pontban

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\left(\frac{\lambda}{a}-\frac{\lambda}{(L^2+a^2)^{1/2}}\right), \frac{\lambda L}{a(L^2+a^2)^{1/2}}\right). \tag{11.13.11}$$

11.14. Feladat: (HN 24C-36) Egy R sugarú körgyűrűn $+Q$ teljes töltés, a gyűrű középpontjában egy m tömegű, $-q$ negatív töltés van. Ha a $-q$ töltést a gyűrű tengelye mentén kissé kimozdítjuk, majd elengedjük, akkor a gyűrű tengelye mentén rezgőmozgást végez (feltéve, hogy a tengelyvonalból való kimozdulást valamilyen módon megakadályozzuk). Adjuk meg a rezgés f (közelítő) frekvenciáját.

Megoldás: A kör szimmetria tengelye legyen az x tengely, a kör középpontja az origó. Először a tengelyen az x pontban pontban számoljuk ki a töltött körtől származó térerősséget. A kör kerületén vezessük be a $\lambda = \frac{Q}{2R\pi}$ töltéssűrűséget. A $\mathrm{d}\theta$ központi szögtől származó $\mathrm{d}E$ térerősség nagysága az x pontban

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R \mathrm{d}\theta}{x^2+R^2}. \tag{11.14.1}$$

A tengely irányú $\mathrm{d}E_x$ vetület

$$\mathrm{d}E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R \mathrm{d}\theta}{x^2+R^2}\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}. \tag{11.14.2}$$

A szög szerint integrálva megkapjuk a teljes E_x térerősséget, amely

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda R x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{(x^2+R^2)^{3/2}}. \tag{11.14.3}$$

A $-q$ töltésre ható erő

$$F_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQx}{(x^2+R^2)^{3/2}}. \tag{11.14.4}$$

Ha kis kitérésekre szorítkozunk, azaz $x << R$, úgy

$$(x^2+R^2)^{3/2} \sim R^3. \tag{11.14.5}$$

Ezzel

$$F_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R^3}x. \tag{11.14.6}$$

A $-q$ töltés mozgásegyenlete

$$m\ddot{x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R^3}x, \tag{11.14.7}$$

amely a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. A kialakuló rezgés frekvenciája:

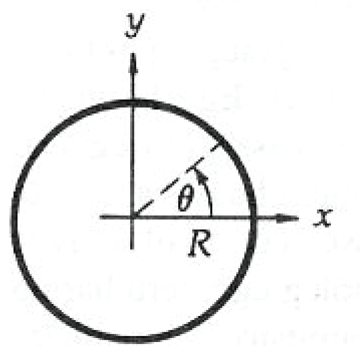
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 mR^3}}. \tag{11.14.8}$$

11.15. Feladat: (HN 24C-37) Egy vékony, nem vezető, R sugarú gyűrűn nem egyenletes a λ lineáris töltéssűrűség: $\lambda = \lambda_0 \sin\theta$, ahol a θ szög a 61. ábra szerint értelmezendő.

(a) Vázoljuk a gyűrű töltéseloszlását.

(b) Milyen az E elektromos térerősség iránya a gyűrű középpontjában?

(c) Mutassuk meg, hogy az elektromos térerősség nagysága a gyűrű középpontjában $\dfrac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}$.



61. ábra. 24-C37 feladat

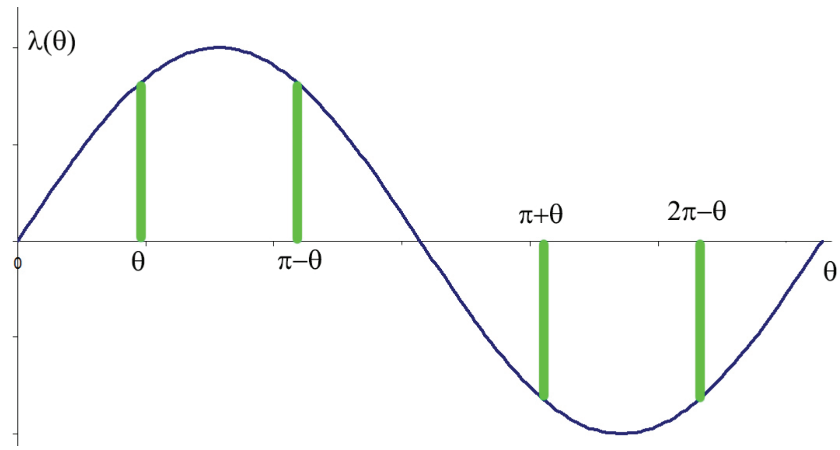
Megoldás:

(a) A töltéssűrűség a szög függvényében a 62. ábrán látható.

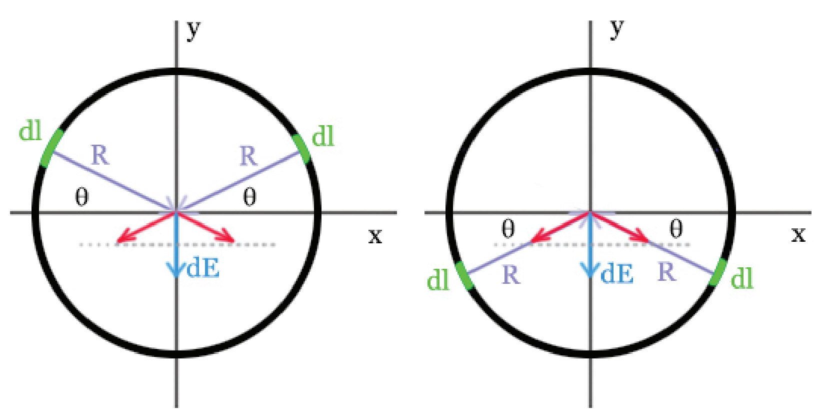
(b) Osszuk fel a kör kerületét infinitizemálisan kicsi dl szakaszokra. Egy tetszőleges θ szögnél elhelyezkedő szakasztól származó térerősség iránya vagy megegyezik a szakasztól a középpontig húzott vektor irányával ($0 \le \theta \le \pi$) vagy ellentétes vele ($0 \le -\theta \le \pi$). A teljes térerősség az egyes szakaszoktól származó térerősségek összege. A 63 ábrán látható, hogy az eredő térerősségben csak az egyes szakaszoktól származó térerősségek függőleges, -y irányú összetevője marad meg. Tehát az eredő térerősség a negatív y tengely irányába mutat.

(c) Ennek nagysága egy adott θ szög esetén

$$dE_y(\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(\theta)\,dl}{R^2}\sin\theta \tag{11.15.1}$$



62. ábra. Töltéssűrűség a szög függvényében. A zöld vonalak 4 olyan szöget jeleznek, ahol a töltéssűrűség abszolút értéke ugyanakkora



63. ábra. Különböző infinitezimális dl szakaszoktól származó térerősségek összegzése.

ahol $\mathrm{d}l = R\,\mathrm{d}\theta$. Szimmetria okok miatt $\mathrm{d}E_y(\theta)$ ugyanakkora és ugyanolyan irányú a θ, $\pi-\theta$, $\pi+\theta$ és $2\pi-\theta$ szögek esetén, ezért elegendő a $0\ldots\frac{\pi}{2}$ tartományra integrálni és az eredményt négyszerezni:

$$\begin{aligned}
E_y &= 4\int_0^{\pi/2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(\theta)R}{R^2}sin\,\theta\,d\theta = \\
&= 4\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0}{R}\int_0^{\pi/2}sin^2\theta\,d\theta = \\
&= 4\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0}{R}\int_0^{\pi/2}\frac{1-cos\,2\theta}{2}d\theta = \\
&= \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 R}\left[\theta-\frac{sin\,2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \\
&= \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{\pi}{2}-0-0+0\right]
\end{aligned} \tag{11.15.2}$$

ahol felhasználtuk a $sin^2\theta = \frac{1-cos2\theta}{2}$ összefüggést[3]. A végeredmény

$$E_y = \frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}. \tag{11.15.3}$$

11.16. Feladat: (HN 24C-39) Tekintsünk egy egyenletesen feltöltött R sugarú körgyűrűt, és annak tengelye mentén az elektromos teret. Mutassuk meg, hogy a térerősség maximuma $E_{x,max}$ a tengelyen, a gyűrű középpontjától $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ távolságban van. Vázoljuk E változását x függvényében (negatív és pozitív x értékekre).

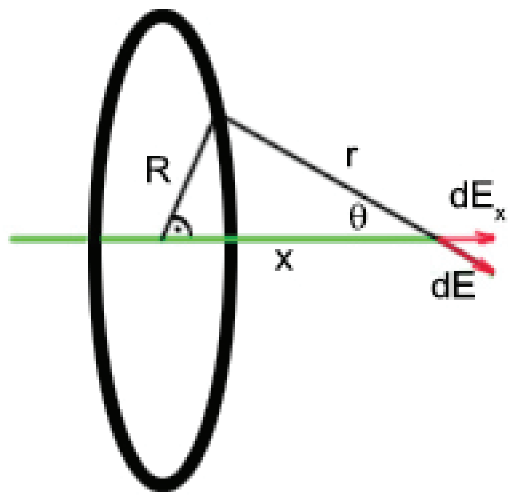
Megoldás: Bontsuk fel a körgyűrűt infinitezimálisan kis dl szakaszokra. A körgyűrű tengelyének minden pontja a körgyűrű összes pontjától - és így az összes szakasztól is - azonos távolságban van. A körgyűrű átellenes pontjaitól (szakaszaitól) származó térerősségek x tengelyre merőleges komponensei kiejtik egymást, ezért elegendő az E_x komponenseket összegezni. Egy dl szakasz térerőssége a 64 ábra szerint:

$$\begin{aligned}
dE_x &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,dl}{r^2}cos\,\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,dl}{R^2+x^2}\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} = \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\,\lambda\,dl}{(R^2+x^2)^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{11.16.1}$$

A teljes térerősség

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2R\pi\,x\,\lambda}{(R^2+x^2)^{3/2}}. \tag{11.16.2}$$

[3]Ezt levezethetjük a következő két egyenlőségből: $cos\,2\theta = cos^2\theta - \sin^2\theta$ és $cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$



64. ábra. Térerősség egy egyenletesen töltött körgyűrű tengelyén

Ennek akkor van maximuma, ha a deriváltja nulla. Ha a derivált nulla, akkor a konstansok nem számítanak, ezért azokat el is hagyhatjuk

$$\frac{dE_x}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}} = 0 \tag{11.16.3}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}} &= \frac{(R^2+x^2)^{3/2} - x\frac{3}{2}(R^2+x^2)^{1/2}\,2x}{(R^2+x^2)^3} \\ &= \frac{(R^2+x^2)-3x^2}{(R^2+x^2)^{5/2}} = 0 \end{aligned} \tag{11.16.4}$$

A nevező sosem lehet nulla, ezért átszorozhatunk vele

$$R^2 - 2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{R}{\sqrt{2}}. \tag{11.16.5}$$

Eszerint E_x szélsőértéke lehet az $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ helyen. Ez akkor valóban maximum ha a második derivált ezen a helyen negatív.

Gauss-törvény

11.17. Feladat: Egy R és egy $3R$ sugarú koncentrikus gömböt feltöltünk, a belsőt -Q, a külsőt 2Q töltéssel. Adja meg a térerősséget a hely (r) függvényében, és sematikusan ábrázolja is az egyes tartományokban:
(a) $0 < r < R$ esetén,
(b) $R < r < 3R$ esetén,
(c) $r > 3R$ esetén.

Megoldás:
(a) A $0 < r < R$ esetben a belső gömb belsejében nincs töltés, így a Gauss-törvény értelmében az elektromos térerősség nagysága

$$E(0 < r < R) = 0. \tag{11.17.1}$$

(b) A $R < r < 3R$ esetben a $-Q$ töltés hozza létre az elektromos térerősséget:

$$E4r^2\pi = \frac{-Q}{\varepsilon_0}, \tag{11.17.2}$$

azaz

$$E(R < r < 3R) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{11.17.3}$$

(c) Az $r > 3R$ esetben az r sugarú gömb $Q = 2Q - Q$ eredő töltést vesz körül. Így az elektromos térerősség:

$$E(3R < r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{11.17.4}$$

11.18. Feladat: (HN 25A-5) Két végtelen, szigetelő sík mindegyikén egyenletes σ töltéssűrűség van. A síkok egymással párhuzamosak. A szuperpozíciós elv használatával határozzuk meg a két sík közötti, illetve az azokon kívül lévő elektromos térerősséget.

Megoldás: A két sík egyike (1) legyen az origón átmenő y-z síkban, míg a másik (2) ezzel párhuzamos menjen át az x = +d ponton.

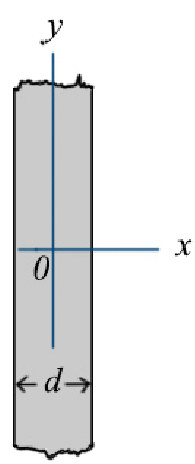
Az (1) síkon lévő töltések által keltett elektromos térerősség
$-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ a $(-\infty, 0)$ tartományban, míg
$+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ a $(0, +\infty)$ tartományban.

Az (2) síkon lévő töltések által keltett elektromos térerősség
$-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ a $(-\infty,+d)$ tartományban, míg
$+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ a $(+d,+\infty)$ tartományban.

A szuperpozíció elve miatt (a terek vektori módon adódnak össze) a kialakuló erőtér:
$-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ a $(-\infty,0)$ tartományban,
0 a $(0,d)$ tartományban, és
$+\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ a $(+d,+\infty)$ tartományban.

11.19. Feladat:

11.20. Feladat: (HN 25B-7) Egy d vastagságú lemezben egyenletes ρ térfogatmenti töltés van. A lemez a $\pm y$ és $\pm z$ irányokban gyakorlatilag végtelen (65. ábra); az x tengely zéruspontját úgy választottuk meg, hogy az a lemez d szélességének a felénél legyen. Számitsuk ki az elektromos térerősség nagyságát x pozitív értékeire az a) $0 < x < d/2$; b) $x > d/2$ esetekre.



65. ábra. A 25B-7 feladathoz

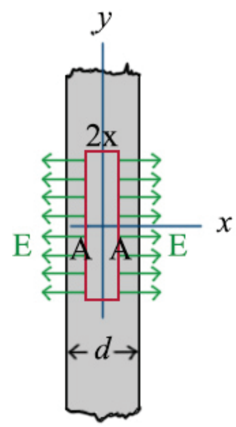
Megoldás: Az elektrosztatikus térerősség forrásai a töltések, ezért: 1) a szimmetria miatt a térerősségnek csak x komponense van, 2) pozitív töltéssűrűség esetén pozitív x-ekre pozitív, negatív x-ekre negatív irányú, emiatt 3) a lemez szélességének felező síkjában nulla.

A Gauss törvény szerint

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 E \text{ fluxusa egy zárt } A \text{ felületre} &= \text{Az összes töltés a felületen belüli térfogatban} \\ \int_A \varepsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{A} &= \int_{V(A)} \rho dV \end{aligned} \tag{11.20.1}$$

Vegyünk fel a lemez belsejében egy olyan, $2x$ magasságú hengerszerű testet, pl. egyenes hasábot, amelynek két egymással és a lemez felületével párhuzamos A nagyságú felülete van és amely magasságát a lemez középpárhuzamos síkja felezi (ld. 66 ábra.) Erre felírva a (11.20.1)

66. ábra. Térerősség egy egyenletesen töltött szigetelő lemezben



Gauss törvényt és felhasználva, hogy a lemez belsejében ρ állandó, illetve $\mathbf{E}$ a hasáb mindkét A felületére merőleges és kifelé mutat, továbbá, hogy a hasáb oldallapjaival/palástjával $\mathbf{E}$ párhuzamos, tehát azokra fluxusa 0:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 E\, 2A &= \rho \cdot A\, 2x \\ E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} x \qquad |x| &\leq \frac{d}{2} \end{aligned} \tag{11.20.2}$$

A lemezen kívül ($|x| > d/2$) a térerősség állandó[4] és értéke (11.20.2) maximuma, azaz

$$E = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \tag{11.20.3}$$

Vegyük észre, hogy a lemezen kívűl a tér pontosan ugyanolyan, mint egy végtelen σ töltéssűrűségű 2D lemez esetén, mivel $\sigma = \rho d$.

[4]Ez szimmetria okokból is következik.

11.21. Feladat: (HN 25A-10) Tekintsünk egy l0 cm sugarú üreges fémgömböt, amelyen +10 μC töltés van. Legyen a gömb középpontja a koordinátarendszer origójában. A gömb belsejében az $x = 5$ cm pontban legyen egy -3 μC nagyságú pontszerű töltés. Számítsuk ki az elektromos térerősséget a gömbön kívül, az x tengely mentén. Vázoljuk fel az erővonalakat a gömbön kívül és azon belül.

Megoldás: X

11.22. Feladat: (HN 25B-12) Egy nagyon hosszú, R sugarú fémrúdon σ egyenletes felületmenti töltéssűrűség van.
(a) Elhanyagolva a rúd végeinek hatását, számítsuk ki az **E** térerősséget a henger felszínétől R távolságban.
(b) Számítsuk ki azt a v sebességet, amellyel egy elektron a rúd körül R távolságban stacionárius körpályán mozogna.

Megoldás:
(a) Az, hogy a fémrúd nagyon hosszú azt jelenti, hogy (első közelítésben) végtelennek tekinthetjük. Szimmetria okokból a térerősség merőleges kell legyen az egyenletesen feltöltött henger felületére, ezért nagysága csak a távolságtól függ. A Gauss törvény használatához egy, a fémrúddal koaxiális henger alakú, r sugarú és l hosszúságú felületet vegyünk fel. Mivel a térerősség ennek a hengernek a palástjára mindenütt merőleges és állandó nagyságú a határoló körök síkjával pedig párhuzamos, erre a teljes zárt felületre vett fluxus megegyezik az r sugarú hengerpalástra vett fluxussal. Az ezen a felületen belüli összes töltés pedig a σ töltéssűrűség és a fémrúd l hosszúságú szakasza felületének szorzata. A Gauss törvény szerint tehát a térerősség a vezetőn kívül

$$\begin{aligned} \varepsilon_o 2 r \pi l E &= 2 R \pi l \sigma \\ E(r) &= \frac{R\sigma}{\varepsilon_o r} \end{aligned} \tag{11.22.1}$$

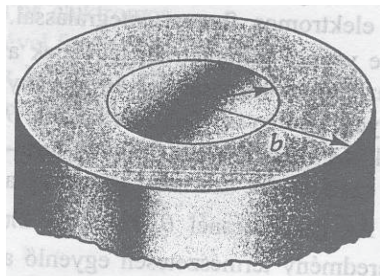
Innen a térerősség a fémrúdtól R távolságban ($r = 2R$)

$$E(R) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \tag{11.22.2}$$

(b) Ha egy elektron kering ezen az $r = 2R$ sugarú körpályán, akkor

$$-eE = -\frac{m_e v^2}{r} \quad \to \quad v = \sqrt{\frac{2eER}{m_e}} = \sqrt{\frac{e\sigma R}{\varepsilon_o m_e}}. \tag{11.22.3}$$

11.23. Feladat: (HN 25C-15) A 67 ábrán illusztrált a belső és b külső sugarú, végtelen hosszú cső fala pozitív töltésű. A ϱ töltéssűrűség nem egyenletes: a és b között a tengelytől mért távolsággal fordított arányban változik, azaz ha $a \leq r \leq b$, $\varrho = k/r$, ahol k egy SI egységekben megadott konstans.



67. ábra.

(a) Mi a k mértékegysége?

(b) Számítsuk ki az L hosszúságú csődarab Q töltését.

(c) Gauss törvényét felhasználva, határozzuk meg az E elektromos térerősséget az r pontban ($a < r < b$).

Megoldás:

(a) A k mértékegysége $\mathrm{C/m^2}$.

(b) A L hosszúságú csődarab Q töltése

$$Q = \int_a^b \varrho(r) 2r\pi L \mathrm{d}r = \int_a^b 2k\pi L \mathrm{d}r = 2k\pi L(b-a). \tag{11.23.1}$$

(c) Az E elektromos térerősséget az r pontban a

$$\oint \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \varrho \mathrm{d}V \tag{11.23.2}$$

összefüggés alkalmazásával (Gauss-törvény) határozzuk meg. Ennek megfelelően

$$E 2r\pi L = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_a^r \varrho(r) 2r\pi L \mathrm{d}r = \frac{1}{\varepsilon_0} 2k\pi L(r-a). \tag{11.23.3}$$

Innen a térerősség ($a < r < b$) tartományban

$$E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} k(1 - \frac{a}{r}). \tag{11.23.4}$$

Megjegyzés: További gyakorló feladat a csövön kívüli térerősség kiszámolása.

11.24. Feladat: (HN 25C-18) Egy R sugarú gömbben az $\mathbf{E}$ elektromos térerősség kifelé mutat, és értéke mindenütt konstans, E_o. Így, $E = E_o\hat{\mathbf{r}}$, ahol $\hat{\mathbf{r}}$ a kifelé mutató sugárírányú egységvektor.
(a) Felhasználva Gauss törvényét vezessük le hogy hogyan függ a $\rho(r)$ térfogatmenti töltessűrűség az r sugártól. (Útmutatás: az integrálszámítás alaptétele szerint[5] ha $g(x) = \int_o^x f(t)dt$, akkor $\dfrac{dg}{dx} = f(x)$)
(b) A gömb középpontjával kapcsolatban mílyen nehézség adódik?

Megoldás: Legyen a gömbben a töltéssűrűség ρ. Mivel $\mathbf{E}$ $\mathbf{r}$ irányú a tér gömszimmetrikus, ezért ρ csak a távolságtól függ, az iránytól nem. $\rho = \rho(r)$. A (11.20.1) Gauss törvény alkalmazásához vegyünk fel egy r sugarú köncentrikus A gömbfelületet. Erre a felületre $\mathbf{E}$ mindenhol merőleges, így a Gauss törvény szerint

$$\varepsilon_o E(r) 4\pi r^2 = \int\limits_{V(r')} \rho(r)\, dV' \tag{11.24.1}$$

A jobboldal integrál kiszámításához vegyük figyelembe, hogy $\rho = \rho(r)$ csak r nagyságától függ, ezért a térfogatra való integrálást elvégezhetjük úgy is, hogy térfogatelemeknek r' sugarú és $d\,r'$ vastagságú gömbhéjakat választunk[6]. Egy ilyen gömbhéj dV' térfogata $dV' = 4\pi r'^2 dr'$, töltése $dQ = \rho(r')\,dV' = 4\pi\rho r'^2 dr'$, azaz a Gauss törvény szerint:

$$\varepsilon_o E(r) 4\pi r^2 = 4\pi \int_0^r \rho(r')\, r'^2\, dr' \tag{11.24.2}$$

$$\varepsilon_o E_o r^2 = \int_0^r \rho(r')\, r'^2\, dr' \tag{11.24.3}$$

Az integrálszámítás alaptétele

$$\text{ha } g(r) = \int_0^r f(r')\, dr' \qquad \text{akkor} \tag{11.24.4}$$

$$f(r) = \frac{d\,g(r)}{d\,r} \tag{11.24.5}$$

[5] Az integrálási változó neve bármi lehet, amit nem keverhetünk össze az integrálás határával. Itt a t-t választottuk.

[6] Vagyis az A felület által határolt térfogatot felosztjuk koncentrikus, dr' vastag $dV'_G = dA' \cdot dr'$ $G(r')$ gömbhéjakra, amelyekben ρ jó közelítéssel állandó, tehát az integrál ezekre egyszerűen kiszámítható, majd az így kapott függvényt integráljuk 0 és R között:

$$\int\limits_{V(r)} \rho(r')\, dV' = \int_0^r \int\limits_{G(r')} \rho(r')\, dV'_G = \int_0^r \left(\rho(r') \int\limits_{G(r')} dA'_G \right) dr'$$

$$= \int_0^r \left(\rho(r') 4\pi r'^2 \right) dr' = 4\pi \int_0^r \rho(r')\, r'^2\, dr'$$

A mi esetünkben

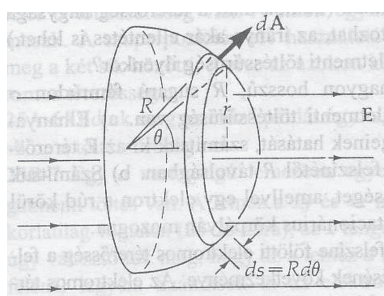
$$f(r) \equiv \rho(r)r^2 \tag{11.24.6}$$
$$g(r) \equiv \varepsilon_o E_o r^2 \tag{11.24.7}$$

Tehát

$$\rho(r)r^2 = 2\varepsilon_o E_o r$$
$$\rho(r) = 2\varepsilon_o E_o \frac{1}{r} \tag{11.24.8}$$

b) Látható, hogy ha $r \to 0$, akkor $\rho(r) \to \infty$.

11.25. Feladat: (HN 25C-19) Ahogyan a 68 ábrán látható, az **E** térerősségű homogén elektromos térbe úgy helyezünk egy R sugarú sík lappal zárt félgömböt, hogy az erővonalak e sík lapon merőlegesen haladjanak át. Számítsuk ki a görbült felületen a Φ elektromos fluxust integrálással. *Útmutatás:* Figyelembe véve a szimmetriát, legyenek a d**A** elemi felületek az ábrán illusztrált olyan vékony gyűrűk (sávok), amelyek mentén az **E** és d**A** közötti θ szög állandó. A sávok dA területe a $2\pi(Rsin\theta)$ hosszuk és a $R\mathrm{d}\theta$ szélességük szorzata. Ennélfogva $dA = 2\pi R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta$. Az összegzésnél θ, zérus és $\pi/2$ között változik. Az eredmény természetesen egyenlő a sík lapon átmenő fluxussal, de ellentétes előjelű azaz $-ER^2\pi$. A teljes zárt felületen a fluxus zérus.



68. ábra.

Megoldás: Az elektromos tér fluxusának kiszámolásához a félgömbre szükségünk van a dA felületelemre:

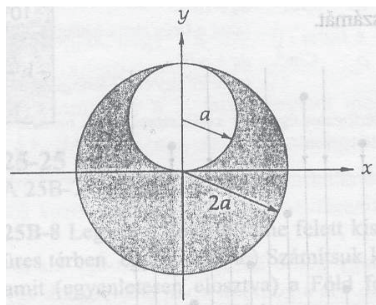
$$dA = 2\pi R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta. \tag{11.25.1}$$

Figyelembe kell venni, hogy a dA iránya θ szöget zár be az E elektromos térrel, így a skaláris szorzás miatt megjelenik egy $\cos\theta$-val való szorzás. Az elektromos tér fluxusa a félgömbre:

$$\Phi_E = E\int_0^{\pi/2} 2\pi R^2 \sin\theta\cos\theta \mathrm{d}\theta = ER^2\pi, \tag{11.25.2}$$

ahogy annak lennie is kell.

11.26. Feladat: (HN 25C-20) Szigetelő anyagból készült $2a$ sugarú gömbben az egyenletes térfogati töltéssűrűség ϱ. (Tételezzük fel, hogy a gömb anyagának nincs hatása a térerősség nagyságára.) A 69. ábrán látható helyen a gömbben a sugarú gömb alakú üreget képezünk. Mutassuk meg, hogy az üregben az elektromos térerősség homogén és nagysága, $E_x = 0$ és $E_y = \varrho a/(3\varepsilon_0)$.



69. ábra.

Megoldás: Tekintsünk az üregen (kis gömbön) belül egy P pontot, az egyszerűség kedvéért úgy, hogy helyvektorának x koordinátája pozitív legyen, valamint y koordinátája nagyobb legyen mint a, és a forgásszimmetria miatt z=0. Jelölje ekkor a nagyobb gömb középpontjából a P pontba húzott sugarat r, míg a kisebb gömb középpontjából r'. Ha r és r' a vízszintessel φ és α szöget zárnak be, akkor fenn állnak, hogy

$$r' \cos\alpha = r\cos\varphi, \tag{11.26.1}$$

illetve

$$r' \sin\alpha + a = r\sin\varphi. \tag{11.26.2}$$

E két összefüggésre szükségünk lesz. Az elektromos teret úgy számoljuk ki, hogy vesszük a $2a$ sugarú homogén gömb terét és ebből levonjuk az a sugarú üregét. A $2a$ sugarú – üreg nélküli – gömbben a térerősség a Gauss-törvény alapján

$$E4r^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho\frac{4r^3\pi}{3}, \tag{11.26.3}$$

amelyből a térerősség nagysága

$$E = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}r. \tag{11.26.4}$$

A térerősség vektor komponensei

$$\mathbf{E} = \left(\frac{\varrho}{3\varepsilon_0} r \cos\varphi, \frac{\varrho}{3\varepsilon_0} r \sin\varphi \right). \tag{11.26.5}$$

Az üreg miatt levonandó E' térerősség hasonlóképpen számítandó ki, csak figyelembe kell venni, hogy r' α szöget zár be a vízszintessel. Így az egyenletek:

$$E' 4r'^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho \frac{4r'^3\pi}{3}, \tag{11.26.6}$$

amelyből a térerősség nagysága

$$E' = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0} r'. \tag{11.26.7}$$

A térerősség vektor komponensei

$$\mathbf{E}' = \left(\frac{\varrho}{3\varepsilon_0} r' \cos\alpha, \frac{\varrho}{3\varepsilon_0} r' \sin\alpha \right). \tag{11.26.8}$$

Figyelembe véve a (11.26.1) és (11.26.2) összefüggéseket az üregen belüli térerősség vektor

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{E} - \mathbf{E}' = \left(0, \frac{\varrho a}{3\varepsilon_0} \right), \tag{11.26.9}$$

amit bizonyítanunk kellett.

Az elektromos potenciál

11.27. Feladat: (HN 26A-l) Két egymással párhuzamos fémlemezt 12 voltos elem pólusaihoz csatlakoztatunk.

(a) Egy nyugalmi helyzetű elektront a negatív lemez mellett elengedünk. Mekkora sebessége lesz a pozitív lemezbe történő becsapódásakor?

(b) Számítsuk ki az elektron maximális kinetikus energiáját, és adjuk meg eV és joule egységekben is.

(c) Ha a lemezek távolsága 4 mm, mennyi ideig repült az elektron a lemezek között?

(d) Ha a lemezek távolsága ettől különböző lenne, változna-e az (a) és (b) kérdésekre adandó válasz?

Megoldás: X

11.28. Feladat: Tekintsünk három – A, B és C jelű – egymással párhuzamos végtelen, páronként d távolságban lévő síklemezt. Az A-n legyen 2σ, a B-n $-\sigma$ és a C-n 4σ felületi töltéssűrűség. Mekkora a lemezek közötti potenciálkülönbség?

Megoldás: A lemezek sorrendje A, B és C. A felületek normális mutasson az x tengely irányába. Az egyes lemezek által létrehozott elektromos térerősségek az irányokkal. Az A lemeztől: Mindkét lemez közötti tartományban

$$\frac{2\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{11.28.1}$$

A B lemeztől: Az A-B tartományban

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \tag{11.28.2}$$

a B-C tartományban

$$\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{11.28.3}$$

A C lemeztől mindkét lemez közötti tartományban:

$$\frac{-4\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{-2\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{11.28.4}$$

A térerősség eredője az A-B lemezek között

$$E_{A-B} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}, \tag{11.28.5}$$

míg a B-C lemez között

$$E_{B-C} = \frac{-3\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{11.28.6}$$

A lemezek között munka:

$$W_{A-B} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} d \tag{11.28.7}$$

és

$$W_{B-C} = \frac{-3\sigma}{2\varepsilon_0} d. \tag{11.28.8}$$

Az A lemez legyen $U_A = 0$ potenciálú, így hozzá képest a B

$$U_B = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} d \tag{11.28.9}$$

potenciálú, A-hoz képest C

$$U_C = \frac{4\sigma}{2\varepsilon_0} d = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0} d. \tag{11.28.10}$$

11.29. Feladat: Két proton egymástól d távolságban nyugalmi helyzetből indul. Mekkora lesz a protonok sebessége egymáshoz képest, ha már $3d$ távolságban repülnek? ($d = 100$ nm, a proton töltése $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, a proton tömeg $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, $K = 9 \cdot 10^9$ Nm^2/C^2).,

Megoldás: A tömegközépponthoz képest mindkét proton v sebességgel repül. Az elektromos tér által végzett munka segítségével

$$K\frac{e^2}{d} - K\frac{e^2}{3d} = 2\frac{1}{2}mv^2. \tag{11.29.1}$$

Innen a protonok sebessége

$$v = \sqrt{\frac{2Ke^2}{3md}}. \tag{11.29.2}$$

Az egymáshoz viszonyított sebesség $v_{rel} = 2v$.

11.30. Feladat: (HN 26B-5) Egy a oldalhosszúságú, egyenlő oldalú háromszög minden egyes csúcsán $+q$ töltés van. Számítsuk ki a háromszög középpontja és az oldalak felezőpontja közötti ΔV feszültséget. A középpontban, vagy az oldalak közepén nagyobb a potenciál?

Megoldás: A csúcsok középponttól vett távolsága $a\frac{\sqrt{3}}{3}$, amellyel a középpontbeli U_c potenciál a végtelenhez képest:

$$U_c = 3\sqrt{3}K\frac{q}{a}. \tag{11.30.1}$$

Az oldalközép U_{ok} potenciálja – figyelembe véve, hogy a közelebbi két csúcstól $a/2$ távolságra van, a távolabbi harmadiktól $a\frac{\sqrt{3}}{2}$-re :

$$U_{ok} = (4 + \frac{2\sqrt{3}}{3})K\frac{q}{a}. \tag{11.30.2}$$

Mivel a $3\sqrt{3} > 4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$, így a háromszög középpontjában nagyobb a potenciál.

11.31. Feladat: Helyezzünk el egy, az origón átmenő (y-z) síkban egy egyenletes σ töltéssűrűségű szigetelő lemezt, valamint egy ugyancsak origón átmenő (x-z) síkú $-\sigma$ töltéssűrűségű ugyancsak szigetelő lemezt.

(a) Mekkora az elektromos térerősség a $0 < x$ és $0 < y$ koordinátájú pontokban?

(b) Legyen az elektromos potenciál értéke az origóban zérus. Mekkora az elektromos potenciál az (a) kérdésbeli (x,y) pontokban?

Megoldás: A σ töltéssűrűségű szigetelő lemezt vegyük közre két – az egyszerűség kedvéért –

azonos távolságú síkkal, majd metsszünk ki mindhárom síkon A felületeket úgy, hogy egymással fedésben legyenek. Ezt követően a Gauss-törvényt alkalmazzuk a térerősség nagyságának kiszámolására:

$$2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}, \tag{11.31.1}$$

azaz

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{11.31.2}$$

Így a σ töltéssűrűségtől származó térerősség vekor

$$\mathbf{E}_1 = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, 0, 0\right). \tag{11.31.3}$$

Hasonló meggondolásokkal a $-\sigma$ töltéssűrűségtől származó térerősség vektor

$$\mathbf{E}_2 = \left(0, -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, 0\right). \tag{11.31.4}$$

Az eredő térerősség

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y) = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, 0\right). \tag{11.31.5}$$

Látható, hogy ez egy helytől független homogén erőtér. Egyúttal megállapíthatjuk, hogy konzervatív is. Mivel tetszőleges úton integrálhatunk, így a potenciál

$$U(x,y) = -\int_0^x E_x dx - \int_0^y E_y dx = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}y = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-x+y). \tag{11.31.6}$$

11.32. Feladat: (HN 26B-9) A tér egy tartományában a *volt* egységekben kifejezett V potencíált a

$$V = (3\left[\frac{V}{m^2}\right])x^2 + (0,2\left[\frac{V}{m}\right])y$$

függvény adja meg, ahol x és y méterekben megadott távolságok. Számítsuk ki az $x = 10$ cm, $y = 15$ cm koordínátájú helyen levő elektronra ható erő nagyságát és irányát.

Megoldás: A potenciál és a térerősség közötti kapcsolat

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -gradV(\mathbf{r}) \qquad (11.32.1)\\ E_x = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x},\ E_y &= -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y},\ E_z = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}, \end{aligned}$$

Esetünkben $V(x,y,x) = V(x,y) = Ax^2 + By$

$$\begin{aligned} E_x &= -2Ax, \qquad E_y = -B, \qquad E_z = 0\\ F_x &= 2eAx, \qquad F_y = eB\\ F &= e\sqrt{E_x^2+E_y^2+E_z^2} = e\sqrt{4A^2x^2+B^2} \end{aligned} \tag{11.32.2}$$

Az erő iránya az x tengellyel α szöget zár be, ahol $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{B}{2Ax}$, $B = 0,2\left[\frac{V}{m}\right]$, $A = 3\left[\frac{V}{m/2}\right]$ és $2Ax = 0.6\left[\frac{V}{m}\right]$ Behelyettesítve a számértékeket

$$\begin{aligned} F_x &= 6\cdot 0,1\cdot 1,6\cdot 10^{-19} = 9,6\cdot 10^{-20}\mathrm{N} \quad F_y = 0,2\cdot 1,6\cdot 10^{-19} = 3,2\cdot 10^{-20}\mathrm{N} \\ F &= \sqrt{9,6^2+3,2^2}\cdot 10^{-20} = 1,0119\cdot 10^{-19}\mathrm{N} \\ \mathrm{tg}\,\alpha &= 0,2/0,6 = 0.33 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 18.4^o. \end{aligned} \tag{11.32.3}$$

11.33. Feladat: (HN 26B-12) Két egyforma kicsiny fémgömb töltese q_1 illetve q_2. Egymást 1 m távolságból $9\times 10^{-3}N$ erővel vonzzák. A gömböket összeérintjuk, majd újból egymástól 1 m távolságra helyezzük el. Ekkor úgy találjuk, hogy $2\times 10^{-3}N$ erővel taszítják egymást. Számítsuk ki a q_1 és q_2 töltéseket.

Megoldás: Összeérintés előtt a gömböknek különböző előjelű töltése volt ezért vonzották egymást. Összeérintés után a töltéseik kiegyenlítődtek és mindkettő töltése azonos előjelűvé és $q = \frac{q_1+q_2}{2}$ nagyságúvá vált, ezért taszítják egymást[7] Az egyenleteket felírva

$$\begin{aligned} |F_1| &= K\frac{|q_1 q_2|}{r^2} = 9\,10^9\, q_1 q_2 = 9\,10^{-3}\ \mathrm{N} \\ |F_2| &= K\frac{q^2}{r^2} = 9\,10^9\, q^2 = 2\,10^{-3}\ \mathrm{N} \end{aligned} \tag{11.33.1}$$

innen, mivel vagy q_1, vagy q_2 negativ kell legyen

$$\begin{aligned} q_1\cdot q_2 = -9\cdot 10^{-3}/9\cdot 10^9 &= -10^{-12}\, C^2 \\ \left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)^2 = 2\cdot 10^{-3}/9\cdot 10^9 &= 2,22\cdot 10^{-13}\, C^2; \end{aligned} \tag{11.33.2}$$

$$\begin{aligned} \frac{q_1+q_2}{2} &= \pm\sqrt{2,22\cdot 10^{-13}}\ \mathrm{C} \\ q_1+q_2 = \pm 2\cdot\sqrt{2,22\cdot 10^{-13}} &= \pm 9,4234\cdot 10^{-7}\, C \\ q_2 &= -10^{-12}\frac{1}{q_1} \\ q_1 - 10^{-12}\frac{1}{q_1} &= \pm 9,4234\cdot 10^{-7}\, C \\ q_1^2 \mp 9,4234\cdot 10^{-7}\cdot q_1 - 10^{-12} &= 0. \end{aligned} \tag{11.33.3}$$

A két egyenletet felírva

$$q_1^2 - 9,4234\cdot 10^{-7}\cdot q_1 - 10^{-12} = 0 \tag{11.33.4}$$

$$q_1^2 + 9,4234\cdot 10^{-7}\cdot q_1 - 10^{-12} = 0. \tag{11.33.5}$$

[7] Ez arra utal, hogy kezdetben nem volt azonos nagyságú a töltésük.

Jelöljük a négyzetgyök előjelét felső indexben

$$q^{+}_{1,\pm} = \frac{9,4234\cdot10^{-7}\pm\sqrt{3,5555\cdot10^{-12}+4\cdot10^{-12}}}{2} \tag{11.33.6}$$

$$= \frac{9,4234\cdot10^{-7}\pm2,7487\cdot10^{-6}}{2} \tag{11.33.7}$$

$$q^{-}_{1,\pm} = \frac{-9,4234\cdot10^{-7}\pm\sqrt{3,5555\cdot10^{-12}+4\cdot10^{-12}}}{2} \tag{11.33.8}$$

$$= \frac{-9,4234\cdot10^{-7}\pm2,7487\cdot10^{-6}}{2} \tag{11.33.9}$$

$$q^{+}_{1} = \begin{cases}1,5767\cdot10^{-6}\,\mathrm{C}\\ -6.3425\cdot10^{-7}\,\mathrm{C}\end{cases} \tag{11.33.10}$$

$$q^{+}_{2} = \begin{cases}-6.3425\cdot10^{-7}\,\mathrm{C}\\ 1,5767\cdot10^{-6}\,\mathrm{C}\end{cases} \tag{11.33.11}$$

$$q^{-}_{1} = \begin{cases}-1,5767\cdot10^{-6}\,\mathrm{C}\\ 6.3425\cdot10^{-7}\,\mathrm{C}\end{cases} \tag{11.33.12}$$

$$q^{-}_{2} = \begin{cases}6.3425\cdot10^{-7}\,\mathrm{C}\\ -1,5767\cdot10^{-6}\,\mathrm{C}.\end{cases} \tag{11.33.13}$$

Innen látható, hogy elég lett volna a négyzetgyökvonásnál a pozitív előjelet használni amivel megkaptuk volna a az első két megoldást, majd utána felcserélni az előjeleket a második két megoldáshoz. Visszahelyettesítve pl. ez első két megoldást és elhagyva a felső indexet

$$K\frac{q_1\cdot q_2}{r^2} = 9\cdot10^9\cdot\frac{1,5767\cdot10^{-6}\cdot0,63425\cdot10^{-6}}{1} = 9\cdot10^{-3}\,\mathrm{N}, \tag{11.33.14}$$

$$K\frac{\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)^2}{r^2} = 9\cdot10^9\cdot\frac{\left(1,5767\cdot10^{-6}+0,63425\cdot10^{-6}\right)^2}{4} = 2.00\cdot10^{-3}\,\mathrm{N}. \tag{11.33.15}$$

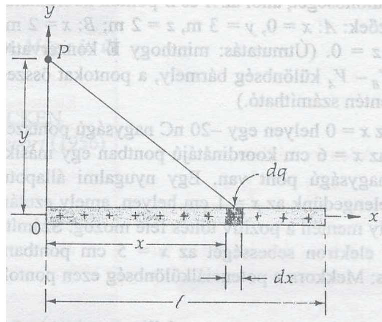
11.34. Feladat: (HN 26C-15) Egy l hosszúságú, vékony szigetelő rúdon egyenletesen elosztva Q töltés van. Számítsuk ki a Velektromos potenciált a rúd végétől y távolságban, a 70 ábrán vázolt helyen lévő P pontban.

Megoldás: Az ábrán látható dq töltés

$$\mathrm{d}q = \frac{Q}{l}\mathrm{d}x. \tag{11.34.1}$$

Az ettől származó potenciál

$$\mathrm{d}U_p = \frac{KQ}{l}\frac{\mathrm{d}x}{r}, \tag{11.34.2}$$



70. ábra.

ahol $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. A teljes hosszhoz tartozó potenciál

$$U_p = \int_0^l \frac{KQ}{l} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{KQ}{l} \ln \left[x + \sqrt{x^2 + y^2} \right]_0^l = \frac{KQ}{l} \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + y^2}}{y}. \tag{11.34.3}$$

11.35. Feladat: (HN 26C-17) Egy R sugarú gömb belsejében a töltéssűrűség a középponttól való r távolsággal arányos, azaz $\varrho(r) = Ar$, ha $(0 < r < R)$, ahol A egy állandó.

(a) Mi A SI egysége?

(b) Mekkora a gömb teljes Q töltése A-val és R-rel kifejezve?

(c) Gauss törvényét felhasználva számítsuk ki a gömb belsejében és kívül, a középponttól r távolságra az E térerősséget.

(d) Számítsuk ki a V potenciált r függvényében a gömbön belül is, kívül is. (Legyen $V = 0$ a végtelenben.)

Megoldás:

(a) Az A paraméter mértékegysége C/m^4.

(b) A gömb teljes töltése:

$$Q = \int_0^R \varrho(r) 4r^2 \pi \mathrm{d}r = \int_0^R A4r^3 \pi \mathrm{d}r = AR^4 \pi. \tag{11.35.1}$$

(c) A térerősség kiszámolásához

$$\oint \mathbf{E} \mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{11.35.2}$$

a Gauss-törvényt használjuk. A gömbön belüli térrészre alkalmazva

$$E4r^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r \varrho(r) 4r^2 \pi \mathrm{d}r = \frac{1}{\varepsilon_0} Ar^4 \pi, \tag{11.35.3}$$

amelyből
$$E = \frac{A}{4\varepsilon_0} r^2 \quad (0 < r < R). \tag{11.35.4}$$
A gömbön kívüli térrészre az
$$E 4r^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0} A R^4 \pi \tag{11.35.5}$$
írható, amelyből
$$E = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (R < r). \tag{11.35.6}$$

(d) Az elektromos potenciál meghatározása a gömbön kívül ($R < r$) az
$$U(r) - U(\infty) = -\int_{\infty}^{r} \frac{AR^4}{4\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \mathrm{d}r = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} \tag{11.35.7}$$
integrál kiszámolásával történik. Innen a végtelenbeli zérus potenciálhoz viszonyítva az r-beli potenciál:
$$U(r) = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0} \frac{1}{r} \quad (R < r). \tag{11.35.8}$$
A potenciál a gömb felszínén ugyancsak a végtelenbeli zérus potenciálhoz viszonyítva:
$$U(r) = \frac{AR^3}{4\varepsilon_0} \quad (r = R). \tag{11.35.9}$$
A felületről a gömb belseje felé haladva a potenciálkülönbség
$$U(r) - U(R) = -\int_{\infty}^{R} \frac{A}{4\varepsilon_0} r^2 \mathrm{d}r = -\frac{A}{12\varepsilon_0} \left[r^3\right]_R^r = -\frac{A}{12\varepsilon_0} r^3 + \frac{A}{12\varepsilon_0} R^3. \tag{11.35.10}$$
Így a gömb belsejében lévő r pontban a potenciál a végtelenhez viszonyítva:
$$U(r) = \frac{AR^3}{4\varepsilon_0} - \frac{A}{12\varepsilon_0} r^3 + \frac{A}{12\varepsilon_0} R^3 = -\frac{A}{12\varepsilon_0} r^3 + \frac{A}{3\varepsilon_0} R^3 \quad (0 < r < R). \tag{11.35.11}$$

11.36. Feladat: (HN 26C-18) Számoljuk ki az előző feladatot $\varrho = Ar^2$ töltéseloszlást feltételezve.

Megoldás:

(a) Az A paraméter mértékegysége C/m^5.

(b) A gömb teljes töltése:
$$Q = \int_0^R \varrho(r) 4r^2\pi \mathrm{d}r = \int_0^R A 4r^4 \pi \mathrm{d}r = \frac{4}{5} A R^5 \pi. \tag{11.36.1}$$

(c) A térerősség kiszámolásához

$$\oint \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{11.36.2}$$

a Gauss-törvényt használjuk. A gömbön belüli térrészre alkalmazva

$$E4r^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \varrho(r)4r^2\pi\mathrm{d}r = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{5}Ar^5\pi, \tag{11.36.3}$$

amelyből

$$E = \frac{A}{5\varepsilon_0}r^3 \quad (0 < r < R). \tag{11.36.4}$$

A gömbön kívüli térrészre az

$$E4r^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{5}AR^5\pi \tag{11.36.5}$$

írható, amelyből

$$E = \frac{AR^5}{5\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \quad (R < r). \tag{11.36.6}$$

(d) Az elektromos potenciál meghatározása a gömbön kívül ($R < r$) az

$$U(r) - U(\infty) = -\int_\infty^r \frac{AR^5}{5\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{AR^5}{5\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_\infty^r \tag{11.36.7}$$

integrál kiszámolásával történik. Innen a végtelenbeli zérus potenciálhoz viszonyítva az r-beli potenciál:

$$U(r) = \frac{AR^5}{5\varepsilon_0}\frac{1}{r} \quad (R < r). \tag{11.36.8}$$

A potenciál a gömb felszínén ugyancsak a végtelenbeli zérus potenciálhoz viszonyítva:

$$U(r) = \frac{AR^4}{5\varepsilon_0} \quad (r = R). \tag{11.36.9}$$

A felületről a gömb belseje felé haladva a potenciálkülönbség

$$U(r) - U(R) = -\int_\infty^R \frac{A}{5\varepsilon_0}r^3\mathrm{d}r = -\frac{A}{20\varepsilon_0}\left[r^4\right]_R^r = -\frac{A}{20\varepsilon_0}r^4 + \frac{A}{20\varepsilon_0}R^4. \tag{11.36.10}$$

Így a gömb belsejében lévő r pontban a potenciál a végtelenhez viszonyítva:

$$U(r) = \frac{AR^4}{5\varepsilon_0} - \frac{A}{20\varepsilon_0}r^4 + \frac{A}{20\varepsilon_0}R^4 = -\frac{A}{20\varepsilon_0}r^4 + \frac{A}{4\varepsilon_0}R^4 \quad (0 < r < R). \tag{11.36.11}$$

Kondenzátorok

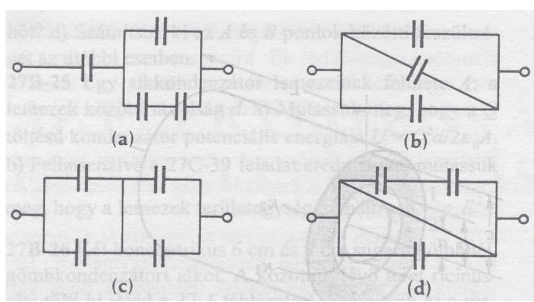
11.37. Feladat: (HN 27A-l) Két, egymástól 1 mm-re lévő, 1 cm^2 felületű, egymással párhuzamos lemez által alkotott kondenzátor kapacitása kb. 1 pF. Számítsuk ki a kapacitás pontos értékét.

Megoldás: Adatok: $d = 1$ mm; $A = 1\ \text{cm}^2$. A kondenzátor kapacitása:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 8,85 \cdot 10^{-13}\text{F}, \tag{11.37.1}$$

amely hozzávetőlegesen 1 pF.

11.38. Feladat: (HN 27A-3) Határozzuk meg a 71 ábra áramköreinek eredő kapacitását. Minden kondenzátor C kapacitású.



71. ábra.

Megoldás: Az eredő kapacitás különböző esetekben:

(a)

$$C_e = \frac{3}{5}C; \tag{11.38.1}$$

(b)

$$C_e = 3C; \tag{11.38.2}$$

(c)

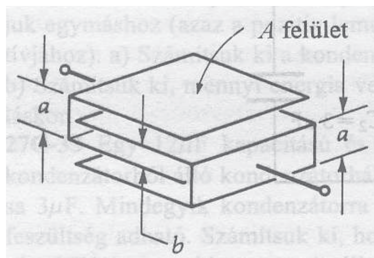
$$C_e = C; \tag{11.38.3}$$

(d)

$$C_e = 0, \tag{11.38.4}$$

mert a kondenzátorok rövidre vannak zárva.

11.39. Feladat: (HN 27B-7) Számítsuk ki a 72 ábrán látható kondenzátor kapacitását. Hanyagoljuk el a lemezek szélein az erőtér inhomogenitásának a hatását. Indokoljuk meg a számítás egyes lépéseit.



72. ábra.

Megoldás: Jelölések: Jelöljük a lemezeket felülről 1, 2, 3 és 4 számokkal, az 1-2 közötti térrészt (1)-gyel, a 2-3 közötti térrészt (2)-vel és a 3-4 közötti térrészt (3)-mal. Az ábra szerint az (1) térrész $a-b$ szélességű, a (2) b szélességű, a (3) $a-b$ szélességű. Mindegyik lemez A felületű, a végek hatásától eltekintünk. Legyen az 1 és 3 lemez zérus, a 2 és 4 lemez U_0 potenciálon. Ekkor a térerősség vektor nagysága és iránya az

(1) térrészben

$$E_{(1)} = \frac{U_0}{a-b} \tag{11.39.1}$$

és a 2 lemeztől az 1 felé mutat;

(2) térrészben

$$E_{(2)} = \frac{U_0}{b} \tag{11.39.2}$$

és a 2 lemeztől az 3 felé mutat;

(3) térrészben

$$E_{(3)} = \frac{U_0}{a-b} \tag{11.39.3}$$

és a 4 lemeztől az 3 felé mutat.

Gauss törvényét alkalmazva az egyes lemezeken lévő töltések:

$$Q_1 = -\varepsilon_0 A \frac{U_0}{a-b}; \tag{11.39.4}$$

$$Q_2 = \varepsilon_0 A \frac{U_0}{a-b} + \varepsilon_0 A \frac{U_0}{b}; \tag{11.39.5}$$

$$Q_3 = -\varepsilon_0 A \frac{U_0}{a-b} - \varepsilon_0 A \frac{U_0}{b}; \tag{11.39.6}$$

$$Q_4 = \varepsilon_0 A \frac{U_0}{a-b}. \tag{11.39.7}$$

Természetes teljesül, hogy

$$|Q_1 + Q_3| = Q_2 + Q_4. \tag{11.39.8}$$

A kondenzátor töltése tehát

$$Q = Q_2 + Q_4 = \varepsilon_0 A \left(2\frac{U_0}{a-b} + \frac{U_0}{b} \right), \tag{11.39.9}$$

amellyel az eredő kapacitás

$$C_e = \frac{Q}{U_0} = \varepsilon_0 A \left(\frac{2}{a-b} + \frac{1}{b} \right) = \varepsilon_0 A \frac{a+b}{(a-b)b}. \tag{11.39.10}$$

11.40. Feladat: (HN 27B-8) A 2 μF és 3 μF kapacitású kondenzátorra egyenként U_{max} maximális feszültség adható. Ha e két kondenzátort sorba kapcsoljuk, a két végpont közötti maximális feszültség 800 V. Mekkora V_{max}?

Megoldás: Adatok: $C_1 = 2\mu$F, $C_2 = 3\mu$F, $U = 800$ V.
A két kondenzátor eredő kapacitása

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 1,2\mu\text{F}. \tag{11.40.1}$$

A kondenzátorokon lévő töltés egyaránt

$$Q = C_e U = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U = 9,6 \cdot 10^{-4}\text{C}. \tag{11.40.2}$$

A kondenzátorokra eső feszültség

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U = 480\text{V} \tag{11.40.3}$$

és

$$U_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U = 320\text{V}. \tag{11.40.4}$$

Így értelemszerűen $U_{max} = 480$ V.

11.41. Feladat: (HN 27B-9) A gömbkondenzátor kapacitása

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a},$$

ahol a és b a belső, illetve külső gömb sugara. Ha mind a, mind b nagyon naggyá válik, (de különbségük továbbra is kicsiny) egy kis tartományban a felületek párhuzamos síkokkal közelíthetők. Mutassuk meg, hogy a fenti összefüggés a síkkondenzátor kapacitását megadó képletté egyszerűsödik.

Megoldás: A $b-a$ különbség a két fegyverzet közötti d távolság. Ha $a \sim b$, akkor a $4\pi ab = 4\pi a^2$ a fegyverzet A felülete. Ezek behelyettesítésével:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}, \tag{11.41.1}$$

amely a síkkondenzátor kapacitása.

11.42. Feladat: (HN 27A-12) Becsüljük meg azt a legnagyobb potenciált, amelyre egy 10 cm átmérőjű fémgömböt fel lehet tölteni, anélkül, hogy a térerősség értéke meghaladná a környező száraz levegő dielektromos átütési szilárdságát.

Megoldás: A feltöltött R sugarú fémgömb felületén a térerősség és a potenciál pontosan akkora, mintha a teljes töltése a középpontjában lenne:

$$E(R) = K\frac{Q}{R^2} \tag{11.42.1}$$

$$|\Phi(R)| = K\frac{Q}{R} = E(R)\cdot R \tag{11.42.2}$$

A száraz levegő dielektromos átütési szilárdsága $E_0 = 3\,10^6\frac{V}{m}$. Innen $|\Phi(R)| = E_0 \cdot R = 3\cdot 10^6 \cdot 0,05 = 1,5\cdot 10^5 V$.

11.43. Feladat: (HN 27B-20) Egy 0,1 μF kapacitású síkkondenzátor lemezei 0,75 m^2 területűek, a szigetelő réteg dielektromos állandója 2,5. A kondenzátort 600 V-os feszültségre töltjük fel.

(a) Számítsuk ki a lemezek töltését.

(b) Számítsuk ki a szigetelő réteg felületén indukált töltéssűrűséget.

(c) Számítsuk ki a szigetelő rétegben az elektromos térerősséget.

Megoldás: Adatok: C = 0,1 μF; A = 0,75 m^2; ε_r = 2,5; U = 600 V.

(a) A kondenzátor töltése

$$Q = CU = 6 \cdot 10^{-5} C. \tag{11.43.1}$$

(b) A σ szabad töltések sűrűsége:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = 8 \cdot 10^{-5} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}, \tag{11.43.2}$$

a σ töltéssűrűség által létrehozott elektromos térerősség

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{11.43.3}$$

Jelölje σ' az indukált töltéssűrűséget. Az ezáltal keletkezett – az őt létrehozó térrel ellentétes – elektromos tér

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \tag{11.43.4}$$

E kettő összege adja a dielektrikumbeli teret, amellyel a

$$E + E' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = E_r \tag{11.43.5}$$

egyenlet írható fel. Ebből az indukált töltéssűrűség

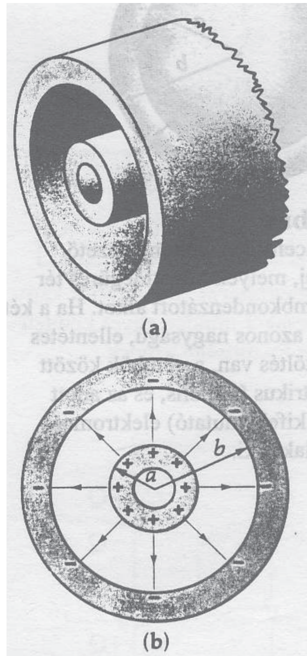
$$\sigma' = \frac{1 - \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \sigma = -4,8 \cdot 10^{-5} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}. \tag{11.43.6}$$

(c) A lemezek közötti térerősség

$$E_r = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = 3,614 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}. \tag{11.43.7}$$

11.44. Feladat: (HN 27-3p) A hengerkondenzátor két koaxiális vezető hengerből áll (ld. 73 ábra). A belső hengeres vezető külső sugara a, a külső vezető belső sugara b. Tételezzük fel, hogy a vezetők L hossza nagyon nagy a sugarakhoz képest , igy a végeken történő szórt tér hatása elhanyagolható. Legyen a belső hengeres vezetőn $+\sigma$ töltéssűrűség. A Gauss-törvény segítségével határozzuk meg a

(a) a kondenzátoron belüli elektromos térerősséget, ha vákuum tölti ki a teret, illetve ha ϵ_r dielektromos állandójú szigetelő,



73. ábra. A 27-3p feladathoz

(b) a kondenzátor fegyverzetei közötti elektromos feszültséget,

(c) a kondenzátor kapacitását.

Megoldás:

(a) Tekintsünk az a és b sugarak közötti r sugarú koncentrikus kört és ezen számoljuk ki a térerősséget. A Gauss-törvény alakja vákuum esetén

$$\int_A \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_A \sigma \mathrm{d}A, \tag{11.44.1}$$

amely a mostani feladatban az

$$E(r)\cdot 2r\pi L = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma\cdot 2a\pi L \tag{11.44.2}$$

alakban írható. A jobboldalon lévő

$$Q = \sigma\cdot 2a\pi L \tag{11.44.3}$$

a hengerkondenzátoron lévő elektromos töltés. Behelyettesítés után elektromos térerősség

$$E(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{a}{r}. \tag{11.44.4}$$

Az ϵ_r dielektromos állandójú szigetelő ϵ_r arányban csökkenti az eredő elektromos teret (elektromos feszültséget). Ebben az esetben a szigetelőbeli térerősség

$$E(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{a}{r}. \tag{11.44.5}$$

(b) Az a és b hengeres vezetők közötti elektromos potenciálkülönbség rögtön a szigetelővel kitöltött tartományra

$$U = U_a - U_b = -\int_b^a E(r)\mathrm{d}r = -\int_b^a \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{a}{r}\mathrm{d}r = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r} a \ln\frac{b}{a}. \tag{11.44.6}$$

(c) A hengerkondenzátor kapacitását a

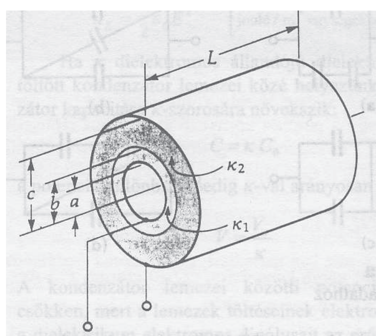
$$Q = CU \tag{11.44.7}$$

összefüggés segítségével számolhatjuak ki. Behelyettesítés után a

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\frac{b}{a}} \tag{11.44.8}$$

kapacitás adódik.

11.45. Feladat: (HN 27B-21) Tekintsünk egy hengeres kondenzátort, melyben a belső és külső hengerek között két réteg szigetelő anyag van (lásd 74 ábra). Elhanyagolva a szélek hatását, határozzuk meg, hogy C kapacitása miként függ az ábrán megadott paraméterektől.



74. ábra.

Megoldás: A megoldás során használjuk fel az előző feladatban kapott eredményeket. (Az 74 ábra adatait jelöljük át: $\kappa_1 = \varepsilon_1$ ill. $\kappa_2 = \varepsilon_2$.) Az elektromos tér eredője az egyes tartományokban

$$E_1(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{a}{r} \quad (a < r < b), \tag{11.45.1}$$

illetve

$$E_2(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_2}\frac{a}{r} \quad (b < r < c). \tag{11.45.2}$$

A potenciálkülönbség a fegyverzetek között

$$
\begin{aligned}
U &= U_a - U_c = (U_a - U_b) + (U_b - U_c) = -\int_b^a E_1(r)\mathrm{d}r - \int_c^b E_2(r)\mathrm{d}r \\
&= -\int_b^a \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{a}{r}\mathrm{d}r - \int_c^b \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_2}\frac{a}{r}\mathrm{d}r = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_1} a \ln\frac{b}{a} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_2} a \ln\frac{c}{b}.
\end{aligned} \tag{11.45.3}
$$

A hengerkondenzátoron lévő elektromos töltés

$$Q = \sigma \cdot 2a\pi L. \tag{11.45.4}$$

A kifejezéseket összevetve kondenzátor kapacitására

$$C = 2\pi\varepsilon_0 L \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 \ln\frac{c}{b} + \varepsilon_2 \ln\frac{b}{a}}. \tag{11.45.5}$$

11.46. Feladat: (HN 27B-27) A lemezei között polisztirol réteget tartalmazó síkkondenzátor kapacitása 10 nF. A kondenzátort egy 100 V-os feszültségű telephez kapcsoljuk, és a szigetelő réteget eltávolítjuk a lemezek közül. Számítsuk ki

(a) valamelyik lemezen a töltésváltozást;

(b) a tárolt energia változását,

(c) a szigetelő réteg eltávolításához szükséges munkát.

Megoldás: Adatok: C = 10 nF; U = 100 V. Táblázatból kikeresve a polisztirol dielektromos állandója $\varepsilon_r = 2,5$.

(a) A kondenzátor kezdeti töltése.

$$Q = CU = 10^{-6}\mathrm{C} = 1000\mathrm{nC}. \tag{11.46.1}$$

A polisztirol réteg kihúzása után a kondenzátor kapacitása 1/2,5-öd részére csökken:

$$Q' = \frac{1}{\varepsilon_r} Q = 400\mathrm{nC}, \tag{11.46.2}$$

így töltés lesz a kondenzátoron. A változás:

$$\Delta Q = Q' - Q = \left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right) CU = -600\mathrm{nC}. \tag{11.46.3}$$

(b) A tárolt energia változása:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{C}{\varepsilon_r}U^2}_{E_2} - \underbrace{\frac{1}{2}CU^2}_{E_1} = -3 \cdot 10^{-5}\mathrm{J}. \tag{11.46.4}$$

(c) A polisztirol lap kihúzása során egyrészt van egy W végzett munka és a töltésváltozással kapcsolatos munkája a telepnek. Ez utóbbi:

$$\Delta Q \cdot U = \left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right) CU = 2\Delta E. \tag{11.46.5}$$

A felírható egyenlet

$$E_1 + W + \Delta Q \cdot U = E_2 \tag{11.46.6}$$

alakú, amelyből a végzett munka

$$W = E_2 - E_1 - \Delta Q \cdot U = -\Delta E. \tag{11.46.7}$$

Így a végzett munka

$$W = 3 \cdot 10^{-5}\mathrm{J}. \tag{11.46.8}$$

11.47. Feladat: Egy síkkondenzátor lemezeinek területe 200 cm^2, a lemezek távolsága 0,1 cm. A fegyverzetek között üveglemez van ($\varepsilon_r = 5$), amely teljesen betölti a kondenzátor lemezei közötti térrészt.

(a) Számítsa ki a kondenzátor kapacitását!

(b) Hogyan változik meg a kondenzátor energiája, ha az üveget eltávolítjuk? A kondenzátor az egész idő alatt egy 300 V elektromotoros erejű telephez van kapcsolva.

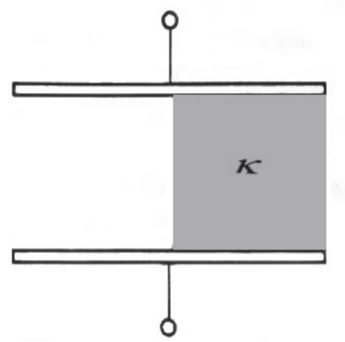
(c) Mekkora az elektromos erőtér energia sűrűsége az üveg eltávolítása után?

Megoldás: X

11.48. Feladat: (HN 27C-33) Egy 12 μF kapacitású és két 2 μF kapacitású kondenzátorból álló kondenzátorhálózat eredő kapacitása 3 μF. Mindegyik kondenzátorra maximálisan 200 V feszültség adható. Számítsuk ki, hogy az adott kondenzátorhálózatra mekkora maximális feszültség kapcsolható.

Megoldás: Elsőként azt kell kitalálni, hogy miként jöhet ki a 3 μF eredő kapacitás egy 12 μF kapacitású és két 2 μF kapacitású kondenzátorból. Némi próbálgatás után belátható, hogy a két 2 μF-os egymással párhuzamosan, míg a 12 μF-os ezekkel sorba van kötve. Felhasználjuk, hogy Q töltés van mind a 12 μF-os kondenzátoron, mind az egymással párhuzamosan kapcsolt két 2 μF-os kondenzátoron összesen. Ha a 2 μF-os kondenzátorokra a maximális 200 V feszültséget kapcsolunk, akkor a 12 μF-os kondenzátoron 66,7 V feszültség esik. Így a kondenzátorrendszerre 266,7 V kapcsolható.

11.49. Feladat: (HN 27C-36) Egy κ dielektromos állandójú szigetelő réteg egy sikkondenzátor lemezei közötti teret a 75 ábrán vázolt módon csak félig tölt ki. Adjuk meg, hogy a teljes energia hányadrésze tárolódik a szigetelő rétegben.



75. ábra. 27C-36 feladathoz

Megoldás: Két megoldást is adunk:
1) Ez az elrendezés két párhuzamosan kapcsolt kondenzátornak felel meg. Ezek kapacitásai:

$$C_1 = \varepsilon_o \frac{A}{2d}, \qquad C_2 = \kappa\varepsilon_o \frac{A}{2d},$$

ahol A a kondenzátor lemezeinek felülete és d a lemezek távolsága. Így

$$C_2 = \kappa C_1$$

A kondenzátorok párhuzamosan vannak kapcsolva ezért a rajtuk levő feszültség ugyanakkora, a bennük tárolt energia pedig

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} C_1 U^2, \text{ ill. } \quad \frac{1}{2} C_2 U^2$$

Az összenergia e két energia összege, ezért a szigetelőt tartalmazó kondenzátor energiájának (a szigetelőben tárolt energiának) γ aránya az összenergiához képest:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\frac{1}{2} C_2 U^2}{\frac{1}{2} C_1 U^2 + \frac{1}{2} C_2 U^2} \\ &= \frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\kappa}{1+\kappa} \end{aligned} \tag{11.49.1}$$

2) Az elektrosztatikus térben tárolt energia sűrűségét az

$$w = \frac{1}{2} \kappa \varepsilon_0 E^2$$

képlet adja meg. Az ábra szerinti elrendezésben az elektródák ekvipotenciális felületek, a töltéssűrűség konstans. A térerősség merőleges a kondenzátor lemezeire és párhuzamos a betolt szigetelő hasáb oldalával, ezért az anyagban és a vákuumban ugyanakkora. Tehát az egyes tartományokban az energiasűrűség:

$$w_v = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

$$w_a = \frac{1}{2}\kappa\varepsilon_0 E^2 = \kappa w_v$$

Mivel a kondenzátor lemezek közötti tér fele van anyaggal kitöltve a tárolt energiák aránya megegyezik az energiasűrűségek arányával, tehát

$$\gamma = \frac{w_a}{w_a + w_v} = \frac{\kappa}{1+\kappa}. \tag{11.49.2}$$

11.50. Feladat: (HN 27C-41) Töltsük fel a sorba kapcsolt a C_1 és C_2 kondenzátort. Ezután a két kondenzátort először a felöltő feszültségforrástól, majd egymástól elválasztva, ellentétes polaritással párhuzamosan kapcsoljuk. Mutassuk meg, hogy a párhuzamos kapcsolás következtében a kezdetben tárolt energia $(C_1 - C_2)^2/(C_1 + C_2)^2$ hányada "veszett" el.

Megoldás: X

12. Feladatok az elektromos áram tanából

Az elektromos áram

12.1. Feladat: (HN 28B-3) Egy 2 mm-es átmérőjű ezüst huzalon 2 óra 15 perc alatt 420 C töltés halad át.

(a) Atomonként egy vezetési elektront feltételezve, számítsuk ki a szabad töltések számát az ezüstben (l/m^3 egységekben);

(b) Mekkora a huzalban folyó áram erőssége?

(c) Számítsuk ki az elektronok átlagos vándorlási sebességét.

Megoldás: Adatok: $d = 2$ mm; $r = 1$ mm; $t = 2$ óra 15 perc $= 8100$ s; $Q = 420$ C. Táblázatból: sűrűsége $\varrho = 10500$ kg/m^3. Az ezüst atomtömege 108, azaz $M = 108$ g/mol; az Avogadro szám $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ 1/mol.

(a) A térfogategységben található ezüst atomok száma

$$n = \frac{\varrho}{M} N_A = 5,83 \cdot 10^{28}\, l/m^3, \tag{12.1.1}$$

amely megegyezik az elektronok számával.
(b) Az áramerősség

$$I = \frac{Q}{t} = 0,052\,\mathrm{A}. \tag{12.1.2}$$

(c) Az j áramsűrűség

$$j = \frac{I}{A} = nev, \tag{12.1.3}$$

ahol $A = r^2\pi$ a keresztmetszet, v a keresett vándorlási sebesség. Innen

$$v = \frac{I}{Ane} = 1,77 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m/s}. \tag{12.1.4}$$

12.2. Feladat: (HN 28B-4) Van de Graaf generátor mozgó szíja 30 cm széles és 20 m/s sebességgel halad. A szállított töltések a szíj egyik oldalán egyenletesen oszlanak el, a nagy potenciálú gömbre szállított töltések áramerőssége 0,15 μA. Számítsuk ki a szíj felületi töltéssűrűségét.

Megoldás: Adatok: $L = 30$ cm; $v = 20$ m/s; $I = 0,15$ μA.
A szíj Δt idő alatt

$$\Delta Q = \sigma L v \Delta t \tag{12.2.1}$$

töltést szállít. Az áram

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \sigma L v, \tag{12.2.2}$$

amelyből a felületi töltéssűrűség

$$\sigma = \frac{I}{Lv} = 2,5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C/m^2}. \tag{12.2.3}$$

12.3. Feladat: (HN 28A-15) Televíziók képcsövében az elektronágyúból származó elektronok 25 kV-os potenciálkülönbség hatására a képernyő felé gyorsulnak.
(a) Hány watt teljesitmény disszipálódik a képernyőn, ha az elektronnyaláb átlagos áramerőssége 0,21 mA?
(b) Hány elektron csapódik a képernyőbe másodpercenként?

Megoldás:
(a) A disszipált teljesítmény: $P = U \cdot I = 5,25$ W.
(b) Az áram az időegység alatt átáramló töltéseket jelenti

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \tag{12.3.1}$$

Itt $\Delta Q = Ne$, ahol N a elektronok száma. Így

$$N = \frac{I\Delta t}{e} = 1,3 \cdot 10^{15}. \tag{12.3.2}$$

12.4. Feladat: (HN 28A-16) Egy 12 V-os autóakkumulátor kapacitása 120 Ah (itt a kapacitás azt jelenti, hogy az akkumulátor kezdeti töltése 120 amper·óra). Parkolás során két 80 W-os fényszóróizzó bekapcsolva marad. Számítsuk ki, hogy hány óra alatt csökken az akkumulátor töltése az eredetinek a felére azt feltételezve, hogy a kapocsfeszültség ezalatt nem változik.

Megoldás: Az izzók összteljesítménye $P = 160$ W. Az $U = 12$ V-os telepfeszültségen

$$I = \frac{P}{U} \tag{12.4.1}$$

áram folyik rajtuk keresztül. A $Q' = 60$ amper·óra töltést

$$t = \frac{Q'}{I} = \frac{Q'U}{P} = 4,5\,\text{óra} \tag{12.4.2}$$

alatt éri el.

12.5. Feladat: (HN 28A-29) Zivatarfelhők környezetében az elektromos térerősség 100 V/m, ugyanitt $6 \cdot 10^{-13}$ A/m^2 az áramsűrűség. Mekkora az légkör elektromos vezetőképessége ebben a tartományban?

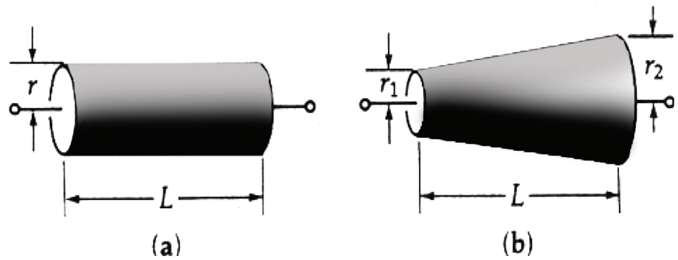
Megoldás: A differenciális Ohm-törvényből

$$\sigma = \frac{j}{E} = 6 \cdot 10^{-15}\,\text{S/m}. \tag{12.5.1}$$

Megjegyzés: S: siemens. $1/\Omega = \text{S}$;

$$[\sigma] = \frac{1}{[\varrho]} = \frac{1}{\Omega \cdot m} = \frac{S}{m}.$$

12.6. Feladat: (HN 28C-41) A 76 ábrán két, azonos anyagból gyártott ellenállás látható. A véglapokat vezető réteggel vonták be. Tételezzük fel, hogy az ellenállások belsejében az áramsűrűség bármely, a tengelyre merőleges síkmetszet mentén állandó nagyságú. Mutassuk meg, bogy a két ellenállás azonos nagyságú, ha a henger r sugara egyenlő a csonkakúp r_1, és r_2 sugarának mértani közepével, azaz $r' = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$. Útmutatás: a R ellenállás nagyságának kiszámításakor számítsuk ki a tengelyszimmetrikus, dx vastagságú, $r(x) = r_1 + (r_2 - r_1) \cdot x/L$ sugarú vékony



76. ábra. 28C-41 feladathoz

körlemezek átellenes lapjai közötti dR ellenállást. A teljes ellenállást ezen elemi ellenállások segítségével, integrálassal kaphatjuk meg.)

Megoldás: Osszuk fel a csonkakúp alakú ellenállást párhuzamos dx vastagságú rétegekre! Egy ilyen, az r_1 sugarú, a fedőlaptól x távolságra levő korong sugara, felülete, illetve ellenállása

$$\begin{aligned} r(x) &= r_1 + \frac{(r_2 - r_1)\cdot x}{L} \\ A(x) &= r^2(x)\cdot\pi \\ dR(x) &= \rho\cdot\frac{dx}{A(x)} = \rho\cdot\frac{dx}{r^2(x)\pi} \end{aligned} \tag{12.6.1}$$

A teljes ellenállás ezért

$$R = \rho\cdot\int_0^L \frac{dx}{r^2(x)} \tag{12.6.2}$$

A legegyszerűbben akkor járunk el, ha az x szerinti integrálásról áttérünk az $r(x)$ szerinti integrálásra. (12.6.1) alapján

$$dr = d\left(r_1 + \frac{(r_2 - r_1)\cdot x}{L}\right) = \frac{r_2 - r_1}{L}\cdot dx \Rightarrow dx = \frac{L}{r_2 - r_1}dr$$

ezért

$$\begin{aligned} R &= \tfrac{\rho\cdot L}{\pi\,(r_2-r_1)}\int_{r_1}^{r_2}\tfrac{dr}{r^2} = \\ &= \tfrac{\rho\cdot L}{\pi\,(r_2-r_1)}\left[-\tfrac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} \\ &= \tfrac{\rho\cdot L}{\pi\,(r_2-r_1)}\left(\tfrac{1}{r_1}-\tfrac{1}{r_2}\right) = \\ &= \tfrac{\rho\cdot L}{\pi\,(r_2-r_1)}\left(\tfrac{r_2-r_1}{r_1\cdot r_2}\right) = \\ &= \tfrac{\rho\cdot L}{\pi\,r_2\cdot r_1} \end{aligned} \tag{12.6.3}$$

Ez viszont valóban megegyezik egy olyan egyenes henger alakú rúd ellenállásával, amelynek sugara $r' = \sqrt{r_1\cdot r_2}$.

12.7. Feladat: (HN 28C-45) Két vékony, koncentrikus gömbhéj vezető sugara a, ill. b ($a < b$). A köztük lévő teret σ fajlagos vezetőképességű anyag tölti ki. Számítsuk ki a két gömbhéj közötti ellenállást.

Megoldás: Tekintsünk egy r sugarú, dr falvastagságú gömbhéjat. Ennek ellenállása az

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{A} \tag{12.7.1}$$

összefüggés alapján

$$\mathrm{d}R = \frac{1}{\sigma}\frac{\mathrm{d}r}{4r^2\pi}. \tag{12.7.2}$$

A teljes ellenállás

$$R = \int_a^b \frac{1}{\sigma}\frac{\mathrm{d}r}{4r^2\pi} = \frac{1}{4\pi\sigma}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b = \frac{b-a}{4\pi\sigma ab}. \tag{12.7.3}$$

12.8. Feladat: (HN 28C-46) Az előző feladatban leírt két gömbhéj közé U feszültséget kapcsolunk úgy, hogy a belső g6mbhéjpotenciálja legyen nagyobb. Határozzuk meg, hogyan függ a J áramsűrűség a középponttól r távolságban a megadott paraméterektől.

Megoldás: Az áramerősség

$$I = \frac{U}{R} = \frac{4\pi\sigma abU}{b-a}. \tag{12.8.1}$$

Az áramsűrűség – figyelembe véve, hogy a gömbszimmetria miatt az áramsűrűség a r távolságban minden irányban ugyanannyi –

$$J = \frac{I}{A} = \frac{4\pi\sigma abU}{4r^2\pi(b-a)} = \frac{\sigma abU}{(b-a)}\frac{1}{r^2}. \tag{12.8.2}$$

RC-körök

12.9. Feladat: (HN 29A-34) Egy C kapacitású kondenzátort R ellenálláson keresztül sütünk ki. Mennyi idő alatt csökken a kondenzátor töltése a kezdeti érték 1/e^2-ed részére?

Megoldás: A Kirchhoff-törvény szerint

$$0 = \frac{Q}{C} + RI = \frac{Q}{C} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \tag{12.9.1}$$

amely egyenletet átrendezve

$$\int_{Q_0}^{Q(t)} \frac{\mathrm{d}Q}{Q} = \int_0^t -\frac{1}{RC}\mathrm{d}t. \tag{12.9.2}$$

Ennek megoldása

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{12.9.3}$$

A kondenzátor töltése $1/e^2$-ed részére csökken, így

$$e^{-\frac{t}{RC}} = e^{-2}, \tag{12.9.4}$$

amelyből

$$t = 2RC. \tag{12.9.5}$$

12.10. Feladat: (HN 29A-36) Kondenzátor adott feszültséggel való feltöltésekor a töltés maximumhoz tart. Számítsuk ki, hogy a $\tau = RC$ időállandó hányszorosa az az időtartam, ami ahhoz szükséges, hogy a töltés 2 %-nyira megközelítse a maximumot?

Megoldás: A Kirchhoff-törvény szerint

$$\varepsilon = \frac{Q}{C} + RI = \frac{Q}{C} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \tag{12.10.1}$$

amelyből a változók szeparálásával a

$$\frac{\mathrm{d}Q}{Q - \varepsilon C} = -\frac{\mathrm{d}t}{RC} \tag{12.10.2}$$

egyenlet adódik. Az integrálást kijelölve

$$\int_0^{Q(t)} \frac{\mathrm{d}Q}{Q - \varepsilon C} = \int_0^t -\frac{\mathrm{d}t}{RC} \tag{12.10.3}$$

írható. Az integrálást elvégezve megkapjuk, hogy a

$$Q(t) = \varepsilon C(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = Q_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \tag{12.10.4}$$

függvénnyel változik a kondenzátor töltése, ahol $Q_0 = \varepsilon C$ a teljesen feltöltött kondenzátor töltése. A feladat szerint

$$0,98 = (1 - e^{-\frac{t}{RC}}), \tag{12.10.5}$$

amelyből a kérdéses idő

$$t = -RC\ln 0,02 = 3,912RC. \tag{12.10.6}$$

12.11. Feladat: (HN 29A-37) Egy 10 μF-os kondenzátort R ellenálláson keresztül l0 V-os teleppel töltünk. A kondenzátor lemezei közötti potenciálkülönbség a töltés megkezdése után 3 másodperccel éri el a 4 V értéket. Számítsuk ki R nagyságát.

Megoldás: Adatok: $C = 10\ \mu$F; $\varepsilon = 10$ V; $t = 3$ s; $U_C = 4$ V.
A Kirchhoff-törvény szerint

$$\varepsilon = \frac{Q}{C} + RI = \frac{Q}{C} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \tag{12.11.1}$$

amelyből a változók szeparálásával és az integrációs határok megadásával a

$$\int_0^{Q(t)} \frac{\mathrm{d}Q}{Q-\varepsilon C} = \int_0^t -\frac{\mathrm{d}t}{RC} \tag{12.11.2}$$

egyenlet adódik. Az integrálást elvégezve megkapjuk, hogy a

$$Q(t) = \varepsilon C(1-e^{-\frac{t}{RC}}) \tag{12.11.3}$$

függvénnyel változik a kondenzátor töltése. A kondenzátor feszültsége

$$U(t) = \varepsilon(1-e^{-\frac{t}{RC}}) = U_C. \tag{12.11.4}$$

A megadott adatokkal az R ellenállás értéke

$$R = 587\,\mathrm{k}\Omega. \tag{12.11.5}$$

12.12. Feladat: (HN 29B-42) Egy 3 μF-os kondenzátort 200 V feszültségre töltünk fel, majd elválasztjuk a töltőáramkörtől. A dielektrikum nem tökéletes szigetelő, ezért a két lemez közötti potenciálkülönbség 5 perc alatt 185 V-ra csökken. Számítsuk ki a dielektrikum ellenállását.

Megoldás: Adatok: $C = 3\mu$F; $U_0 = 200$ V; $t = 5$ perc $= 300$ s; $U = 185$ V.
Kezdetben a kondenzátoron lévő töltés: $Q_0 = CU_0$. A Kirchhoff-törvény szerint

$$0 = \frac{Q}{C} + RI = \frac{Q}{C} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \tag{12.12.1}$$

amely egyenletet szeparálva és az integrációs határokat megadva kapjuk:

$$\int_{Q_0}^{Q(t)} \frac{\mathrm{d}Q}{Q} = \int_0^t -\frac{1}{RC}\mathrm{d}t. \tag{12.12.2}$$

Ebből a kondenzátoron lévő töltés időfüggése

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (12.12.3)$$

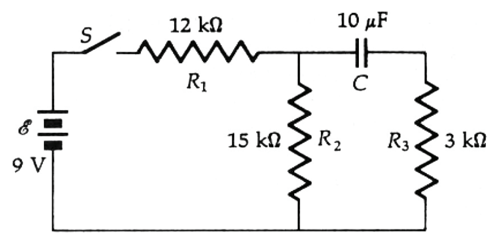
a rajta lévő feszültség

$$U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} = U. \quad (12.12.4)$$

Innen a dielektrikum ellenállása

$$R = -\frac{t}{C \ln \frac{U}{U_0}} = 1,28 \cdot 10^9\,\Omega. \quad (12.12.5)$$

12.13. Feladat: (HN 29C-62) Tekintsük a 12 áramkört. Kezdetben a kondenzátoron nincs



töltés; a $t = 0$ időponthan az S kapcsolót zárjuk.

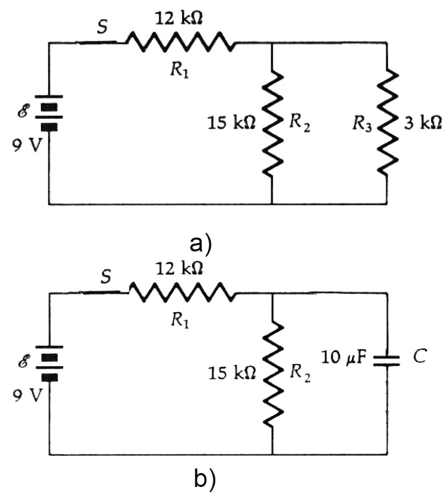
(a) Készítsünk táblázatot, amely az egyes áramköri elemeken folyó áramerősségek (i_{12}, i_{15} és i_c) és a rajtuk létrejövô feszültségesések (u_{12}, u_{15}, és u_c) kezdeti (közvetlenül t = 0 utáni) értékét foglalja össze.

(b) Készítsünk egy másik táblázatot is, a fenti mennyiségek stacionárius értékeivel.

Megoldás:

(a) Mielőtt a kapcsolót zárnánk a kondenzátoron nem volt feszültség. A kapcsoló zárásakor a kondenzátor feszültsége nem változhat meg ugrásszerűen, ezért továbbra is 0 marad, vagyis olyan a helyzet, mintha a kondenzátor helyett egy rövidzár lenne. Ezért a kapcsolás ebben a pillanatban ekvivalens a 77 a) ábráján láthatóval.

Ennek az áramkörnek az ellenállása $R(t = 0) = R_1 + \dfrac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 14,5\,k\Omega$ Az R_1 ellenálláson



77. ábra. Helyettesítő kapcsolások a 77 feladathoz

átfolyik a teljes áram, ezért

$$i_{12} \equiv i_{R_1} = \frac{U}{R(t=0)} = \frac{9V}{14.5k\Omega} = 6,207 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{A} \tag{12.13.1}$$

$$u_{12} \equiv u_{R_1} = R_1 \cdot i_{R_1} = 7.448\,\mathrm{V} \tag{12.13.2}$$

$$u_{15} \equiv u_{R_2} = u_{R_3} = U - u_{R_1} = 1.552\,\mathrm{V} \tag{12.13.3}$$

$$i_{15} \equiv i_{R_2} = \frac{u_{R_2}}{R_2} = 1.035 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{A} \tag{12.13.4}$$

$$u_c = 0\,\mathrm{V} \tag{12.13.5}$$

$$i_c = i_{R_3} = \frac{u_{R_3}}{R_3} = \frac{u_{R_2}}{R_3} = 5.172 \cdot 10^{-4}\mathrm{A} \tag{12.13.6}$$

(b) Stacionárius állapotban a kondenzátort tartalmazó ágban nem folyik áram és a kondenzátor teljesen fel van töltve, ezért a kondenzátor feszültsége megegyezik az R_2 ellenálláson eső feszültséggel (tehát az R_3 ellenállás sarkai között nincs potenciálkülönbség.) Ld. 77 b) ábra. A körben folyó áram viszont lecsökken, mert az eredő ellenállás most $R_{stac} = R_1 + R_2 = 27\,k\Omega$ és csak ezen a két ellenálláson folyik át áram.

$$i_{12} \equiv i_{R_1} = \frac{U}{R(stac)} = \frac{U}{R_1+R_2} = 3,333 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{A} \tag{12.13.7}$$

$$u_{12} \equiv u_{R_1} = R_1 \cdot i_{R_1} = 4\,\mathrm{V} \tag{12.13.8}$$

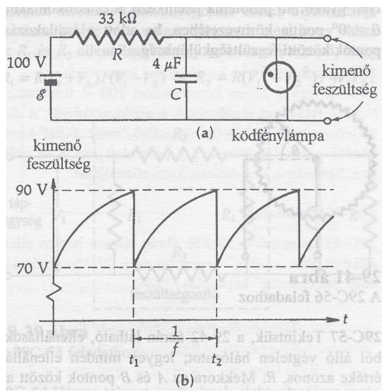
$$u_{15} \equiv u_{R_2} = U - u_{R_1} = 5\,\mathrm{V} \tag{12.13.9}$$

$$i_{15} \equiv i_{R_2} = i_{R_1} = 3,333 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{A} \tag{12.13.10}$$

$$u_c = u_{15} = 6\,\mathrm{V} \tag{12.13.11}$$

$$i_c = 0\,\mathrm{A} \tag{12.13.12}$$

12.14. Feladat: (HN 29C-63) A 78 ábrán egyszerű fűrészfog-jelgenerátor kapcsolási rajza látható. A neon izzólámpa ellenállása nagyon kicsi, ha a rákapcsolt feszültség eléri a 90 V-os küszöböt, de amikor a feszültség 70 V alá esik, akkor az izzó gyakorlatilag már nem vezeti az áramot. Számítsuk ki az oszcillátor f frekvenciáját.



78. ábra.

Megoldás: X

13. Feladatok a mágneses erőtér témaköréből

Elektromosan töltött részecskék mozgása mágneses erőtérben

13.1. Feladat: (HN 30B-3) Egy elektron mágneses térben $3 \cdot 10^6$ m/s sebességgel halad az x tengely mentén pozitív x irányban. Számítsuk ki az elektronra ható erőt, ha a mágneses fluxussűrűséget tesla egységekben a $\mathbf{B} = 0,4\mathbf{i} + 0,7\mathbf{j} + 0,32\mathbf{k}$ összefüggés adja meg.

Megoldás: Adatok: $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i}$, ahol $v_x = 3 \cdot 10^6$ m/s; $B_x = 0,4$ Vs/m^2; $B_y = 0,7$ Vs/m^2; $B_z = 0,3$ Vs/m^2; $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C.
A elektronra ható Lorentz-erő:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = e \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -ev_xB_z\mathbf{j} + ev_xB_y\mathbf{k} = 1,44 \cdot 10^{-13}\mathbf{j} - 3,36 \cdot 10^{-13}\mathbf{k}\ \mathrm{N}. \qquad (13.1.1)$$

13.2. Feladat: (HN 30A-5) Egy proton 0,5T fluxussűrűségű (mágneses erőtérben 1,00 cm sugarú körpályán mozog. Mekkora a kinetikus energiája (eV egységekben kifejezve)?

Megoldás: Adatok: $B = 0,5$ T; $r = 1,00$ cm; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.
A körpályán való mozgást az

$$m\frac{v^2}{r} = evB \tag{13.2.1}$$

mozgásegyenlettel írhatjuk le. A kinetikus energia kifejezését és az előző egyenletet használva

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{r^2e^2B^2}{m} = 1,92 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{J} = 1200\,\mathrm{eV}. \tag{13.2.2}$$

13.3. Feladat: (HN 30A-7) A magnetron a radar-oszcillátorok egy típusa. A radar által kisugárzott mikrohullám frekvenciáját a magnetron mágneses erőterében keringő elektronok ciklotron-frekvenciája szabja meg. Becsüljük meg, milyen mágneses fluxussűrűség szükséges 3 cm-es hullámhosszúságú mikrohullámok előállitásához.

Megoldás: A homogén mágneses térben az elektron a tér irányára merőleges síkban körpályán mozog[8] A körpályán tartást az elektronra ható Lorentz erő biztosítja, ezért

$$\begin{aligned} F_L &= F_{cp} \\ e \cdot |\mathbf{v} \times \mathbf{B}| &= \frac{m_e \cdot v^2}{r} \\ e \cdot v \cdot B &= \frac{m_e \cdot v^2}{r} \\ \frac{e \cdot B}{m_e} &= \frac{v}{r} \end{aligned}$$

De $\frac{v}{r} \equiv \omega$ a keringő elektron körfrekvenciája. Az elektron keringési frekvenciája tehát

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{e \cdot B}{2\pi m_e} \tag{13.3.1}$$

A mikrohullám fénysebességgel terjed, frekvenciája megegyezik az elektron "rezgési" frekvenciájával:

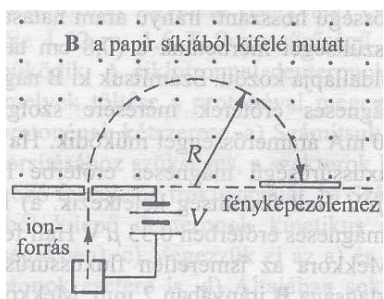
$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi m_e \cdot c}{e \cdot B} \tag{13.3.2}$$

[8] Későbbiekben látni fogjuk, hogy egy gyorsuló töltés energiát sugároz, ezért külső energia betáplálása nélkül az elektron egyre kisebb sugarú körpályára térne át.

ahonnan

$$B = \frac{2\pi m_e \cdot c}{e \cdot \lambda} = \frac{2 \cdot 3,141 \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \cdot 2,998 \cdot 10^{8}}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 0,03}$$
$$= 0,357 \cdot \frac{kg \cdot m}{s \cdot C \cdot m} = 0,357 \cdot \frac{kg\frac{m}{s^2} \cdot m}{A \cdot m^2} = 0,357 \cdot \frac{N \cdot m}{A \cdot m^2}$$
$$= 0,357 \cdot \frac{J}{A \cdot m^2} = 0,357 \cdot \frac{W \cdot s}{A \cdot m^2} = 0,357 \cdot \frac{V \cdot A \cdot s}{A \cdot m^2} = 0,357 \cdot \frac{V \cdot s}{m^2} = 0,357\,T$$

13.4. Feladat: (HN 30B-10) A 79 ábrán bemutatott tömegspektrométerben egyszeresen ionizált, 6 és 7 atomtömegű ($6 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg, illetve $7 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg) lítium ionokat 900V feszültség gyorsít, mielőtt belépnek a $B = 0,04$ T fluxussűrűségű homogén mágneses térbe. Itt egy félkört megtéve fényképezőlemezbe csapódnak, és egymástól x távolságra lévő két foltot idéznek elő. Mekkora ez az x távolság?



79. ábra.

Megoldás: Adatok: $M_6 = 9,96 \cdot 10^{-27}$ kg; $M_7 = 11,62 \cdot 10^{-27}$ kg; $U = 900$ V; $B = 0,04$ T; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Az egyszeresen ionizált M tömegű ion kinetikus energiáját az U feszültségű gyorsításból nyeri

$$eU = \frac{1}{2}Mv^2. \tag{13.4.1}$$

Innen az elért sebesség

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{M}}. \tag{13.4.2}$$

A mágneses tér a Lorentz-erő révén az iont körpályára állítja

$$M\frac{v^2}{R} = evB. \tag{13.4.3}$$

Az R sugár a fenti két egyenletből kifejezhető, azaz

$$R = \frac{Mv}{eB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2MU}{e}}. \tag{13.4.4}$$

A 6-os tömegszámú ionhoz tartozó sugár legyen R_6, a 7-eshez R_7. Az adatok behelyettesítésével

$$R_6 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2M_6U}{e}} = 0,265\,\mathrm{m} \tag{13.4.5}$$

$$R_7 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2M_7U}{e}} = 0,286\,\mathrm{m} \tag{13.4.6}$$

A becsapódási pontok közötti távolság

$$x = 2R_7 - 2R_6 = 0,042\,\mathrm{m} = 42\mathrm{mm}. \tag{13.4.7}$$

13.5. Feladat: (HN 30A-13) Egy sebességszűrőben (az elektronokat sebességük szerint szétválasztó eszközben) $1,4 \cdot 10^4$ V/m elektromos és erre merőleges 18 mT fluxussűrűségű mágneses erőteret alkalmaznak. Számítsuk ki a szűrőn áthaladó elektronok sebességét.

Megoldás: Adatok: $E = 1,4 \cdot 10^4$ V/m; $B = 18$ mT. A elektronok mind az E mind a B térre merőlegesen haladnak. Akkor az adott térrészen tudnak átjutni, ha az

$$eE = evB \tag{13.5.1}$$

összefüggés fenn áll. Ebből a kérdéses sebesség

$$v = \frac{E}{B} = 7,78 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}. \tag{13.5.2}$$

Áramvezetőre ható erő mágneses erőtérben

13.6. Feladat: (HN 30B-17) Téglalap alakú, 0,200 N súlyú áramvezető hurok úgy van felfüggesztve, hogy a 80. ábrán vázolt módon félmagasságig vízszintes irányú, B indukció-vektorú homogén mágneses erőtérbe merül. Ha 2 A erősségű áram folyik a hurkon keresztül, a felfüggesztő zsinórra 0,370 N erő hat.

(a) Milyen irányú a hurokban az áram?

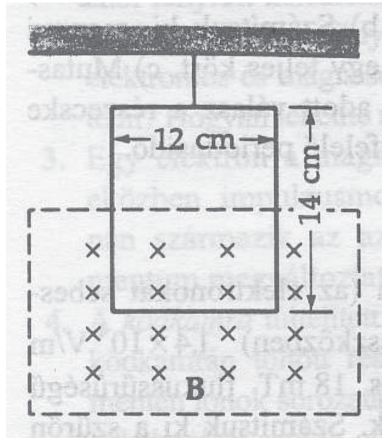
(b) Számítsuk ki B nagyságát!

Megoldás: Adatok: $G = 0,200$ N; $F = 0,370$ N; $I = 2$ A; $l = 0,12$ m.

(a) Az óra járásával egyező irányban folyik az áram.

(b) Az l hosszúságú vezetőre ható Lorentz-erő

$$F_L = IlB, \tag{13.6.1}$$

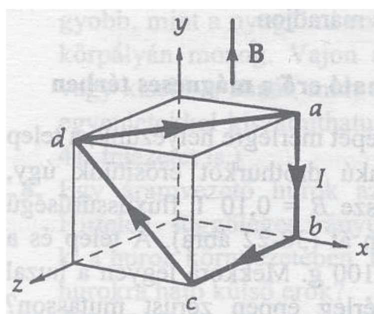


80. ábra.

és az ábrán lefelé mutat. Másrészt $F_L = F - G$. Így

$$B = \frac{F - G}{Il} = 0,708\text{T}. \tag{13.6.2}$$

13.7. Feladat: (HN 30B-18) A 81 ábrán bemutatott kocka 40 cm élhosszúságú. A négy egyenes



81. ábra.

szakaszból (ab,bc,cd és da) álló dróthurkon $I = 5$ A erősségű (áram folyik. Az y tengely pozitív irányában $B = 0,02$ T fluxussűrűségű homogén mágneses erőtér hat. Készítsünk táblázatot, melyben a fenti sorrendben az egyes huzalszakaszokra ható) erők nagyságát és irányát foglaljuk össze.

Megoldás: Egy egyenes vezetőre **B** fluxussűrűségű homogén mágneses térben ható erőt az

$$\mathbf{F} = I(\mathbf{l} \times \mathbf{B}), \qquad F = I\,l\,B\,sin\,\alpha(\mathbf{l}, \mathbf{B})$$

képlet adja meg, ahol **l** az áram irányába mutató vektor melynek hossza megegyezik az egyenes vezető szakasz hosszával és $\alpha(\mathbf{l}, \mathbf{B})$ a szakasz és **B** közötti szög. $|\mathbf{l}|$ helyére tehát a következőket kell beírni: $|\mathbf{l}_{ab}| = |\mathbf{l}_{bc}| = A$, $|\mathbf{l}_{cd}| = |\mathbf{l}_{da}| = \sqrt{2} \cdot A$, ahol $A = 0,4m$ a kocka élhossza. Az egyes irányított szakaszok $\mathbf{B}$ vel bezárt szögei: $\alpha_{ab} = 180^o$, $\alpha_{bc} = 90^o$, $\alpha_{cd} = 45^o$ és $\alpha_{da} = 90^o$. Az egyes szakaszokra ható erők nagyságai és irányai:

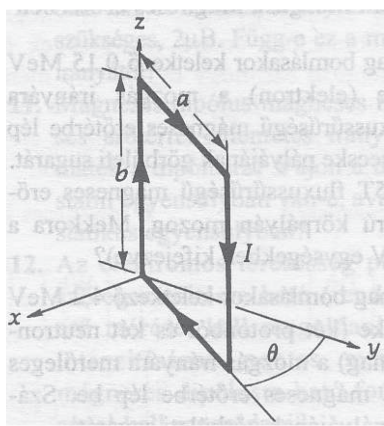
$F_{ab} = 0,$

$F_{bc} = I \cdot A \cdot B = 5 \cdot 0,4 \cdot 0,02 = 0,04N$ $-x$ irányú

$F_{cd} = \sqrt{2} \cdot I \cdot A \cdot B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = I \cdot A \cdot B = 0,04N$ $-z$ irányú

$F_{da} = \sqrt{2} \cdot I \cdot A \cdot B = 0,052N$ $+x$ és $+z$ tengellyel 45^o szöget bezáró irányú

13.8. Feladat: (HN 30B-21) Téglalap alakú áramvezető hurok mágneses erőtérben a 82 ábrán vázolt módon helyezkedik el. A $\mathbf{B} = B_x\mathbf{i}$ ($B_x = 0,15$ Vs/m^2) fluxussűrűségű (tesla egységben megadott nagyságú) mágneses erőtér a hurokra forgatónyomatékot gyakorol. Mekkora a forgatónyomaték, ha $a = 8$ cm, $b = 12$ cm, $\theta = 30^0$ és $I = 2$ A?



82. ábra.

Megoldás: A mágneses dipólmomentum irányát a jobb kéz szabállyal lehet eldönteni, jelen esetben a keret síkjára merőlegesen a felület $\mathbf{n} = (-\cos\theta, \sin\theta, 0) = -\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ normál vektorának irányába mutat. Így a dipólmomentum vektor

$$\mu = Iab\mathbf{n} = Iab(-\cos\theta, \sin\theta, 0) = Iab(-\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j} + 0\mathbf{k}). \qquad (13.8.1)$$

A keretre ható forgatónyomaték

$$\mathbf{M} = \mu \times \mathbf{B} = Iab \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ B_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -IabB_x \sin\theta\mathbf{k} = -1,44 \cdot 10^{-3}\,\text{Nm}. \qquad (13.8.2)$$

13.9. Feladat: (HN 30B-23) Számítsuk ki a 82 ábrán vázolt áramvezető hurok mágneses dipólusmomentumát!

Megoldás: A dipólusmomentum nagysága Iab. Iránya a jobbkéz-szabály alkalmazásával az ábráról állapítható meg.

$$\mu = Iab(-\cos\theta, -\sin\theta) \tag{13.9.1}$$

13.10. Feladat: (HN 30C-34) A q/m töltés/tömeg hányadossal jellemezhető részecske $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$ sebességgel halad át a derékszögű koordinátarendszer köz6ppontján. A részecskét homogén mágneses erőtér téríti el annyira, hogy áthaladjon az $\mathbf{r} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ ponton.

(a) Határozzuk meg a $\mathbf{B}$ mágneses indukcióvektor irányát.

(b) Fejezzük ki b-t a, q, m, B és v függvényeként.

Megoldás: X

13.11. Feladat: (HN 30C-45) Egyenletes keresztmetszetű korongot, melynek tömege m, és melyen q töltés egyenletesen oszlik el, tengelye körül forgatunk. Mutassuk meg, hogy a forgó töltött korong μ mágneses momentuma és $\mathbf{L}$ impulzusmomentuma között a $\mu = (q/(2m))\mathbf{L}$ összefüggés teremt kapcsolatot.

Megoldás: A forgó korong impulzusmomentuma

$$\mathbf{L} = \theta\omega = \frac{1}{2}mR^2\omega, \tag{13.11.1}$$

ahol θ a korong tehetetlenségi nyomatéka, ω a szögsebesség és R a korong sugara.
A korong felületi töltéssűrűségét σ-val jelölve az összes töltés

$$q = \sigma R^2\pi. \tag{13.11.2}$$

Az r sugarú, dr szélességű körgyűrűn

$$dq = \sigma 2r\pi \mathrm{d}r \tag{13.11.3}$$

töltés van, amely $T = 2\pi/\omega$ idő alatt körbefut, s így

$$dI = \sigma r \mathrm{d}r\omega \tag{13.11.4}$$

áramot jelent. Mivel a körgyűrű által határolt felület $r^2\pi$, így gyűrű

$$\mathrm{d}r\mu = \sigma r^3 \pi \mathrm{d}r\omega \tag{13.11.5}$$

mágneses dipólmomentumot jelent. A teljes felületre összeadva:

$$\mu = \int_0^R \sigma r^3 \pi \mathrm{d}r\omega = \frac{1}{4}\sigma R^4 \pi\omega = \frac{1}{4} q R^2 \omega \tag{13.11.6}$$

a mágneses dipólmomentum. Az impulzusmomentum és a dipólmomentum kifejezését összevetve az állítás

$$\mu = \frac{q}{2m}\mathbf{L} \tag{13.11.7}$$

adódik.

13.12. Feladat: (HN 30C-46) Köralakú áramvezető hurokra adott mágneses erőtérben maximálisan M_0 forgatónyomaték hat. Alakítsuk át a hurkot úgy, hogy kisebb, de kétmenetű legyen. Mekkora a maximális forgatónyomaték ezen a kisebb hurkon?

Megoldás: Ha az eredeti kör sugara R, akkor a két egyforma kör sugara $R/2$ kell legyen, mert a kerületek hossza egyenlő. A forgatónyomaték a keret felületével — $R^2\pi$ — arányos. A második esetben a két kör együttes felülete számít, azaz $2 \cdot (R/2)^2\pi$, ami fele a nagy körének. Így a maximális forgatónyomaték is, azaz $M_0/2$.

13.13. Feladat: (HN 30C-51) Szigetelő anyagból keszült R sugarú korong egyik oldalán a felületmenti homogén töltéssűrűség nagysága σ. A korongot tengelye körül ω szögsebességgel forgatjuk. Mutassuk meg hogy mágneses dipólusmomentuma $\omega \cdot \sigma \cdot \pi R^4/4$. (Útmutatás: Számítsuk ki az r sugarú, dr széles körgyűrűn levő töltések mozgásából származó mágneses erőteret. Használhatjuk a $\mathbf{p}_m = I\,\mathbf{A}$ egyenletet.)

Megoldás: A korongon levő töltések mindegyike a korong tengelye körüli körpályán mozog, tehát egy köráramnak felel meg. Minden köráramnak van mágneses momentuma, ezért a forgó korongnak is. Bontsuk fel a korong felületét koncentrikus dr szélességű körgyűrűkre. Egy r sugarú I erősségű köráram mágneses momentumának nagysága $p_m = I \cdot A = I \cdot r^2\pi$. Esetünkben a középponttól r és $r+dr$ távolságban található $dQ = \sigma 2\pi r\,dr$ nagyságú töltések $dI(r)$ árama:

$$dI(r) = \frac{dQ}{T} = \frac{dQ}{2\pi/\omega} = \frac{\omega\, dQ}{2\pi} = \frac{2\pi\omega\sigma r\,dr}{2\pi} = \omega\sigma r\,dr$$

Egy ilyen köráram $d p_m$ mágneses momentuma

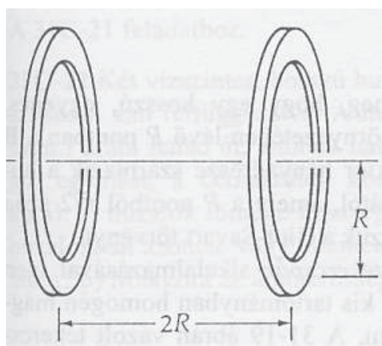
$$p_m = dI \cdot A(r) = dI \cdot r^2 \pi = \omega \sigma r^3 \pi dr$$

A teljes körlap mágneses momentuma tehát

$$p_m = \omega \sigma \pi \int_0^R r^3 dr = \omega \sigma \pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\omega \sigma \pi R^4}{4} \tag{13.13.1}$$

Biot-Savart törvény, Ampère-törvény

13.14. Feladat: (HN 31B-3) Két N menetű, R sugarú tekercs egymástól $2R$ távolságra helyezkedik el, ahogy a 83 ábra mutatja. Számítsuk ki a mágneses fluxussűrűséget a tekercsek tengelyén, tőlük egyenlő távolságban lévő pontban. Tételezzük fel, hogy a tekercsek sorba vannak kötve és az áramirány mindkét tekercsben azonos.



83. ábra.

Megoldás: X

13.15. Feladat: (HN 31A-4) Számítsuk ki két hosszú, párhuzamos, vékony, egymástól 5 cm távolságban lévő huzal egységnyi hosszúságú szakaszai között ható erőt. Az egyik huzalon 10 A erősségű áram folyik, a másikon is ugyanekkora, de ellentétes irányú. Taszító vagy vonzó erő hat a két huzal között?

Megoldás: Adatok: $r = 5$ cm; $I = 10$ A. Az egyik vezető által a másik helyén keltett mágneses teret az Ampère-törvény szerint számolhatjuk ki

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{s} = \mu_0 \sum_i I_i, \tag{13.15.1}$$

$$B 2 r\pi = \mu_0 I, \tag{13.15.2}$$

azaz

$$B = \mu_0 \frac{I}{2r\pi}. \tag{13.15.3}$$

A vezetőben mozgó töltött részecskékre Lorentz-erő hat, amely L hossznyi vezetőt tekintve

$$F = ILB, \tag{13.15.4}$$

hosszegységenként

$$f = IB. \tag{13.15.5}$$

A B mágneses indukciót behelyettesítve

$$f = \mu_0 \frac{I^2}{2r\pi} = 4\cdot 10^{-4}\,\mathrm{N/m} \tag{13.15.6}$$

hosszegységenkénti taszító erő hat.

13.16. Feladat: (HN 31B-6) Egy R sugarú, köralakú vezetőhurokban I áram folyik. A hurok tengelyén, a huroktól milyen x távolságban van az a pont, ahol a mágneses fluxussűrűség, éppen fele a hurok középpontjában mérhetőnek? Felhasználhatjuk a (HN 31C-17) feladat eredményét is.

Megoldás: Menjen át a koordinátarendszer x tengelye a hurok középpontján merőlegesen a korong síkjára. A (HN 31C-17) feladat eredménye szerint x távolságban a hurok középpontjától

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mu_o \cdot I}{2}\right) \frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot \mathbf{x}$$

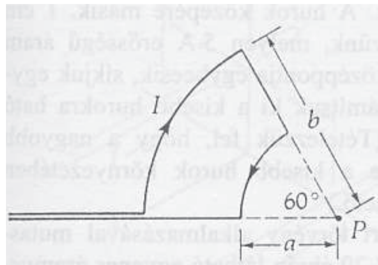
ahol $\mathbf{x}$ a $+x$ irányú egységvektor. Az x távolságban a tengelyen mérhető térerősség aránya a hurok középpontjában ($x = 0$) mérhetőhöz:

$$\frac{|B(x)|}{|B(0)|} = \frac{\frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}}}{\frac{R^2}{(R^2)^{3/2}}} = \frac{R^3}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

Ez akkor 1/2, ha

$$\frac{R^3}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}$$
$$2R^3 = (x^2+R^2)^{3/2}$$
$$2^{2/3}R^2 - R^2 = x^2$$
$$x = \pm(2^{2/3}-1)\cdot R = \pm 0,587\,R$$

13.17. Feladat: (HN 31B-8) Számítsuk ki a mágneses indukcióvektort a 84 ábrán látható körívekből és sugárirányú egyenesszakaszokból álló hurok köríveinek P középpontjában.



84. ábra.

Megoldás: A radiális vezetőszakaszoknak nincs járuléka a P pontban, így csak a két ívet kell tekintsük. Az r központi sugarú ív ds elemi hosszától származó járulék

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ids}{r^2}. \tag{13.17.1}$$

Ugyanakkor ds ívhossz kifejezhető a θ központi szöggel

$$\mathrm{d}s = r\mathrm{d}\theta. \tag{13.17.2}$$

A teljes B teret a szög szerinti integrálással kapjuk:

$$B = \int_0^{60^0=\pi/3} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ir\mathrm{d}\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{12}\frac{I}{r}. \tag{13.17.3}$$

A b sugarú ívtől

$$B_b = \frac{\mu_0}{12}\frac{I}{b} \tag{13.17.4}$$

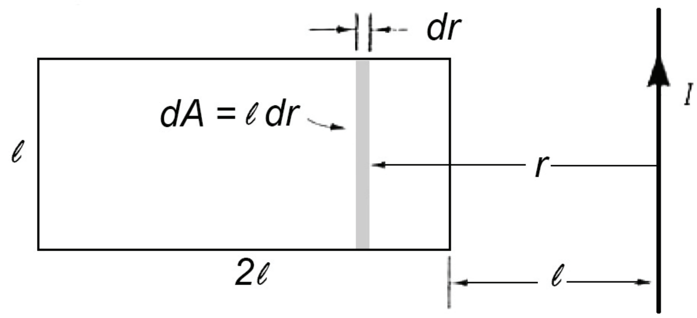
a lap síkjára merőlegesen befelé, míg az a sugarú ívtől

$$B_a = \frac{\mu_0}{12}\frac{I}{a} \tag{13.17.5}$$

a lap síkjára merőlegesen kifelé mutató tér alakul ki. Az eredő

$$B = B_b - B_a = \frac{\mu_0}{12}\frac{I}{b} - \frac{\mu_0}{12}\frac{I}{a} = \frac{\mu_0 I}{12}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right). \tag{13.17.6}$$

Mivel $a < b$, így ennek eredménye negatív, azaz kifelé mutat.



85. ábra. A 31B-9 feladathoz

13.18. Feladat: (HN 31B-9) A 85 ábrán látható, téglalap alakú vezetőhurok és a ∞ hosszúságú, egyenes vezető azonos sikban fekszik. A vezetőhurok ellenállása $2\,\Omega$. Számítsuk ki a hurok teljes felületén áthaladó mágneses fluxust, ha az egyenes vezetőn I áram halad át. (Útmutatás: Válasszunk ki egy $dA = \ell dr$ felületelemet, és számítsuk ki a $d\Phi_B$, fluxust ezen a felületelemen, majd integrálással számítsuk ki a teljes fluxust.)

Megoldás: Osszuk fel a felületet dr szélességű sávokra! Egy ilyen sáv mentén a mágneses fluxussűrűség konstansnak tekinthető. Az egyenes vezetőtől r távolságban a B mágneses fluxussűrűség nagysága

$$B = \mu_o \cdot \frac{I}{2\pi r}$$

így a dr széles és ℓ hosszú sávra vett elemi $d\Phi$ fluxus

$$d\Phi = B(r)\cdot dA = B(r)\cdot \ell \cdot dr = \mu_o \cdot \frac{I\ell dr}{2\pi r}$$

A teljes hurkon áthaladó fluxus az elemi fluxusok összege, ami integrálként írható fel.

$$\Phi = \mu_o \cdot \frac{I\ell}{2\pi}\int_{\ell}^{3\ell}\frac{1}{r}dr = \mu_o \cdot \frac{I\ell}{2\pi}[ln\, r]_{\ell}^{3\ell} = \mu_o \cdot \frac{I\ell}{2\pi} ln \frac{3\ell}{\ell} = \mu_o \cdot \frac{I\ell}{2\pi} ln 3 \qquad (13.18.1)$$

13.19. Feladat: (HN 31A-13) Egy 50 cm hosszú, 2 cm átmérőjű szolenoid belsejében B = 0,07 T mágneses indukcióvektort kívánunk előállítani.

(a) Mekkora a teljes mágneses fluxus a szolenoid belsejében, a tengelyre merőleges felületen?

(b) Számítsuk ki, hány menetű legyen a tekercs, ha 5 A erősségű áramot alkalmazunk?

Megoldás: Adatok: $L = 50$ cm; $d = 2$ mm; a sugár $r = 1$ mm; $B = 0,07$ T.

(a) A tekercsbeli mágneses fluxus

$$\Phi_B = BA = Br^2\pi = 2,2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Vs}. \tag{13.19.1}$$

(b) Az Ampère-törvény szerint

$$\oint \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{s} = \mu_0 \sum_i I_i, \tag{13.19.2}$$

azaz

$$BL = \mu_0 NI \tag{13.19.3}$$

ahol N a menetszám. Így a tekercsbeli mágneses indukció

$$B = \mu_0 \frac{IN}{L}, \tag{13.19.4}$$

ahonnan az N menetszám

$$N = \frac{LB}{\mu_0 I} = 5570. \tag{13.19.5}$$

13.20. Feladat: (HN 31B-15) Hosszú, egyenes, a sugarú hengeres vezetőn I áram folyik. Az Ampère-törvényt alkalmazva vezessük le, hogy hogyan változik a B indukcióvektor a vezető belsejében. (Egyenáramok esetében az áramsűrűség a vezető keresztmetszete mentén egyenletes. Ábrázoljuk B-t a tengelytől való r távolság függvényében a vezető belsejében és azon kívül is.

Megoldás: A vezető belsejében ($0 < r < a$) esetében az r sugarú keresztmetszeten átfolyó áramtól származik mágneses tér. A vezető keresztmetszetéhez – a keresztmetszete mentén egyenletes vezetés miatt – a

$$j = \frac{I}{a^2\pi} \tag{13.20.1}$$

áramsűrűséget adhatjuk meg. Itt az áram nagysága

$$I = \frac{I}{a^2\pi} r^2\pi. \tag{13.20.2}$$

Így az Ampère-törvény segítségével felírhatjuk, hogy

$$B2r\pi = \mu_0 \frac{I}{a^2\pi} r^2\pi. \tag{13.20.3}$$

Innen a $B(r)$ mágneses indukció

$$B(r) = \mu_0 \frac{I}{2a^2\pi} r. \tag{13.20.4}$$

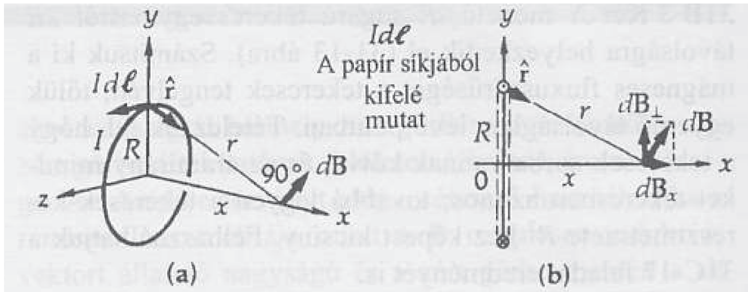
A vezetőn kívül ($a < r$)

$$B2r\pi = \mu_0 \frac{I}{,} \tag{13.20.5}$$

amellyel a mágneses indukció

$$B(r) = \mu_0 \frac{I}{2r\pi}. \tag{13.20.6}$$

13.21. Feladat: (HN 31C-17) A 86 ábrán vázolt R sugarú hurokban I áram folyik. Mutassuk



86. ábra.

meg, hogy a hurok tengelyén, a hurok sikjátol x távolságban

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_o \cdot I}{2}\right) \frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot \mathbf{x}$$

(Útmutatás: Mi történik az x tengelyre merőleges $d\mathbf{B}_\perp$ komponensekkel az Idt elemi áramtól származó $d\mathbf{B}$ elemi mágneses indukcióvektorok összegzése során?)

Megoldás: Osszuk fel a hurkot a 86 a) ábra szerint $d\mathbf{l}$ darabokra. Az egy ilyen darabkától származó mágneses tér a Biot-Savart törvény szerint

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|r|^3}$$

Minden elemi szakasz ugyanakkor nagyságú, de más irányú elemi $d\mathbf{B}$ -t hoz létre. A 31-18 b) ábrán látható, hogy $d\mathbf{B}$ felbontható egy az x tengellyel párhuzamos $d\mathbf{B}_{||}$ és egy arra merőleges $d\mathbf{B}_\perp$ komponensre. A hurok mentén átellenesen elhelyezkedő elemi szakaszoktól származó mágneses fluxussűrűségek $d\mathbf{B}_\perp$ komponensi pont ellentétes irányúak, így kiejtik egymást, azonos nagyságú $d\mathbf{B}_{||}$ komponenseik pedig összeadódnak. Ez azt jelenti, hogy az eredő $\mathbf{B}$ térnek csak x irányú komponense lesz, a pozitív tengelyen pozitív, a negatív tengelyen negatív irányú, tehát a tér párhuzamos lesz az x irányú egységvektorral $\mathbf{x}$-szel. Az egy szakasztól származó $d\mathbf{B}_{||}$ nagysága $dB_{||} = B\, sin\alpha$, ahol α az x és r közötti szög. Felhasználva, hogy $\mathbf{r}$ és $\mathbf{l}$ merőlegesek :

$$\begin{aligned} dB_{||} &= \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I\,|d\mathbf{l} \times \mathbf{r}|}{|r|^3} \cdot sin\,\alpha \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I\,dl \cdot r}{|r|^3} \cdot sin\,\alpha \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I\,dl}{|r|^2} \cdot sin\,\alpha \end{aligned}$$

Mivel $r = \sqrt{x^2+R^2}$

$$sin\,\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

amivel

$$dB_{||} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{IR}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot l \tag{13.21.1}$$

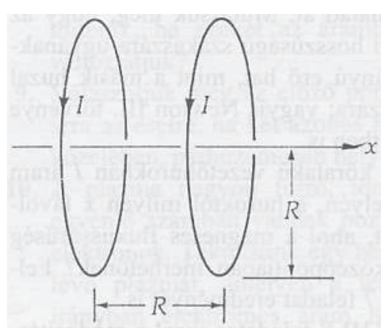
A teljes B tér az elemi szakaszok $dB_{||}$ járulékainak összege. Nagysága:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{IR}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot \int_0^{2r\pi} dl \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{IR}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot [l]_0^{2r\pi} \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{IR}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot 2R\pi \\ &= \frac{\mu_o}{2} \cdot \frac{IR^2}{(x^2+R^2)^{3/2}} \end{aligned} \tag{13.21.2}$$

Az irányt is figyelembe véve

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_o \cdot I}{2}\right) \frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot \mathbf{x} \tag{13.21.3}$$

13.22. Feladat: (HN 31C-19) A Helmholtz tekercspár alkalmazásával igen egyszerű módon lehet kis tartományban homogén mágneses erőteret létesíteni. A 87 ábrán vázolt tekercspár két lapos, köralakú tekercsből áll, melyek távolsága egyenlő a tekercsek sugarával; a két tekercsben az áramirány megegyezik. Mutassuk meg, hogy az x tengelyen a két tekercs között a távolság felében a mágneses erőtér olyan, hogy a dB/dx és a d^2B/dx^2 is zérus.



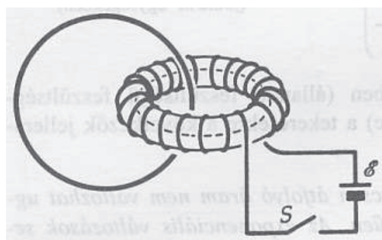
87. ábra.

Megoldás: X

14. Feladatok a mágneses indukció témaköréből

Faraday-törvény

14.1. Feladat: (HN 32B-1) Egy toroid tekercsen gyűrű van átfűzve (88. ábra). Az S kapcsoló zárásakor a toroidon áram kezd folyni.
(a) Számítsuk ki a gyűrűben indukált feszültséget,ha a toroidon belül a mágneses fluxus 30 Tm^2/s sebességgel változik.
(b) Az ideális toroid mágneses erőtere gyakorlatilag teljesen a tórusz belsejébe van lokalizálva, azaz a karikát a mágneses erőtér nem éri. Honnan származik akkor az indukált áram?



88. ábra.

Megoldás: Jelölés: $\Delta\Phi/\Delta t = 30\ \mathrm{Tm}^2/\mathrm{s}$.

(a) A mágneses fluxus ($\Phi = \oint \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{A}$) idő szerinti változása hozza létre a gyűrűben az indukált feszültséget

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -30\,\mathrm{V}. \tag{14.1.1}$$

(b) A $\mathbf{B}$ mágneses indukció változásakor $\mathbf{E}$ elektromos tér jön létre

$$-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta \oint \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{A}}{\Delta t} = \oint \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{s} = \varepsilon, \tag{14.1.2}$$

és ez a tér mozdítja el a töltéseket. Innen származik az indukált áram.

14.2. Feladat: HN 32B-3 Egy R ellenállású, r sugarú köralakú huzalhurok a B homogén mágneses erőtér irányára merőleges felületen fekszik. A hurkot gyorsan, t idő alatt 180^0-kal átforditjuk. Számitsuk ki, hogy mekkora átlagos ε feszültség indukálódott ezalatt a hurokban és mekkora töltés haladt át ezalatt a vezető hurkon.

Megoldás: Ha egy vezető hurok által határolt felületen a mágneses térerősség Φ_B fluxusa változik ennek hatására a vezetőhurokban $\varepsilon(t)$ elektromotoros erő jelenik meg, azaz feszültség indukálódik (Faraday indukciós törvénye). Ha a fluxusváltozás Δt idő alatt $\Delta\Phi_B$ akkor az átlagos feszültség:

$$< \varepsilon > = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = -\frac{\Phi_B(t=\Delta t) - \Phi_B(t=0)}{\Delta t}. \tag{14.2.1}$$

A negatív előjel megfelel Lenz törvényének. A feladatban ennek az elektromotoros erőnek csak a nagysága érdekes. Az eredeti és az átfordítás utáni fluxus

$$\Phi(t=0) = \int_A \mathbf{B}\, d\mathbf{A}\, |_{t=0} = BA = Br^2\pi \tag{14.2.2}$$

$$\Phi(t=\Delta t) = \int_A \mathbf{B}\, d\mathbf{A}\, |_{t=\Delta t} = -Br^2\pi. \tag{14.2.3}$$

A teljes fluxusváltozás nagysága tehát eredeti fluxus kétszerese

$$\Delta\Phi_B = \Phi_B(t=\Delta t) - \Phi_B(t=0) = -2Br^2\pi,$$

így

$$< \varepsilon > = +\frac{2Br^2\pi}{\Delta t}. \tag{14.2.4}$$

Az R ellenállású hurkon áthaladó töltés nagysága pedig

$$\Delta Q = < I > \Delta t = \frac{< \varepsilon >}{R} \cdot \Delta t = \frac{2Br^2\pi}{R}. \tag{14.2.5}$$

14.3. Feladat: (HN 32B-7) Egy 30 menetes lapos huzaltekercset hosszú, 4000 menet/m menetsűrűségű szolenoid végéhez illesztünk. A szolenoid és a huzaltekercs tengelye, és sugara azonos $R = 5$ cm. Számítsuk ki, mekkora a szolenoidban az áramerősség változása, ha a huzaltekercsben 2 mV-os feszültség indukálódik.

Megoldás: Adatok: $N_1 = 30$ menet; $N_2/l = 4000$ menet/m; $\varepsilon = 2$ mV.
A szolenoidban I áramerősség hatására

$$B = \mu_0 \frac{IN_2}{l} \tag{14.3.1}$$

mágneses indukció jön létre. Ez a huzaltekercs számára

$$\Phi = N_1 BR^2\pi = \mu_0 \frac{IN_1N_2R^2\pi}{l} \tag{14.3.2}$$

fluxust jelent. Az indukált feszültség nagysága

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 R^2 \pi}{l} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}, \tag{14.3.3}$$

amelyből az áramerősség időbeli változása

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{l\varepsilon}{\mu_0 N_1 N_2 R^2 \pi} = 1,69\,\mathrm{A/s}. \tag{14.3.4}$$

14.4. Feladat: (HN 32A-8) Egy 400 menetes tekercsben l2 A/s áramerősség változás hatására 28 mV-os ellenfeszültség indukálódik. Mekkora a tekercs induktivitása?

Megoldás: Adatok: $N = 100$; $\Delta I/\Delta t = 12$ A/s; $\varepsilon = 28$ mV.
Az indukált feszültség nagysága

$$\varepsilon = L\frac{\Delta I}{\Delta t}, \tag{14.4.1}$$

ahonnan az L induktivitás

$$L = \varepsilon\frac{\Delta t}{\Delta I} = 2,33 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{H}. \tag{14.4.2}$$

14.5. Feladat: (HN 32A-15) Egy A keresztmetszetű és l kerületű toroid két külön tekercsből áll: mindkettőt a tórusz teljes kerülete mentén egyenletesen csévélték fel; menetszámuk N_1 és N_2,

(a) Mekkora az (önállóan használt) tekercsek L_1 és L_2 induktivitása?

(b) Mekkora a két tekercs M kölcsönös induktivitása?

(c) Mutassuk meg, hogy $M^2 = L_1 L_2$. (Ez az egyenlet csak akkor teljesül, ha bármelyik tekercs teljes fluxusa egyúttal benne van a másik tekercs belsejében is.)

Megoldás:

(a) Az L_1 és L_2 önindukciós együtthatók kiszámolása esetén hasonlóan járunk el. A mágneses indukciót az Ampère-törvény ($\oint \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{s} = \mu_0 \sum_i I_i$) segítségével határozzuk meg

$$B = \mu_0 \frac{IN}{l}. \tag{14.5.1}$$

A fluxus

$$\Phi = NBA = \mu_0 \frac{IN^2 A}{l}, \tag{14.5.2}$$

amelynek időbeli változása adja az indukált feszültséget

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \mu_0 \frac{N^2 A}{l}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \tag{14.5.3}$$

Innen az L öndukciós együttható innen

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{l}. \tag{14.5.4}$$

Ezért L_1 és L_2

$$L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2 A}{l}, \tag{14.5.5}$$

$$L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2 A}{l}. \tag{14.5.6}$$

(b) Az M kölcsönös indukciós együttható kiszámolása esetén az N_1 beli fluxusváltozás feszültséget indukál az N_2 tekercsben és *vice versa*. A mágneses indukció

$$B = \mu_0 \frac{IN_1}{l}. \tag{14.5.7}$$

A fluxus

$$\Phi = N_2 BA = \mu_0 \frac{IN_1 N_2 A}{l}, \tag{14.5.8}$$

amelynek időbeli változása adja az indukált feszültséget

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \tag{14.5.9}$$

Innen az L öndukciós együttható innen

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l}. \tag{14.5.10}$$

(c) Ezt követően könnyen belátható, hogy az $M^2 = L_1 L_2$ kapcsolat fenn áll.

14.6. Feladat: (HN 32B-17) Egy l hosszúságú, A keresztmetszetű, N_1 menetszámú hosszú szolenoid közepére szorosan és elektromosan szigetelve egy másik, N_2 menetszámú tekercset csévélnek. Számítsuk ki a szolenoid és a tekercs kölcsönös induktivitását, elhanyagolva a tekercsvégek hatását.

Megoldás: Az N_1 menetszámú tekercsben I áramerősség hatására

$$B = \mu_0 \frac{IN_1}{l} \tag{14.6.1}$$

mágneses indukció jön létre. Ez az N_2 menetszámú huzaltekercs számára

$$\Phi = N_2 BA = \mu_0 \frac{IN_1 N_2 A}{l} \tag{14.6.2}$$

fluxust jelent. Az indukált feszültség nagysága

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}, \tag{14.6.3}$$

ahonnan a kölcsönös indukciós együttható

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l}. \tag{14.6.4}$$

14.7. Feladat: (HN 32B-18) Egy áramkör a sorba kötött, $\varepsilon = 10$ V-os feszültségforrásból, az S kapcsolóból, az $R = 50\ \Omega$ ellenállásból és az $L = 5$ H induktivitású tekercsből áll. Számítsuk ki azt az időtartamot, ami ahhoz szükséges, hogy az áramerősség elérje a stacionárius állapotnak megfelelő értekének

(a) felét, illetve

(b) a 90 %-át.

Megoldás: A hurokra felírható, hogy

$$\varepsilon = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI, \tag{14.7.1}$$

ahol $I(t)$ az áramkörben folyó áram. Az egyenletet szeparálva és az integrálási határokat kijelölve írhatjuk, hogy

$$\int_0^{I(t)} \frac{\mathrm{d}I}{I - \frac{\varepsilon}{R}} = -\int_0^t \frac{R}{L}\mathrm{d}t. \tag{14.7.2}$$

Az integrálást végrehajtva és az eredményt átrendezve az időfüggő áramerősség

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \tag{14.7.3}$$

Az adatok felhasználásával a megválaszolandó időtartamok:

(a) $t = 0,069$ s és

(b) $t = 0,23$ s.

14.8. Feladat: (HN 32A-23) Számítsuk ki a 3800 menet/m menetsűrűségű,hosszú szolenoid középen a mágneses tér energiasűrűségét, ha a szolenoidon áthaladó áram erőssége 4 A. Függ-e az energiasűrűség a menetek sugarától?

Megoldás: Adatok: $N/l = 3800$ menet/m; $I = 4A$.

A mágneses indukció nagysága

$$B = \mu_0 \frac{IN}{l}, \tag{14.8.1}$$

amellyel a mágneses energiasűrűség

$$\varepsilon_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 I^2 N^2}{l^2} = 145,2\,\mathrm{J/m^3}. \tag{14.8.2}$$

14.9. Feladat: (HN 32A-25) Egy 10 V-os telepet 5 Ω-os ellenállással és 10 H induktivitású tekerccsel kötünk sorba, és megvárjuk, amig az áramerősség állandósul. Számitsuk ki ekkor a) a telep által leadott teljesitményt; b) az ellenállás által disszipált teljesitményt; c) a tekercsben disszipált teljesitményt; d) a tekercs mágneses erőterében tárolt energiát.

Megoldás: A stacionárius állapot beállása után a tekercsen nincs indukált feszültség, ezért az áramerősség és a telep által leadott teljesítmény csak az ellenállástól függ, továbbá az ellenálláson disszipált teljesítmény megegyezik a telep által leadott teljesítménnyel:

$$I = \frac{U}{R} = 2\,\mathrm{A}. \tag{14.9.1}$$

$$P_{telep} = P_R = I^2 \cdot R = 20\,\mathrm{W}. \tag{14.9.2}$$

A tekercsben mágneses terében tárolt energia

$$W_L = \frac{1}{2}LI^2 = 20\,\mathrm{J}. \tag{14.9.3}$$

14.10. Feladat: (HN 32C-33) Egy 30 cm átmérőjű 2 Ω ellenállású vezető karika asztal lapján fekszik, ahol a Föld mágneses terének fluxussűrűsége 48 μT és iránya 65^o-os szöget zár be a vizszintessel. Számitsuk ki, mekkora töltés halad át a karika valamely pontján, ha azt hirtelen 180^o-kal átforditjuk.

Megoldás: A feladat analóg a **32B-3** feladattal. Az egyetlen különbség, hogy a mágneses tér és a vezető hurok síkja nem merőlegesek, ezért a fluxusban megjelenik a **B** és a felület normális vektora közötti szög koszínusza. Mivel azonban a normális vektor függőleges de a mágneses tér iránya a vízszinteshez képest van megadva, ezért a számolásnál vagy az eredeti szög színuszát, vagy a kiegészítő 25^o-os szög koszínuszát kell használni. Behelyettesítve az $R = 2\,\Omega$, $r = 0,15\,m$, és $B = 4,8 \cdot 10^{-5}\,T$ értékeket.

$$<\varepsilon> = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} \tag{14.10.1}$$

$$\Phi(t=0) = \int_A \mathbf{B}\,d\mathbf{A}\,|_{t=0} = BA\,sin65^o = Br^2\pi\,sin65^o \tag{14.10.2}$$

$$\Phi(t=\Delta t) = \int_A \mathbf{B}\, d\mathbf{A}\, |_{t=\Delta t} = -B r^2 \pi\, sin65^o \tag{14.10.3}$$

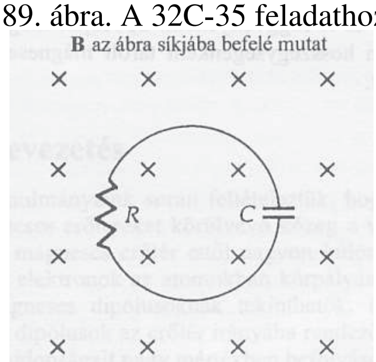
$$< \varepsilon > = -\frac{2 B r^2 \pi\, sin65^o}{\Delta t} \tag{14.10.4}$$

$$\Delta Q = < I > \Delta t = \frac{< \varepsilon >}{R} \cdot \Delta t = \frac{2 B r^2 \pi\, sin65^o}{R} \tag{14.10.5}$$

$$quad = \frac{2 \cdot 4,8 \cdot 10^{-5} \cdot 0,15^2 \cdot \pi \cdot sin65^o}{2} = \underline{3.075 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}}. \tag{14.10.6}$$

14.11. Feladat: (HN 32C-35) A 89 ábrán vázolt áramkör homogén, időben egyenletesen csökkenő fluxussűrűségű mágneses erőtérben helyezkedik el. dB/dt = —k, ahol k pozitiv állandó. Az áramkör egy a sugarú hurok, melyben egy R ellenállás és egy C kapacitású kondenzátor van (az utóbbi lemezei az ábra szerinti módon helyezkednek el). a) Mekkora a kondenzátor maximális Q töltése? b) A kondenzátor melyik lemezének nagyobb a potenciálja? c) Elemezzük, hogy milyen erők okozzák a töltések szétválását.

89. ábra. A 32C-35 feladathoz



Megoldás: A körben indukált feszültség nagyságát a fluxusváltozás sebességéből kapjuk meg

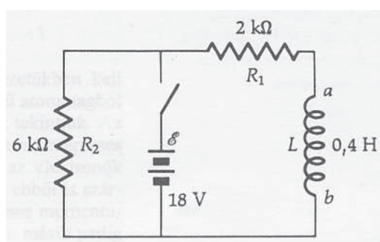
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d B a^2 \pi}{dt} = k a^2 \pi \tag{14.11.1}$$

Ez állandó. Az állandó feszültségre kapcsolt kondenzátor töltése exponenciálisan közelíti a maximális töltést, aminek elérése után a kondenzátor feszültsége és az indukált feszültség azonos nagyságú és ellentétes irányú, vagyis a maximális töltés a $C \cdot \varepsilon = Q_{max}$ egyenletből számítható ki. Innen

$$Q_{max} = C k a^2 \pi \tag{14.11.2}$$

Az indukált elektromos tér önmagukban záródó erővonalai a mágneses tér megváltozására merőleges síkú körök. Irányukat a balkéz-szabály alapján lehet meghatározni: mivel az indukcióvektor $d\mathbf{B}$ megváltozása a lap síkjából kifelé mutat az $\mathbf{E}$ erővonalak az óramutató járásával megegyező irányba mutatnak, ezért a pozitív töltések a kondenzátor felső lapján gyűlnek össze. A töltések szétválását a mágneses indukciófluxus változása okozza.

14.12. Feladat: (HN 32C-40) A 90. ábra áramkörében lévő kapcsolót zárjuk és megvárjuk, amíg az áramerősségek állandósulnak. Ezután a kapcsolót nyitjuk; ennek pillanata legyen $t = 0$.
(a) Számítsuk ki az L tekercsben indukálódó ε_0 feszültséget közvetlenül a kapcsoló nyitása után. A tekercs melyik vége pozitívabb potenciálú, a vagy b?
(b) Vázoljuk fel az R_1 és R_2 ellenállásokon átfolyó áram időtől való függését a $t < 0$ és $t > 0$ időtartományban (a stacionárius áramerősségeket válasszuk pozitív előjelűeknek).
(c) A kapcsoló nyílása után mennyi idő elteltével csökken az R_2 ellenálláson átfolyó áram erőssége 2 mA-re?



90. ábra.

Megoldás: X

14.13. Feladat: (HN 32C-45) Egy R sugarú hengeres vezetőn I_0 erősségű áram halad át; az áramsűrűség a vezető keresztmetszetén egyenletes. Határozzuk meg a vezető belsejében egységnyi hosszúságú szakaszra jutó mágneses energia nagyságát. (Útmutatás: mekkora a mágneses energia egy l hosszúságú, r ($r < R$) sugarú dr vastagságú hengerpalástban (csőben)?

Megoldás: Jelölje j_0 a keresztmetszeten egyenletes áramsűrűséget. Ekkor az $R^2\pi$ teljes felületen folyó I áramerősség

$$I_0 = j_0 R^2 \pi, \tag{14.13.1}$$

míg az $r < R$ sugárhoz tartozó $r^2\pi$ felületen

$$I(r) = j_0 r^2 \pi. \tag{14.13.2}$$

Ezekből

$$I(r) = I_0 \frac{r^2}{R^2}. \tag{14.13.3}$$

Az Ampère-törvény szerint

$$B(r) 2r\pi = \mu_0 I(r), \tag{14.13.4}$$

azaz

$$B(r) = \frac{\mu_0 I(r)}{2r\pi} = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi R^2}. \tag{14.13.5}$$

A mágneses energiasűrűség

$$\varepsilon_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{\mu_0 I_0^2 r^2}{8\pi^2 R^4}. \tag{14.13.6}$$

14.14. Feladat: (HN 32C-46) Oldjuk meg az előző feladatot azzal a változtatással, hogy a J áramsűrűség a henger sugara mentén lineárisan változik, azaz $J(r) = J_0 r$.
(a) Fejezzük ki a teljes I_0 áramot J_0 és R függvényeként.
(b) Adjuk meg a vezető belsejében hosszegységenként tárolt mágneses energia nagyságát.

Megoldás:
(a) A henger keresztmetszetén a felületelem $\mathrm{d}A = 2r\pi \mathrm{d}r$, amellyel r sugárhoz tartozó áram

$$I(r) = \int_0^r J(r)\mathrm{d}A = \int_0^r J_0 r 2r\pi \mathrm{d}r = 2\pi J_0 \int_0^r r^2 \mathrm{d}r = \frac{2\pi J_0}{3} r^3. \tag{14.14.1}$$

A teljes keresztmetszeten folyó áram

$$I_0 = I(R) = \frac{2\pi J_0}{3} R^3. \tag{14.14.2}$$

(b) Az Ampère-törvény szerint

$$B(r) 2r\pi = \mu_0 I(r), \tag{14.14.3}$$

azaz

$$B(r) = \frac{\mu_0 I(r)}{2r\pi} = \frac{\mu_0 j_0}{3} r^2. \tag{14.14.4}$$

A mágneses energiasűrűség

$$\varepsilon_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{\mu_0 j_0^2}{18} r^4. \tag{14.14.5}$$

A hosszegységenkénti energia a következő felületi integrál kiszámolását jelenti:

$$E_h = \int \varepsilon_B \mathrm{d}A = \int_0^R \varepsilon_B 2r\pi \mathrm{d}r = \int_0^R \frac{\mu_0 j_0^2}{18} r^4 2r\pi \mathrm{d}r = \int_0^R \frac{\mu_0 j_0^2 \pi}{9} r^5 = \frac{1}{54} \mu_0 j_0^2 \pi R^6. \tag{14.14.6}$$

14.15. Feladat: (HN 33B-4) Egy 25 cm hosszú, sűrűn tekercselt, 600 menetű szolenoidon 30 mA erősségű áram folyik it. Számitsuk ki H és B nagyságát a szolenoid középpontjában (a) ha a szolenoid légmagos és (b) ha a szolenoid magja 45 Permalloyból készült, melynek szuszceptibilitása a maximális telítési értéknek háromnegyede.

Megoldás: A szolenoid középpontjában

$$H = \frac{I \cdot N}{\ell} \tag{14.15.1}$$

$$B = \mu\frac{I \cdot N}{\ell} \qquad (\mu = \mu_r \cdot \mu_0) \tag{14.15.2}$$

ahol $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$. Mivel H képletében nem szerepel a permeabilitás az ugyanakkora lesz légmagos és vasmagos tekercsre. Légmagos tekercsre $\mu_r^{(1)} = 1$. A HN könyv 33-1 táblázatából a 45 Permalloy mágneses szuszceptibilitása $\chi = 25000$, ennek 3/4-ével ($\chi = 18750$) kell számolni a feladatban, vagyis $\mu_r^{(2)} = 1 + \chi = 18751$. Ezekkel az adatokkal

$$H^{(1)} = H^{(2)} = \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 600}{0,25} = 72\,\frac{A}{m} \tag{14.15.3}$$

$$B^{(1)} = \mu_0 \cdot H = 9.048 \cdot 10^{-5}\,\frac{Vs}{m^2} \tag{14.15.4}$$

$$B^{(2)} = \mu_0 \mu_r \cdot H = 1.697\,\frac{Vs}{m^2}. \tag{14.15.5}$$

14.16. Feladat: (HN 33B-8) Egy 50 cm kerületű toroid tekercs 1000 menetű és rajta 200 mA erősségű áram halad it. A vasmag olyan anyagból készült, amelynek telítési szuszceptibilitása 3000. (a) Számitsuk ki a B mágneses indukcióvektort a magban, ha anyaga 85%-ig telítődött. (b) Számitsuk ki a H mágneses térerősséget a tekercs belsejében. (c) Számitsuk ki B azon részét, amely csak tekercsben folyó áramtól ered.

Megoldás: Sűrűn tekercselt toroidra hasonló képletek adhatóak meg, mint szolenoidra, csak a tekercs hossza helyett a szolenoid középvonalának hosszát kell használni, ami az esetünkben - mivel a toroid átmérőjét nem adták meg, tehát elhanyagolhatónak tekinthetjük - $K = 0,5$ m. Behelyettesítve az egyes kérdésekre adott válaszok (célszerű először a (b) és utána az (a) kérdésre kiszámolni az eredményt):

$$b) \quad H = \frac{I \cdot N}{K} = \frac{0,2 \cdot 1000}{0,5} = 400\,\frac{A}{m} \tag{14.16.1}$$

$$a) \quad B = \mu_r \mu_o \cdot H = 1.257 \cdot 10^{-6} \cdot (3000 \cdot 0,85 + 1) \cdot 400 = 1,282\,T \tag{14.16.2}$$

$$c) \quad B_{lev} = \mu_o \cdot H = 1.257 \cdot 10^{-6} \cdot 400 = 5.027 \cdot 10^{-4}\,T. \tag{14.16.3}$$

14.17. Feladat: (HN 33C-9) Hosszú, vasmagos szolenoid sugara 1,25 cm; menetsűrűsége 1200 menet/m. Erre a tekercsre szorosan egy másik, 40 menetű tekercset is csévélünk, amelynek teljes ellenállása 5 Ω. Az utóbbi tekercs két kivezetését rövidre zárjuk. A szolenoidon 50 mA erősségű áramot indítunk, aminek következtében a vas mágnesesen teljesen telítődik. A második tekercsben a mágneses indukció változása következtében áram indukálódik. Számítsuk ki e tekercs valamely pontján áthaladó töltés mennyiségét.

Megoldás: Adatok: $r = 1,25$ cm; $N_1/l = 1200$ menet/m; $N_2 = 40$ menet; $R = 5\Omega$; $I = 50$ mA. A vas relatív mágneses permeabilitása $\mu_r = 5000$.
A lemágnesezéshez használt tér

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{IN_1}{l}, \tag{14.17.1}$$

amely a másik tekercsben

$$\Delta\Phi = N_2 \mu_0 \mu_r \frac{IN_1}{l} r^2 \pi \tag{14.17.2}$$

fluxusváltozást jelent. Az indukált feszültség nagysága

$$\varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \tag{14.17.3}$$

Ez az R ellenálláson

$$I' = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\Delta\Phi}{R\Delta t} \tag{14.17.4}$$

áramot jelent, amely a Δt idő alatt

$$Q = I'\Delta t = \frac{\varepsilon}{R}\Delta t = \frac{\Delta\Phi}{R} = N_2 \mu_0 \mu_r \frac{IN_1}{lR} r^2 \pi = 1,48 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{C}. \tag{14.17.5}$$

töltés átáramlását jelenti.

Váltakozó áramú áramkörök

14.18. Feladat: (HN 34A-6) Sorbakapcsolt RC körre ($R = 30\Omega$, $C = 10\mu$F) $U(t) = U_0 \cdot \sin\omega t$ feszültséget kapcsolunk. (Adatok: $U_0 = 100$ V; $\omega = 2500$ 1/s.)
(a) Mekkora az áramkör impedanciája?
(b) Adjuk meg az áramerősség időfüggését!
(c) Készítsük el az áramkör impedancia és feszültség-vektor diagramját!
(d) Számítsuk ki a kondenzátor elektromos erőterében tárolt maximális energiát!

Megoldás:

(a) Az áramkör impedanciája

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = 50\,\Omega. \tag{14.18.1}$$

(b) A körben folyó áram amplitúdója

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = 2\,\mathrm{A}, \tag{14.18.2}$$

a fázisszög

$$\phi = \mathrm{arctg}\left(-\frac{1/\omega C}{R}\right) = -53,1^0 = -0,927\,\mathrm{rad}. \tag{14.18.3}$$

Így az áramkörben folyó áram $I(t) = 2 \cdot \sin(2500t + 0,927)$ A.

(c) Az ohmikus és kapacitív elenállás $R = 30\Omega$ illetve $X_C = 1/\omega C = 40\Omega$. Az egyes áramköri elemeken eső feszültség maximuma $U_{R0} = 60$ V és $U_{C0} = 80$ V.

(d) A kondenzátor maximális energiája

$$E_C = \frac{1}{2} C U_{C0}^2 = 0,032\,\mathrm{J}. \tag{14.18.4}$$

14.19. Feladat: (HN 34A-7) Sorbakapcsolt RL körre ($R = 30\Omega$, $L = 15$ mH) $U(t) = U_0 \cdot \sin \omega t$ feszültséget kapcsolunk. (Adatok: $U_0 = 100$ V; $\omega = 2500$ 1/s.)

(a) Mekkora az áramkör impedanciája?

(b) Adjuk meg az áramerősség időfüggését!

(c) Készítsük el az áramkör impedancia és feszültség-vektor diagramját!

(d) Számítsuk ki a tekercs mágneses erőterében tárolt maximális energiát!

Megoldás:

(a) Az áramkör impedanciája

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} = 48,02\,\Omega. \tag{14.19.1}$$

(b) A körben folyó áram amplitúdója

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = 2,08\,\mathrm{A}, \tag{14.19.2}$$

a fázisszög

$$\phi = \mathrm{arctg}\left(\frac{L\omega}{R}\right) = 51,3^0 = 0.896\,\mathrm{rad}. \tag{14.19.3}$$

Így az áramkörben folyó áram $I(t) = 2,08 \cdot \sin(2500t - 0,896)$ A.

(c) Az ohmikus és az induktív reaktancia $R = 30\Omega$ illetve $X_L = L\omega = 37,5\Omega$. Az egyes áramköri elemeken eső feszültség maximuma $U_{R0} = 62,4$ V és $U_{L0} = 78$ V.

(d) A kondenzátor maximális energiája

$$E_L = \frac{1}{2} L I_0^2 = 0,032\,\mathrm{J}. \tag{14.19.4}$$

14.20. Feladat: (HN 34A-8) Sorbakapcsolt RLC körre ($R = 30\Omega$, $L = 15$ mH, $C = 10\mu$F) $U(t) = U_0 \cdot \sin \omega t$ feszültséget kapcsolunk. (Adatok: $U_0 = 100$ V; $\omega = 2500$ 1/s.)

(a) Mekkora az áramkör impedanciája?

(b) Adjuk meg az áramerősség időfüggését!

(c) Készítsük el az áramkör impedancia és feszültség-vektor diagramját!

Megoldás:

(a) Az áramkör impedanciája

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = 30,1\,\Omega. \tag{14.20.1}$$

(b) A körben folyó áram amplitúdója

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = 3,32\,\mathrm{A}, \tag{14.20.2}$$

a fázisszög

$$\phi = \mathrm{arctg}\left(\frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) = 4,76^0 = 0.083\,\mathrm{rad}. \tag{14.20.3}$$

Így az áramkörben folyó áram $I(t) = 2,08 \cdot \sin(2500t - 0,083)$ A.

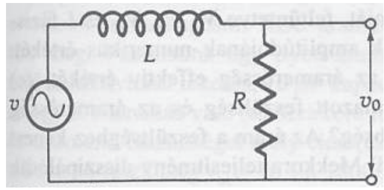
(c) Az ohmikus ellenállás, az induktív reaktancia illetve a kapacitív ellenállás $R = 30\Omega$, $X_L = L\omega = 37,5\Omega$ illetve $X_C = 1/\omega C = 40\Omega$. Az egyes áramköri elemeken eső feszültség maximuma $U_{R0} = 99,6$ V, $U_{L0} = 124,5$ V illetve $U_{C0} = 132,8$ V.

14.21. Feladat: (HN 34B-11) Tekintsünk egy fázistoló áramkört (91. ábra). A bemenetre adott feszültség $V(t) = V_{be} sin\omega t$ ($V_{be} = 10$ V; $\omega = 200$ 1/s). Ha $L = 500$ mH,

(a) számítsuk ki R értékét, hogy a kimeneten megjelenő V_0 feszültség 30^0-nyit késsen V-hoz képest és

(b) számítsuk ki a V_0 amplitúdóját.

Megoldás: X

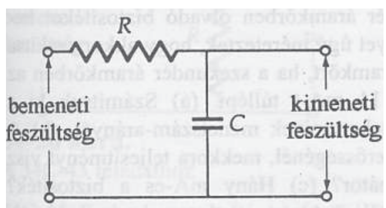


91. ábra.

14.22. Feladat: (HN 34B-12) A 92. ábrán látható áramkört aluláteresztő szűrőnek nevezik. A kondenzátor impedanciája nagyobb frekvenciákon kisebb, így a kimenő feszültség is kisebb. A szűrő karakterisztikus vagy ún. levágási frekvenciájánál a kimenő feszültség a bemenő feszültség $1/\sqrt{2}$-szerese.

(a) Fejezzük ki a levágási frekvenciát R és C függvényeként.

(b) Mekkora ezen a frekvencián a kimenő és bemenő feszültség közötti fáziskülönbség?



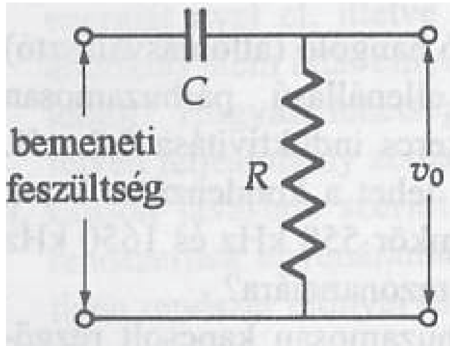
92. ábra.

Megoldás: X

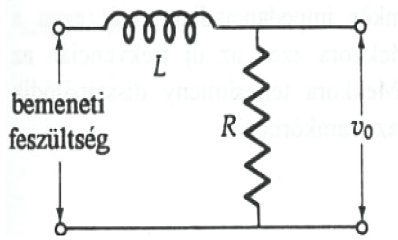
14.23. Feladat: (HN 34B-29) A 93. ábrán látható áramkört felüláteresztő szűrőként lehet használni. Elegendően nagy frekvenciákon, ha a bemenetre V_{eff} effektív értékű feszültséget kapcsolunk, az ellenálláson V_{eff}^2/R teljesítmény disszipálódik. Milyen frekvencián disszipálódik e teljesítmény fele?

Megoldás: X

14.24. Feladat: (HN 34C-43) Tekintsük a 94. ábrán látható áramkört. A bemenő feszültség időben (nem szükségszerűen szinuszosan) változik. Mutassuk meg, hogy a v_{ki} kimenő feszültség közelítőleg arányos a bemenő feszültség idő szerinti integráljával, ha az R ellenállás az induktiv



93. ábra.



94. ábra. A 34C-43 feladathoz

reaktanciánal sokkal kisebb (mindazon frekvenciák esetében, amelyek a bemenő jelben jelen vannak).

Megoldás: A v_{ki} kimenő feszültség az R ellenálláson eső $I \cdot R$ feszültség. Kirchoff huroktörvénye szerint

$$U_{be} - L\frac{dI}{dt} - I \cdot R = 0 \tag{14.24.1}$$

$$\frac{dI}{dt} + I \cdot \frac{R}{L} - \frac{U_{be}}{L} = 0. \tag{14.24.2}$$

Az induktiv reaktancia $X_L = \omega L$. Ha $R \ll \omega L$ minden ω-ra, akkor a második tag az I áramban jelen levő összes frekvenciára elhanyagolható[9] (közelítőleg 0), tehát az egyenlet leegyszerűsödik

$$\frac{dI}{dt} \approx \frac{U_{be}}{L} \tag{14.24.3}$$

Ennek megoldása

$$I(t) = \frac{1}{L}\int U_{be}\, dt. \tag{14.24.4}$$

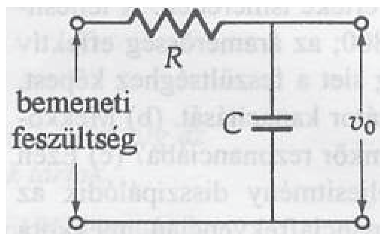
Tehát a kimenő feszültség közelítőleg valóban arányos a bemenő feszültség idő szerinti integrál-

[9]Pl. $\omega = 1\, s^{-1}$ -re is, amikor $\frac{R}{\omega L} = \frac{R}{L}$

jával.

$$v_{ki} = I(t) \cdot R = R \cdot \frac{1}{L} \cdot \int U_{be}\, dt. \tag{14.24.5}$$

14.25. Feladat: (HN 34C-49) Tekintsük a 95. ábrán látható áramkört. A bemenő feszültség időben (nem szükségszerűen szinuszosan) változik. Mutassuk meg, hogy a V_0 kimenő feszültség közelítőleg arányos a V bemenő feszültség idő szerinti integráljával, ha a kapacitív reaktancia az R ellenállásnál sokkal kisebb (mindazon frekvenciák esetében, amelyek a bemenő jelben jelen vannak.



95. ábra.

Megoldás: X

15. Feladatok az elektromágneses hullámok témaköréből

Az eltolódási áram

15.1. Feladat: (HN 35B-2) Síkkondenzátor lemezei l0 cm átmérőjűek és 1 mm-es távolságban vannak egymástól. Mekkora a mágneses indukcióvektor nagysága a kondenzátor szélénél, ha a kondenzátor lemezei közötti potenciálkülönbség 1000 V/s sebességgel nő? (Az elektromos erőtér inhomogenitását a lemezek szélénél el lehet hanyagolni.)

Megoldás: Jelölések: $D = 2r = 10$ cm, r a lemezek sugara; $d = 1$ mm; $\Delta U/\Delta t = 1000$ V/s.
Az elektromos térerősség változása

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{d}\frac{\Delta U}{\Delta t}. \tag{15.1.1}$$

Az gyik Maxwell-egyenlet értelmében a változó elektromos tér mágneses teret kelt, azaz

$$\oint B \mathrm{d}s = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\Delta E}{\Delta t} r^2 \pi. \tag{15.1.2}$$

Ebből következik, hogy

$$B2r\pi = \mu_0\varepsilon_0 \frac{1}{d}\frac{\Delta U}{\Delta t} r^2\pi, \tag{15.1.3}$$

amelyből a mágneses indukció

$$B = \frac{\mu_0\varepsilon_0 r}{2d}\frac{\Delta U}{\Delta t} = 2,78 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{Vs/m^2}. \tag{15.1.4}$$

15.2. Feladat: (HN 35B-4) Egy 0,5 μF-os síkkondenzátort 100 Ω-os ellenálláson keresztül 9 V-os telepről töltünk. Számítsuk ki a kondenzátoron folyó eltolódási áramot a töltés megkezdése után 50 μs eltelte után.

Megoldás: Jelölések: $C = 0,5\ \mu$F; $R = 100\ \Omega$; $\varepsilon = 9$ V; $t = 50\ \mu$s.
Az eltolódási áram

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \tag{15.2.1}$$

ahonnan a kérdezett időpontban

$$I = 0,0332\,\mathrm{A}. \tag{15.2.2}$$

Elektromágneses hullámok

15.3. Feladat: (HN 35A-8) Az elektromágneses hullám mágneses indukcióvektorának az amplitúdója vákuumban $3 \cdot 10^{-8}$ T.
(a) Számítsuk ki a megfelelő elektromos térerősség amplitúdóját.
(b) Ha az elektromos térerősség -y irányú és a hullám -x irányban terjed, milyen irányú a mágneses indukcióvektor?

Megoldás:
(a) Ha a mágneses indukcióvektor amplitúdója $B_0 = 3 \cdot 10^{-8}$ T, akkor az elektromos térerősség amplitúdója

$$E_0 = B_0 c = 9\,\mathrm{V/m}. \tag{15.3.1}$$

(b) A mágneses indukcióvektor +z irányú.

15.4. Feladat: (HN 35A-13) Az URH rádió által vett elektromágneses hullám elektromos térerősség-komponensének amplitúdója $5 \cdot 10^{-5}$ V/m.
(a) Mekkora az ehhez tartozó mágneses indukcióvektor amplitúdója?
(b) Számítsuk ki a hullám intenzitását.

Megoldás: Jelölés: $E_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ V/m
(a) A mágneses indukció amplitúdója

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 1,67 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{Vs/m^2}. \tag{15.4.1}$$

(b) A hullám intenzitása

$$I = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 = 3,32 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}. \tag{15.4.2}$$

15.5. Feladat: (HN 35B-15) Egy +x irányban terjedő elektromágneses síkhullám elektromos térerősség-komponensét SI egységekben az $\mathbf{E} = 6\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right]\sin(kx - 10^{16}\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right]t)\mathbf{j}$ függvény írja le.
(a) Írjuk fel a mágneses indukcióvektor jellemző képletét is.
(b) Számítsuk ki a sugárzás hullámhosszát.
(c) Számítsuk ki a sugárzás átlagos energiasűrűségét.

Megoldás: Jelölés: $E_0 = 6$ V/m, $\omega = 10^{16}$ 1/s.
(a) A mágneses indukcióvektor

$$\mathbf{B} = 2 \cdot 10^{-8}\left[\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}\right]\sin(kx - 10^{16}\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right]t)\mathbf{k}. \tag{15.5.1}$$

(b) A terjedési sebesség $c = \omega/k$, ahonnan a k (cirkuláris) hullámszám

$$k = \frac{\omega}{c}, \tag{15.5.2}$$

amellyel a hullámhossz

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = 1,88 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}. \tag{15.5.3}$$

(c) A sugárzás energiasűrűsége

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 = 1,59 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J/m^3}. \tag{15.5.4}$$

15.6. Feladat: (HN 35B-17) Impulzuslézer 4 ns hosszúságú, 2 J energiájú fényimpulzusokat ad le. A fénynyaláb átmérője 3 mm.
(a) Számitsuk ki a kibocsátott fénynyaláb hosszát.
(b) Számitsuk ki a fénynyaláb energiasűrűségét (J/m^3 egységben).
(c) Mekkora a hullám E_o, elektromos térerősség komponensének az amplitúdója?

Megoldás: Jelölések: $t = 4 \cdot 10^{-9} s$, $\varepsilon = 2 J$, $d = 3 \cdot 10^{-3} m$ és $A = \dfrac{d^2 \pi}{4}$
(a) A fénynyaláb hossza $l = c \cdot t = 1,199 m$.
(b) Energiasűrűsége $w = \dfrac{\varepsilon}{A\, l} = \dfrac{4\,\varepsilon}{l\, d^2 \pi} = 2.360 \cdot 10^5 \, \frac{J}{m^3}$
(c) E amplitudója:
A $\mathbf{S} = \dfrac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ Poynting vektor megadja a terjedési irányra merőleges egységnyi felületen, időegység alatt átáramló energia mennyiségét. Vákumban $\mu \equiv \mu_o$. Az EM hullámokban **E** és **B** egymásra merőlegesek, továbbá $E = c B$ ezért $B = \dfrac{E}{c}$, vagyis

$$S = |\mathbf{S}| = \frac{1}{\mu_o} E \cdot B = \frac{E^2}{c\, \mu_o} \tag{15.6.1}$$

A lézer fényét elektromágneses síkhullámnak tekinhetjük, amiben a nyaláb keresztmetszetén t idő alatt ε energia áramlik át. Ez kifejezhető a Poynting vektor periodusidőre vett integráljával, vagy, ekvivalens módon, a Poynting vektor átlagának, a nyaláb keresztmetszetének és az időnek a szorzatával,azaz

$$\begin{aligned} \varepsilon &= < S > \frac{d^2 \pi}{4} t \\ &= \frac{1}{c\, \mu_o} < E^2 > \frac{d^2 \pi}{4} t \end{aligned} \tag{15.6.2}$$

$$< E^2 > = \frac{4\, \varepsilon\, c\, \mu_o}{d^2\, \pi\, t} \tag{15.6.3}$$

Ha E harmonikus (színusz, vagy koszinusz) függvény, akkor négyzetének átlaga helytől függetlenül az amplitudójának éppen a fele[10]:

$$< E^2 > = \frac{1}{T} \int_0^T E_o^2 \, sin^2(\omega t - k x)\, dt = \frac{1}{2} E_o^2 \tag{15.6.4}$$

[10]

$$\begin{aligned} < E^2 > &= \frac{1}{T} \int_0^T E_o^2 \, sin^2(\omega t - k x) dt = \frac{1}{T} \int_0^T E_o^2 \, \frac{1 - cos2(\omega t - k x) dt}{2} \\ &= E_o^2 \frac{1}{T} \left[\frac{t}{2} \right]_0^T - E_o^2 \frac{1}{2T} \int_0^T cos2(\omega t - k x) dt = \frac{E_o^2}{2} - \frac{E_o^2}{4 \omega T} \left[sin2(\omega t - k x) \right]_0^T \\ &= \frac{E_o^2}{2} - \frac{E_o^2}{4 \omega T} \left(sin2(2\pi - k x) - sin(-2 k x) \right) = \frac{E_o^2}{2} \end{aligned}$$

Tehát (15.6.3)-ből

$$E_o = \sqrt{\frac{2\cdot 4\cdot \varepsilon\, c\, \mu_o}{d^2\, \pi\, t}} \tag{15.6.5}$$

$$= \sqrt{\frac{8\cdot 2J\cdot 1.257\cdot 10^{-6}\dfrac{V\,s}{A\,m}\cdot 2.998\cdot 10^{8}\dfrac{m}{s}}{(3\cdot 10^{-3})^2\, m^2\, 3.1415}} = 2.309\cdot 10^{8}\frac{V}{m}. \tag{15.6.6}$$

15.7. Feladat: (HN 35A-22) Egy 100 mW-os lézernyaláb egy tükörről merőlegesen visszaverődik. Mekkora erő hat a tükörre?

Megoldás: Jelölés: $P_{telj} = 100$ mW.
A sugárzás U energiája és p impulzusa között összefüggés:

$$U = pc. \tag{15.7.1}$$

Az t időegységgel osztva a P_{telj} teljesítmény és az F erő között a

$$P_{telj} = F c \tag{15.7.2}$$

kapcsolat áll fenn. Mivel tökéletes visszaverődésről van szó, így az impulzus változás és – ennek megfelelően – az erőhatás kétszeres lesz, azaz

$$F = \frac{2P_{telj}}{c} = 6,66\cdot 10^{-10}\,\mathrm{N}. \tag{15.7.3}$$

15.8. Feladat: (HN 35A-23) Tiszta időben a Föld felszínen a napfény intenzitása 840 W/m^2. Ha egy, a napsugarakra merőleges felület tökéletesen reflektál, mekkora rajta a sugárnyomás?

Megoldás: Tökéletes reflexió esetén a sugárnyomás

$$p_{ny} = \frac{2I}{c} = 5,6\cdot 10^{-6}\,\mathrm{N/m^2}, \tag{15.8.1}$$

ahol I a napfény intenzitása.

15.9. Feladat: (HN 35B-25) Egy 15 mW teljesitményű hélium-neon lézer kör keresztmetszetű fénynyalábot bocsát ki. A nyaláb átmérője 2 mm, a fény hullámhossza 632,8 nm.
(a) Mekkora a nyalábban az elektromos tererösség maximális értéke?

(b) Mekkora energia van a nyaláb 1 méteres szakaszában?

(c) Mekkora impulzusa van a nyaláb 1 méteres szakaszának?

Megoldás:

(a) Jelöljük P, d, λ, E_o-val rendre a teljesítményt, átmérőt, hullámhosszat és a térerősség amplitúdóját!

Első megoldás: Poynting vektorral

Ez a feladat csak annyiban különbözik az előzőtől, hogy most a teljesítmény van megadva és nem a leadott teljes energia és az energialeadás ideje. Vagyis a 15.6.5 képletbe ε/t helyére kell P-t helyettesíteni:

$$\begin{aligned} E_o &= \sqrt{\frac{2\cdot 4\cdot P\,c\,\mu_o}{d^2\,\pi}} = \\ &= \sqrt{\frac{8\cdot 15\cdot 10^{-3}\,W\cdot 1.257\cdot 10^{-6}\frac{V\,s}{A\,m}\cdot 2.998\cdot 10^{8}\frac{m}{s}}{(2\cdot 10^{-3})^2\,m^2\,3.1415}} \\ &= \underline{1.897\cdot 10^3\frac{V}{m}} \end{aligned} \tag{15.9.1}$$

Második megoldás: Energiasűrűséggel

A $T = \dfrac{\lambda}{c}$ periódusidő alatt kisugárzott energia $w = P\cdot T$ és ez az energia egy $V = d^2\,\pi\,\lambda/4$ térfogatban oszlik el. Az átlagos energiasűrűség

$$\begin{aligned} < w > &= \frac{\Delta w}{V} = \frac{4\,P\cdot T}{d^2\,\pi\,\lambda} = \frac{4\,P}{d^2\,\pi\,c} \\ < w > &= \frac{4\,P}{d^2\,\pi\,c} \end{aligned} \tag{15.9.2}$$

Ugyanakkor vákumban

$$< w >= \frac{1}{2}\left(\varepsilon_o < E^2 > + \frac{1}{\mu_o} < B^2 >\right) \tag{15.9.3}$$

A lézer által kisugárzott fény egy EM síkhullám, tehát az elektromos és mágneses energasűrűség átlagai benne egyenlőek[11]

$$\varepsilon_o < E^2 >= \frac{1}{\mu_o} < B^2 > \tag{15.9.9}$$

$$\begin{aligned} < w > &= \varepsilon_o < E^2 > \\ &= \varepsilon_o E_o^2 \cdot < sin^2(kx - \omega t) > \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_o E_o^2 \end{aligned} \tag{15.9.10}$$

ahonnan, mivel $< w >= P \cdot T$

$$\begin{aligned} E_o &= \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot P}{d^2 \pi \varepsilon_o c}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 15 \cdot 10^{-3} W}{(2 \cdot 10^{-3})^2 m^2 \, 3.1415 \, 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} 2,998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}} \\ &= \underline{1,897 \cdot 10^3 \, \frac{V}{m}} \end{aligned} \tag{15.9.11}$$

(b) A nyaláb $l = 1\,m$ hosszúságú darabjában levő energia:

$$\varepsilon = P \cdot t_l = P \cdot \frac{l}{c} = 15 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{2.998 \cdot 10^8} = 5.004 \cdot 10^{-11} J \tag{15.9.12}$$

(c) A fény impulzusa és energiája közötti kapcsolat:

$$p = \frac{\varepsilon}{c} = 1.669 \cdot 10^{-19} \, kg\, m/s. \tag{15.9.13}$$

15.10. Feladat: (HN 35C-33) Elektromágneses sugárzást kibocsátó forrás hosszú egyenes mentén sugároz (vonalforrás); teljesítménye méterenként 20 W. Mekkora az elektromos térerősség amplitúdója a vonalforrástól 5 m-re?

[11]Levezetés: $cB = E$, $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}}$, azaz $B = \sqrt{\varepsilon_o \mu_o} E$

$$< w > = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_o < E^2 > + \frac{1}{\mu_o} < B^2 >\right) \tag{15.9.4}$$

$$= c\frac{1}{2}\left(\varepsilon_o < E^2 > + \varepsilon_o < E^2 >\right) \tag{15.9.5}$$

$$= \varepsilon_o < E^2 >= \varepsilon_o < E_o^2 \cdot sin^2(kx - \omega t) > \tag{15.9.6}$$

$$= \varepsilon_o E_o^2 \cdot < sin^2(kx - \omega t) > \tag{15.9.7}$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_o E_o^2 \tag{15.9.8}$$

Megoldás: Jelölések: $P = 20$ W /nem feledve, hogy méterenként/; $r = 5$ m. Mivel vonalforrásról van szó, így egy r sugarú és $l = 1$ m hengerpalásttal számolunk. /Itt vesszük figyelembe az méterenkénti hosszt./

A kisugárzott S energiaáram sűrűség egyrészt az

$$S = \frac{P}{2r\pi l}, \tag{15.10.1}$$

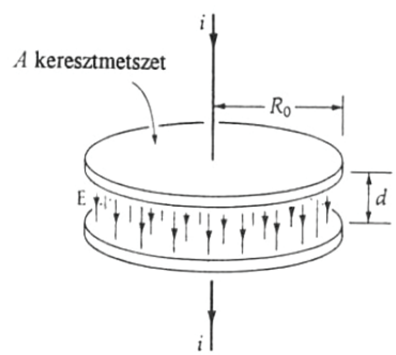
másrészt az

$$S = \frac{1}{2\mu_0}E_0B_0 = \frac{1}{2\mu_0 c}E_0^2 \tag{15.10.2}$$

alakban írható fel. A (15.10.1) és (15.10.2) egyenletek egyenlőségéből a térerősség amplitúdója

$$E_0 = \sqrt{\frac{p\mu_0 c}{r\pi l}} = 21,9\,\mathrm{V/m}. \tag{15.10.3}$$

15.11. Feladat: (HN 35C-37) Síkkondenzátort i áramerősséggel töltünk (96. ábra).



96. ábra. A 35C-37 feladathoz

(a) Mutassuk meg, hogy mialatt az elektromos térerösség növekszik, az **S** Poynting-vektor a lemezek közötti térben mindenütt a kondenzátor tengelye felé mutat. (A lemezek szélénél a térerősség inhomogenitásait figyelmen kivül hagyhatjuk.)

(b) Ha a Poynting vektort a kondenzátort körbevevő hengerpalást mentén integráljuk, akkor a felület által bezárt térrészbe áramló energia nagyságát kapjuk meg. Mutassuk meg, hogy ez az energiaáram egyenlő a kondenzátor elektromos erőterében tárolt energia növekményével. (Ebben az értelemben, a kondenzátor energiája nem az áramvezető huzalokon keresztül, hanem a környező térből „érkezik".)

Megoldás:

(a)

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_o}\mathbf{E}\times\mathbf{B} \tag{15.11.1}$$

Ha **E** változik, akkor ennek hatására önmagukba záródó mágneses erővonallakkal jellemezhető **B** tér indukálódik a

$$\frac{1}{\mu_o}\oint \mathbf{B}\,d\mathbf{s} = \int \varepsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,d\mathbf{A} \tag{15.11.2}$$

egyenlet szerint. Az indukált mágneses tér merőleges az elektromos tér változására és egy adott r távolságban a kondenzátor tengelyétől mindenhol ugyanakkora nagyságú. Amennyiben $d\mathbf{s}$-et **H**-val párhuzamosnak választjuk a baloldali integrál:

$$\frac{1}{\mu_o}\oint \mathbf{B}\,d\mathbf{s} = 2\pi r\frac{1}{\mu_o}B. \tag{15.11.3}$$

A jobboldali integrált a baloldali integrálás zárt görbéjére illeszkedő tetszőleges felületre kell venni. Legyen ez a felület a kondenzátorlemezekkel párhuzamos körlap. Mivel a lemezek között mind **E**, mind $\frac{d\mathbf{E}}{dt}$ homogén és lefelé mutat, vagyis párhuzamos a felület normálvektorával, ez az integrál is egyszerűen kiszámítható:

$$\int \varepsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,d\mathbf{A} = \varepsilon_o\frac{dE}{dt}\cdot r^2\pi \tag{15.11.4}$$

Behelyettesítve 15.11.2 egyenletbe

$$2\frac{1}{\mu_o}B = \varepsilon_o r\frac{dE}{dt} \tag{15.11.5}$$

$$B = \frac{1}{2}\mu_o\varepsilon_o r\frac{dE}{dt} \tag{15.11.6}$$

Az **E** vonalak az ábrán lefelé mutatnak. Az **E** nő, ezért $\Delta\mathbf{E}$ változása azonos irányú vele, vagyis a mágneses erővonalak a lemezek síkjával párhuzamos, a pozitív lemez irányából nézve az óramutató járásával megegyező irányú, körök. **S** iránya minden pontban mind **E**-re, mind **B**-re merőleges, így a kondenzátor tengelye felé (befelé) mutat. **S** integrálja a kondenzátort körülvevő hengerpalástra [12] megadja az energiaáramlás fluxusát:

$$\begin{aligned}\Phi(\varepsilon) &= \oint \mathbf{S}\,d\mathbf{A} = 2\pi r d\cdot|\mathbf{S}| = 2\pi r d\cdot E\cdot\frac{1}{\mu_o}B\\ &= 2\pi r d\cdot E\cdot\frac{1}{2}\varepsilon_o r\frac{dE}{dt}\\ &= \varepsilon_o r^2\pi d E\frac{dE}{dt}\end{aligned} \tag{15.11.7}$$

[12] A dA felületelem irányát a tengely felé mutató irányba vesszük fel.

Mivel ez a kondenzátor belseje felé mutat a kondenzátor energiája időegységenként ennyivel növekszik.

$$\Delta\varepsilon_C(\Delta t) \quad = \quad \Phi(\varepsilon)\Delta t = \varepsilon_o r^2 \pi E \frac{dE}{dt} \Delta t\, d \tag{15.11.8}$$

A kondenzátor energiájának kis Δt idő alatti növekedését az árammal is kiszámolhatjuk:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_C(\Delta t) &= \Delta q \cdot U_C = i \cdot \Delta t \cdot U_C & (15.11.9)\\ &= i \cdot \Delta t \cdot E \cdot d = i \cdot E \cdot \Delta t \cdot d & (15.11.10) \end{aligned}$$

Az i áram azonban a lemezek között nulla. Nagysága azonban megegyezik a $j_{elt} = \varepsilon_o \frac{dE}{dt}$ *eltolási áramsűrűség*

$$i_{elt} = j_{elt} A = \varepsilon_o \frac{dE}{dt} \cdot A \tag{15.11.11}$$

fluxusával, az i_{elt} *eltolási árammal*, ahol $A = r^2 \pi$. Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_C(\Delta t) &= \varepsilon_o \frac{dE}{dt} \cdot r^2 \pi E \cdot \Delta t \cdot d \\ &= \varepsilon_o r^2 \pi E \frac{dE}{dt} \Delta t\, d & (15.11.12) \end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy 15.11.8 és 15.11.12 valóban megegyeznek. A feladat állítását ezzel igazoltuk.

16. Feladatok a geometriai optika témaköréből

Fénytörés

16.1. Feladat: (HN 37B-2) Ha keskeny lézernyaláb vastag üveglemezről verődik vissza, akkor két párhuzamos nyaláb keletkezik. Az egyik a lemez előlapjáról, a másik a lemez hátlapjáról verődik vissza. Tegyük fel, hogy a beesési szög θ, a lemez vastagsága D, a lemez üvegének törésmutatója n. Adjuk meg a két visszavert sugár merőleges d távolságát θ, D és n függvényében.

Megoldás: X

16.2. Feladat: (HN 37B-11) Nyugodt vizű tó fenekén lévő hal a vízfelszín felett a tájnak, a haltól induló, függőleges tengelyű körkúpba eső részét láthatja. Számoljuk ki azt a térszöget (szteradiánokban), amelyet a hal szeme befog.

Megoldás: X

16.3. Feladat: (HN 37C-37) Vezessük le a Snellius fénytörési törvényt a Fermat-elvből kiindulva.

Megoldás: Legyen a két közeg határa az x tengely. Az x tengely feletti anyag törésmutatója n_1, a tengely alatti anyag törésmutatója n_2. A fénysugár induljon az n_1 közeg (x_1, y_1) pontjából és érkezzen meg az n_2 közeg $(x_2, -y_2)$ pontjába. Az áthaladási pont koordinátája $(x, 0)$. Az x koordináták között álljon fenn: $x_1 < x < x_2$. A Fermat-elv értelmében az optikai út (eikonál) minimális:

$$S(x) = \int_{(1)}^{(2)} n\,ds = n_1\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2}+n_2\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2} = \text{min.}, \tag{16.3.1}$$

azaz

$$\frac{dS(x)}{dx} = 0 = n_1 \underbrace{\frac{x-x_1}{(x-x_1)^2+y_1^2}}_{\sin\alpha} + n_2 \underbrace{\frac{x_2-x}{(x_2-x)^2+y_2^2}}_{\sin\beta}. \tag{16.3.2}$$

Itt α a beesési, β a törési szög. Az összefüggést más alakban írva:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}, \tag{16.3.3}$$

amit bizonyítani akartunk.

17. Feladatok a hullámoptika témaköréből

Interferencia

17.1. Feladat: (HN 38A-3) Kétréses kísérletben a nátriumlámpa fénye ($\lambda_1 = 589$ nm) egymástól $d_1 = 1,8$ mm-re lévő csíkokat hoz létre az ernyőn. Mekkora lesz a csíkok közti távolság, ha higanygőzlámpával ($\lambda_2 = 436$ nm) világítjuk meg a réseket?

Megoldás: A nátriumlámpa fényére az erősítések helyei

$$d\sin\theta = m\lambda_1, \tag{17.1.1}$$

ahol d a két rés közötti távolság. Ha kis szögeket tekintünk, akkor ehelyett írhatjuk, hogy

$$d\theta = m\lambda_1. \tag{17.1.2}$$

Az ernyőn a csíkok helyzetét az

$$x_1 = L\mathrm{tg}\theta \sim L\theta = m\frac{L}{d}\lambda_1, \tag{17.1.3}$$

ahol L az ernyő résektől való távolsága. Két csík közötti távolság

$$d_1 = \frac{L}{d}\lambda_1. \tag{17.1.4}$$

Hasonló összefüggés áll fenn a higanygőz lámpa fényre:

$$d_2 = \frac{L}{d}\lambda_2. \tag{17.1.5}$$

E két egyenletből a higanygőz lámpa csíkjainak távolsága

$$d_2 = d_1\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1,33\,\mathrm{mm}. \tag{17.1.6}$$

17.2. Feladat: (HN 38B-8) A hélium-neon lézer (λ = 633 nm) sugárnyalábját egy ernyőre irányítjuk. Hány hullámhossznyival nő meg az optikai úthossz, ha a nyaláb útjába merőlegesen $d = 0,11$ mm vastag, $n = 1,55$ törésmutatójú üveglapot helyezünk?

Megoldás: A d úthosszon

$$N_1 = \frac{d}{\lambda} = 173,78 \tag{17.2.1}$$

hullám fér el. Az n törésmutatójú üvegben a hullámhossz

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}, \tag{17.2.2}$$

így a d távolságban

$$N_2 = \frac{d}{\lambda/n} = \frac{nd}{\lambda} = 269,35 \tag{17.2.3}$$

hullám fér el. A kettő közötti különbség 95,57 hullámhossznyi.

17.3. Feladat: (HN 38B-12) Kettős rést 600 nm hullámhosszúságú fénnyel világitunk meg és ezzel egy ernyőn interferenciát hozunk létre. Ezután igen vékony flintüvegből (n = 1,65) készült lemezt helyezünk csak az egyik résre. Ennek következtében az interferenciakép főmaximuma pontosan oda tolódik el, ahol az eredeti elrendezésben a tizedrendü maximum volt. Számitsuk ki ebből, hogy milyen vastag volt az üveglemez!

Megoldás: Legyen a rések távolsága d, az üveglemez vastagsága w! Az üveglemez behelyezése előtt az intenzitásmaximum a rések középvonalában volt, ami a zérus fáziskülönbséghez tartozik. Az üveglemez behelyezése után a zérus fáziskülönbségű hely pozició́ja eltolódik, mégpedig úgy, hogy az üveglemez fázistolását az üveglemezzel nem fedett résen áthaladó fény hosszabb útja kompenzálja. Ha az ernyő távolsága elég nagy, a két résen áthaladó fénysugarak párhuzamosaknak tekinthetőek. A tizedik maximumhoz tartozó α_{10} szög a flintüveg nélküli esetben így a

$$\Delta s^{\text{levegő}} = 10\,\lambda$$

$$d \cdot sin\,\alpha_{10} = 10\,\lambda \tag{17.3.1}$$

egyenletből kapható meg. A w vastagságú flintüveg behelyezése $\Delta\,\Phi$-vel megváltoztatja az illető résen áthaladó fényhullám fázisát. Hogy mennyivel azt úgy kaphatjuk meg, hogy kiszámoljuk mindkét résre a w úthosszhoz tartozó fázisokat és ezeket kivonjuk egymásból. Az üveglemezzel nem fedett rés esetén ezt a távolságot a fény a levegőben teszi meg, a másik résnél üvegben, ahol nagyobb az optikai úthossz[13]. :

$$\Delta\,\Phi_{\text{levegő}} = 2\,\pi\,\frac{w}{\lambda}$$

$$\Delta\,\Phi_{\text{üveg}} = 2\,\pi\,\frac{w}{\lambda_{\text{üveg}}} = 2\,\pi\,\frac{w \cdot n}{\lambda}$$

$$\Delta\,\Phi = \Delta\,\Phi_{\text{üveg}} - \Delta\,\Phi_{\text{levegő}} = 2\,\pi\,\frac{w \cdot (n-1)}{\lambda} \tag{17.3.2}$$

ami az optikai úthosszkülönbségekkel is kiszámítható:

$$s_0 = w \qquad \text{optikai úthossz levegőben}$$

$$s_{\text{üveg}} = n \cdot w \qquad \text{optikai úthossz az üvegben}$$

$$\Delta\,s = s_{\text{üveg}} - s_0 = w \cdot (n-1) \tag{17.3.3}$$

$$\Delta\,\Phi = 2\,\pi\,\frac{\Delta\,s}{\lambda} = 2\,\pi\,\frac{w \cdot (n-1)}{\lambda} \tag{17.3.4}$$

Vegyük észre, hogy az optikai úthossz 17.3.3 képletében a hullámhossz nem szerepel.

A flintüveggel a zéró fáziskülönbséghez tartozó szög meg kell egyezzen α_{10}-el:

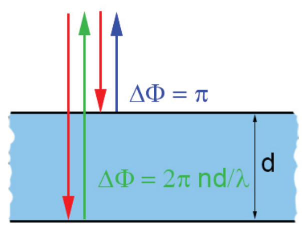
$$\begin{aligned} \Delta\,s &= d \cdot sin\,\alpha_{10}\ (= 10\,\lambda) \\ w \cdot (n-1) &= 10\,\lambda \\ \underline{w} &= \frac{10\,\lambda}{n-1} = \frac{10 \cdot 6 \cdot 10^{-7}}{0,65} = \underline{9.23 \cdot 10^{-6}\,m} \end{aligned} \tag{17.3.5}$$

A flintüveg lemez vastagsága tehát 0,00923 mm.

[13] A két közegben a fény sebessége és hullámhossza más a frekvenciája ($\nu = c(n)/\lambda = c/(n \cdot \lambda)$) viszont nem.

17.4. Feladat: (HN 38A-16) Adjuk meg annak a legvékonyabb szappanhártyának (n = 1,33) a vastagságát, amely a legnagyobb intenzitással a 400 nm hullámhosszúságú kék fényt veri vissza.

Megoldás: Legyen a szappanhártya levegőben. A beeső fény a 38-16a ábra szerint a szappanhártya mindkét felületén visszaverődik[14]. A két visszavert hullám interferenciája adja meg a teljes



97. ábra. A 38A-16 feladathoz

visszavert hullámot. Maximális akkor lesz a visszavert intenzitás, ha a két visszavert hullám optikai útjának különbsége a hullámhossz egész számú többszöröse ($\Delta s = m \cdot \lambda$), vagyis a fáziskülönbség $\Delta \Phi = 2\pi \cdot m$, ahol $m = 0, 1, 2, \ldots$ Figyelembe kell azonban azt is venni, hogy amikor a fényhullám optikailag sűrűbb közegről verődik vissza akkor egy $\lambda/2$ útkülönbségnek megfelelő π nagyságú fázisugrás történik mig az optikailag ritkább közeg határfelületéről visszaverődésnél nincs fázisugrás. Az ábra alapján

$$\Delta s_u = 2dn \quad \text{optikai útkülönbség a szappanhártyában} \tag{17.4.1}$$

$$\Delta s_f = \frac{1}{2}\lambda \quad \text{fázisugrás} \tag{17.4.2}$$

$$\Delta s = 2dn - \frac{1}{2}\lambda \quad \text{teljes optikai útkülönbség} \tag{17.4.3}$$

$$\Delta \Phi = 2\pi \frac{\Delta s - \frac{1}{2}\lambda}{\lambda} \quad \text{teljes fáziskülönbség} \tag{17.4.4}$$

Maximális amplitudó eléréséhez a teljes optikai útkülönbségnek $m\lambda$-val kell megegyeznie, vagyis (17.4.3)-t felhasználva

$$2dn - \frac{1}{2}\lambda = m \cdot \lambda \tag{17.4.5}$$

$$d = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda}{2n} \qquad m = 0, 1, 2, \cdots \tag{17.4.6}$$

[14] Az ábrán a beeső és visszavert hullámokat párhuzamos vonalak adják meg, a valóságban az ezekre a vonalakra merőleges hullámfelületek interferálnak.

Behelyettesítve a hullámhosszat az első három lehetőség a maximális reflexió eléréséhez

$$d_0 = \frac{\frac{1}{2}400\cdot 10^{-9}}{21,33} = 7,519\cdot 10^{-8}\,\mathrm{m} \tag{17.4.7}$$

$$d_1 = \frac{\frac{3}{2}400\cdot 10^{-9}}{21,33} = 2,256\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} \tag{17.4.8}$$

$$d_2 = \frac{\frac{5}{2}400\cdot 10^{-9}}{21,33} = 3,759\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} \tag{17.4.9}$$

Tehát a legvékonyabb szappahártya, amelyik a legnagyobb intenzitással a 400 nm hullámhosszúságú kék fényt veri vissza $7,519\cdot 10^{-8}$ m vastag.

17.5. Feladat: (HN 38B-19) Víz felszínén úszó olajréteg (n = 1,45) merőlegesen beeső fehér fénnyel van megvilágítva. A folt d = 280 nm vastag. Adjuk meg, hogy melyik szín dominál

(a) a visszavert fényben és

(b) az átmenő fényben!

Megoldás: Mindkét esetben az a fény dominál, amelyikre erősítés van.

(a) A visszavert fényben két nyaláb interferenciáját tekintjük. Az egyik a felületről verődik vissza. A nagyobb törésmutatójú közeg miatt a visszavert nyaláb π fázisugrás szenved, amely $\lambda/2$ úthosszkülönbségnek felel meg. A másik nyaláb az olajban halad, majd a víz felszínén reflektálódik. Az optikai úthossz $2nd$. Mivel a feladat nem tartalmazza a víz törésmutatóját, így ha kisebb mint az olajé, akkor nincs fázisugrás, ha nagyobb, akkor π.

A kisebb törésmutató esetén erősítés feltétele

$$2nd - \frac{1}{2}\lambda = m\lambda. \tag{17.5.1}$$

A látható tartományba eső hullámhossz $\lambda = 541$ nm.

A nagyobb törésmutató esetén az erősítés feltétele

$$2nd = m\lambda, \tag{17.5.2}$$

ahonnan $\lambda = 406$ nm.

(b) A feladatrész az előzőhöz hasonló meggondolásokkal oldható meg.

17.6. Feladat: (HN 39A-1) Résen elhajló 550 nn hullámhosszúságú fény diffrakciós képét a réstől 3 m távolságra lévő ernyőn fogjuk fel. A centrális maximum két oldalán lévő harmadrendű minimumok távolsága 25 mm. Mekkora a rés szélessége?

Megoldás: Adatok: $\lambda = 550$ nm; $L = 3$ m; $D = 25$ mm.

Rés esetén a minimumok az

$$m\lambda = \sin\theta \quad (m = 1,2,\ldots,n) \tag{17.6.1}$$

összefüggésből határozhatjuk meg, ahol m a kioltási helyek sorszáma, θ az elhajlás szöge. (Ne feledjük, hogy középen erősítés van!) Mivel két harmadrendű (m=3 és m=-3 szimmetrikusan) vonal távolsága adott, így elég a félszögre vonatkozó adatokkal számolni. Így pl. az m=3-hoz tartozó elhajlási szög

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{D/2}{L}. \tag{17.6.2}$$

Felhasználva, hogy kis szögekre a $\sin\theta = \mathrm{tg}\theta$ közelítés alkalmazható, a rész szélességére az

$$a = \frac{m\lambda}{\sin\theta} = \frac{2m\lambda L}{D} \tag{17.6.3}$$

adódik. Az adatok behelyettesítésével: $a = 0,4$ mm.

17.7. Feladat: (HN 39-A2) Egy rést az 550 nm hullámhosszúságú fény világít meg és a réstől 3 m-re lévő ernyőn elhajlási kép alakul ki. Határozzuk meg a centrális maximum teljes szélességét, ha a rés (a) 0,2 mm és (b) 0,4 mm szélességű.

Megoldás: Egy résre

$$d \cdot sin\,\alpha = m \cdot \lambda \qquad m = 1,2,3,\cdots \qquad \text{minimumok} \tag{17.7.1}$$

Jelöljük a hullámhosszat λ-val, az ernyő távolságát L-lel és a rés szélességét d-vel! A centrális maximum teljes W szélessége megegyezik az $m = 1$-hez tartozó minimumok távolságával, ami az első minimumokhoz tartozó $\alpha_{min,1}$ szöggel számolható ki:

$$\text{ahol } sin\,\alpha_{min,1} = \frac{\lambda}{d} \text{ és}$$
$$W = 2 \cdot L \cdot tg\,\alpha \tag{17.7.2}$$

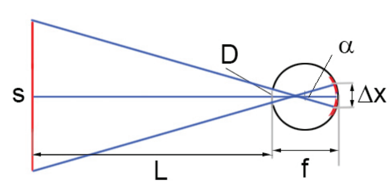
$$sin\,\alpha_{min,1} = \begin{cases} 2.75 \cdot 10^{-3} & (d = 0,2\,mm) \\ 1.38 \cdot 10^{-3} & (d = 0,4\,mm) \end{cases} \tag{17.7.3}$$

Mivel $\alpha_{min,1}$ kicsi $sin\,\alpha_{min,1} \approx tg\,\alpha_{min,1} \approx \alpha_{min,1}$, így

$$W \approx 2 \cdot L \cdot sin\,\alpha_{min,1} = \begin{cases} 8.25 \cdot 10^{-3}\,m \\ 1.65 \cdot 10^{-2}\,m \end{cases} \tag{17.7.4}$$

17.8. Feladat: (HN 39A-11) Egy bizonyos távolságra eltávolodott autó két hátsó lámpája éjszaka alig különböztethető meg egymástól, mint két különálló fényforrás. Becsüljük meg az autótól való távolságunkat, feltéve, hogy a lámpák közötti távolság 1,5 m és átlagosan 640 nm hullámhosszúságú fénysugarat bocsátanak ki, a megfigyelő szemének a pupillája pedig 6 mm átmérőjű. (Megjegyzés: különböző sűrűségű levegőrétegekben a fénytörés hatására a kép homályossá válik, így a távolság valójában kisebb a számitottnál.)

Megoldás: Az autólámpák elég messze vannak ahhoz, hogy pontszerűnek tekinthessük azokat és a belőlük kiinduló fény a megfigyelő szeméhez jó közelítéssel két, nem azonos szögben terjedő síkhullámként érkezzen. Ha a szemet egy D átmérőjű kör alakú diafragmával ellátott f fókusztávolságú lencsével modellezzük, az a síkhullámot egy $\Delta x = \alpha \cdot f$ méretű foltra képezi le, ahol $\alpha \approx sin\,\alpha = 1.22\frac{\lambda}{D}$. A két hátsó lámpa akkor különböztethető meg, ha a nekik megfelelő foltok a látókérgen éppen Δx távolságba esnek. A 17. ábrán piros vonal jelöli a lámpák távolságát és a szemen belül a pupilla véges mérete miatti Δx méretű foltokat. A foltok mérete és középpontjaik távolsága megegyezik. A 17. ábra alapján



98. ábra. A 39A-11 feladathoz

$$\begin{aligned} \Delta x &= f \cdot \alpha = f \cdot 1.22\frac{\lambda}{D} \\ S &= (L+f) \cdot \alpha \approx L \cdot \alpha \\ L \approx \frac{S}{\alpha} &= \frac{SD}{1,22\,\lambda} = \frac{1,5 \cdot 0,006}{1,22 \cdot 6,4 \cdot 10^{-7}} = 1,15 \cdot 10^{4}\,\mathrm{m}. \end{aligned} \tag{17.8.1}$$

Vagyis az autó távolsága 11.5 km.

17.9. Feladat: (HN 39A-27) A $\lambda = 0,30$ nm hullámhosszúságú röntgensugarak NaCl kristályon elsőrendű visszaverődést hoznak létre $\varphi = 30^0$-os szögben érkezve. Számítsuk ki, mekkora az a rácsállandó, ami ennek a visszaverődésnek felel meg.

Megoldás: A Bragg-féle szórás feltétel szerint a diffrakció maximuma a

$$m\lambda = 2d\sin\varphi, \text{ ahol } m = 1,2,3,\dots. \tag{17.9.1}$$

Innen a rácsállandó

$$d(m=1) = \frac{m\lambda}{2d\sin\varphi} = 0,3\text{nm}. \tag{17.9.2}$$

17.10. Feladat: (HN 40A-2) Két ideális polárszűrő lemez úgy van egymásra helyezve, hogy a transzmissziós tengelyeik közötti szög θ. Adjuk meg a lemezek közötti szöget úgy, hogy a beeső polarizálatlan fény intenzitásának $\eta = 45\%$-a átjusson.

Megoldás: A második lemez utáni intenzitás a Malus-törvény értelmében

$$I(\theta) = \frac{I_0}{2}\cos^2\theta, \tag{17.10.1}$$

amelyből az áteresztés aránya

$$\eta = \frac{1}{2}\cos^2\theta. \tag{17.10.2}$$

Az adatok behelyettesítésével $\theta = 18,43^0$.

17.11. Feladat: (HN 40A-7) Üveglemez Brewster-szöge 57^0, ha a lemez a levegőben van. Számítsuk ki a lemez Brewster-szöget, ha vízbe helyezzük (n = 1,33)

Megoldás: A Brewster-szög azt jelenti, hogy a visszavert és megtört nyaláb által bezárt szög 90^0, így a törés szöge 33^0. Ezzel az üveg törésmutatója

$$n_{ü} = \frac{\sin 57^0}{\sin 33^0} = 1,54. \tag{17.11.1}$$

A vízbe helyezés esetén jelentse α a beesési, β a törési szöget. Ekkor egyrészt

$$\frac{n_{ü}}{n} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \tag{17.11.2}$$

másrészt a Brewster-szög miatt teljesül, hogy

$$90^0 = \alpha + \beta. \tag{17.11.3}$$

Az egyenletrendszert megoldva a beesési szög $\alpha = 49,2^0$.

18. A kvantummechanika előzményei

A kvantummechanika előzményei

18.1. Feladat: (HN 42A-7) Az emberi szem kb. 555 nm hullámhossznál a Iegnagyobb érzékenységű. Adjuk meg annak a fekete testnek a hőmérsékletét, amely sugárzásának a spektrális teljesitménye ezen a hullámhosszon a maximális!

Megoldás: Wien törvénye:

$$\lambda_{max} \cdot T = 2,8977721 \cdot 10^{-3}\, K m, \tag{18.1.1}$$

ahonnan

$$T = \frac{2,8977721 \cdot 10^{-3}}{555 \cdot 10^{-9}} = 5221\, K. \tag{18.1.2}$$

18.2. Feladat: (HN 42A-15) A nátrium kilépési munkája 2,75 eV. Adjuk meg a fotoelektromos hatás küszöbhullámhosszát Na esetére!

Megoldás: Az Einstein–képlet szerint

$$h \cdot \nu = W + E_{kin} = W + \frac{1}{2} m v^2. \tag{18.2.1}$$

A küszöbhullámhossz esetén a kilépő elektronok kinetikus energiája nulla

$$h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} = W \tag{18.2.2}$$

$$\lambda = \frac{h c}{W} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} J s \cdot 2,998 \cdot 10^{8}\, m/s}{2,75 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} J} \tag{18.2.3}$$

$$\lambda = \underline{4,509 \cdot 10^{-7} m}. \tag{18.2.4}$$

18.3. Feladat: (HN 42B-22) Egy gamma–foton, melynek energiája az elektron nyugalmi energiájával (511 kev) egyenlő, összeütközik egy elektronnal, ami kezdetben nyugalomban volt. Számitsuk ki, mekkora mozgási energiát nyer az elektron az ütközésben, ha a foton az eredeti pályaegyeneséhez képest 30^o-os szögben szóródik!

Megoldás: A feladatban leírt folyamat a Compton effektus, amelynek képlete

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_{Compton} (1 - \cos\theta), \tag{18.3.1}$$

ahol

$$\lambda_{Compton} = \frac{h}{m_e c} = 2,43 \cdot 10^{-12} m \tag{18.3.2}$$

z elektron Compton hullámhossza. Behelyettesítve

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= 2,43 \cdot 10^{-12} m (1 - cos 30^o) = \\ &= 2,43 \cdot 10^{-12} (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) = \\ &= 3,251 \cdot 10^{-13} m \\ \lambda' &= \lambda + 3,251 \cdot 10^{-13} m. \end{aligned} \tag{18.3.3}$$

Tudjuk, hogy a foton kezdeti energiája

$$\varepsilon_{foton} = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = 511 \cdot 10^3 eV = 511 \cdot 10^3 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} = 8,187 \cdot 10^{-14} J,$$

ahonnan $\lambda = 2,426 \cdot 10^{-12} m$. Mivel a kimenő foton hullámhossza nagyobb, energiája kisebb lesz és ez az energiacsökkenés lesz egyenlő az elektron kinetikus energiájának növekedésével. Mivel kezdetben az elektron nyugalomban volt ez egyúttal a teljes mozgási energiája is lesz

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{foton} &= \frac{hc}{\lambda'} = \frac{1,987 \cdot 10^{-25}}{2,751 \cdot 10^{-12}} = 7,220 \cdot 10^{-14} J = 450,6 keV \\ \varepsilon_{kin} &= -(\varepsilon'_{foton} - \varepsilon_{foton}) = 9,674 \cdot 10^{-15} J = 60,38 keV. \end{aligned} \tag{18.3.4}$$

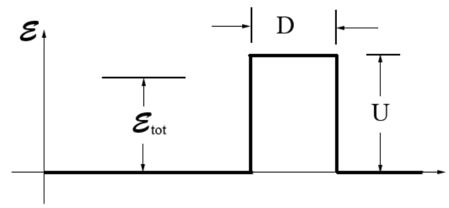
18.4. Feladat: (HN 43A-12) Egy mozgó neutron de Broglie-bullámhossza 0,2 nm. Adjuk meg a neutron sebességét és a mozgási energiáját eV egységekben!

Megoldás: A de Broglie képlet szerint

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \\ v &= \frac{h}{m_n \lambda} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{1,673 \cdot 10^{-27} \cdot 2 \cdot 10^{-10}} = 1981 \frac{m}{s} \\ \varepsilon_{kin} &= \frac{1}{2} m_n v^2 = 3,281 \cdot 10^{-21} J = 2,048 \cdot 10^{-2} eV. \end{aligned} \tag{18.4.1}$$

18.5. Feladat: (HN 43B-23) A T áteresztési tényező azt adja meg, mekkora a valószinűsége annak, hogy egy m tömegű részecske a 99. ábrán bemutatott derékszögű potenciálfalhoz közeledve „átalagútazik" a potenciálfalon

$$T = e^{-2kD}, \qquad \text{ahol } k = \sqrt{\frac{8\pi^2 m_e (U - \varepsilon)}{h^2}}. \tag{18.5.1}$$



99. ábra. A 43B-23 feladathoz

Vizsgáljunk olyan potenciálfalat, melyre $U = 5\,eV$ és $D = 950\,pm$ (pikométer). Tegyük fel, hogy egy E= 4,5 eV energiája elektron közeledik a potenciálfalhoz. Klasszikusan az elektron nem képes áthaladni a potenciálfalon, mert $E < U$. A kvantummechaníka szerint azonban véges valószinűsége van az átalagútozásnak. Számitsuk ki ezt a valószínűséget!

Megoldás:

$$k = \sqrt{\frac{8\pi^2 9,109\cdot 10^{-31}(5-4,5)\cdot 1,602\cdot 10^{-19}}{(6.626\cdot 10^{-34})^2}} = 3.623\cdot 10^9\,\frac{1}{m} \qquad (18.5.2)$$

$$T = e^{-2\,3.623\cdot 10^9\,950\cdot 10^{-12}} = \underline{1.025\cdot 10^{-3}} \qquad (18.5.3)$$

18.6. Feladat: (HN 43B-28) Egy atomot az 1,8 eV energiával az alapállapot fölötti szintre gerjesztve, az atom ott átlagosan $2\cdot 10^{-6}$ s időt tölt el, mielött alapállapotba kerülne vissza.

(a) Adjuk meg a kibocsátott foton frekvencíáját!

(b) Adjuk meg a foton hullámhosszát!

(c) Adjuk meg a foton energiájának bizonytalanságát!

Megoldás:

(a) Az alapállapotba visszatérés során kibocsátott foton frekvenciája

$$\nu = \frac{E}{h} = \frac{1,8\cdot 1,602\cdot 10^{-19}\,J}{6,626\cdot 10^{-34}\,J\,s} = 4,352\cdot 10^{14}\,Hz \qquad (18.6.1)$$

(b) és hullámhossza

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 6,888\cdot 10^{-7}\,m. \qquad (18.6.2)$$

(c) Egy adott állapot ΔE energiabizonytalansága és az adott állapotban tartozkodás Δt időtartama között is fennáll egy határozatlansági összefüggés:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar \tag{18.6.3}$$

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{\Delta t} = 5,27286 \cdot 10^{-29}\, J = 3,29106 \cdot 10^{-10}\, eV. \tag{18.6.4}$$

18.7. Feladat: (HN 44B-9) A csillagközi térben az atomos hidrogén éles spektrumvonala, az ún. 21 cm-es sugárzás keletkezik; a csillagászok ezt tartják legalkalmasabbnak a csillagok közötti hidrogenfelhök detektálására. A csillagközi por elmosódottá teszi a látható tartományba eső hullámhosszakat, ezért az elöbb emlitett sugárzás, amely a rádióhullámok tartományába esik, nagyon hasznos. Az elektronállapotok közötti energiaátmenetet, melytől ez a sugárzás ered, nem lehet egy meghatározott n-nel jellemezni. Az a helyzet, hogy az n = 1 alapállapotban az elektron és a proton spinje paralel vagy antiparalel lehet; a két állapot energiája kissé különböző.
(a) Mi a feltétele a magasabb energiájú állapotnak?
(b) A pontos hullámhosszérték 21,11 cm. Mi a két állapot energiakülönbsége?
(c) A gerjesztett állapot átlagos élettartama 10^7 év. Számitsuk ki a gerjesztett állapot energiájának bizonytalanságát.

Megoldás:
(a) Az elemi részecskék (példánkban a proton és az elektron) spinjéhez mágneses momentum is kapcsolódik a

$$\mu = Q g \frac{1}{2m} S \tag{18.7.1}$$

képlet szerint, ahol S a spin, μ a mágneses momentum nagysága, Q a részecske töltése és g az ún. g–faktor. Mivel a proton töltése pozitív az elektron töltése negatív a proton mágneses momentuma spinjével egyirányú, az elektroné azzal ellentétes. A proton mágneses momentumához tartozó mágneses térben az elektron akkor lesz magasabb energiájú, ha a mágneses momentumok egyirányúak, vagyis a spin momentumok ellentétes irányúak.
(b) A két állapot energiakülönbsége felel meg a kibocsátott foton energiájának. Mivel $\lambda = 0,2111\, m$, az energiakülönbség

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon &= h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \frac{6,62607 \cdot 10^{-34}\, Js \cdot 2,99793 \cdot 10^{8}\, m/s}{0.2111\, m} = 9.40998 \cdot 10^{-25}\, J \\ &= 5,87325 \cdot 10^{-6}\, eV\end{aligned} \tag{18.7.2}$$

(c) Az energiabizonytalanság

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon \cdot \Delta T &\geq \hbar \\ \Delta\varepsilon &\geq \frac{\hbar}{\Delta T} = \frac{1.05457 \cdot 10^{-34} J s}{10^7 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 s} = 3,344 \cdot 10^{-49} J = 2,087 \cdot 10^{-30} eV. \end{aligned} \quad (18.7.3)$$

18.8. Feladat: (HN 43C-33) Amikor egy atom fotont bocsát ki, az energia valamilyen hányada az atom visszalökődésére fordítódik. Mutassuk meg, hogy ez a hányad közelítőleg $\frac{\varepsilon}{2mc^2}$, ahol ε az átmenet energiája és m az atom tömege.

Megoldás: A feladat szerint a keletkező fotonok ε_{foton} energiája kisebb lesz, mint az átmenet energiája. Jelöljük a kettő különbségét $\delta\varepsilon$! Igazolnunk kell, hogy

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} \equiv \frac{\varepsilon - \varepsilon_{foton}}{\varepsilon} \approx \frac{\varepsilon}{2mc^2}$$

ahol, mivel $\varepsilon << mc^2$, a feladat állítása szerint ε és ε_{foton} csak kicsit különbözhet egymástól

$$\delta\varepsilon << \varepsilon \qquad \text{azaz} \qquad \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} << 1.$$

Használjuk az energia és impulzusmegmaradás feltételeit! A ε energiájú átmenet során az energia és az impulzus megmarad, vagyis

$$p_{atom} + p_{foton} = p'_{atom} + p'_{foton} \quad (18.8.1)$$

$$\varepsilon_{atom} + \varepsilon_{foton} = \varepsilon'_{atom} + \varepsilon'_{foton} \quad (18.8.2)$$

$$(18.8.3)$$

Maradjunk az emisszió előtt nyugalomban levő atom vonatkoztatási rendszerében. Ekkor az impulzusokra

$$p_{atom} = p_{foton} = 0 \quad (18.8.4)$$

$$p'_{atom} = p'_{foton}, \text{ és mivel} \quad (18.8.5)$$

$$p'_{foton} = \frac{\varepsilon_{foton}}{c} \quad (18.8.6)$$

$$p'_{atom} = 0 - p'_{foton} = -\frac{\varepsilon_{foton}}{c} \quad (18.8.7)$$

Innentől mind klasszikus, mind relativisztikus módon megoldhatjuk a feladatot. Figyelembe véve, hogy a visszalökődő atom sebessége sokkal kisebb, mint a fénysebesség ezen a szinten elegendő a klasszikus fizikai megoldás. A teljesség kedvéért azonban felírjuk a relatitáselmélet szerinti megoldást is.

(a) Klasszikus fizikai (nem relativisztikus) megoldás

Válasszuk az atom alapállapotbeli energiáját nullának! A kibocsátott foton ε_{foton} energiája a visszalökődés miatti energiaveszteség következtében nem azonos az energiaszintek ε távolságával. (18.8.1) és (18.8.2) -be a foton $p_{foton} = \frac{\varepsilon}{c}$ és az atom impulzusának klasszikus fizikai $p = mv$ formuláit behelyettesítve

$$\begin{aligned}
0 &= mv + \frac{\varepsilon_{foton}}{c} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\varepsilon_{foton}}{c} = -mv && (18.8.8)\\
\varepsilon &= \frac{1}{2}mv^2 + \varepsilon_{foton}, \text{ és mivel} \\
\frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2m}\cdot(mv)^2 = \frac{1}{2m}\cdot\left(\frac{\varepsilon_{foton}}{c}\right)^2 \\
\varepsilon &= \frac{\varepsilon_{foton}^2}{2mc^2} + \varepsilon_{foton} && (18.8.9)
\end{aligned}$$

Az egyenlet jobboldalán az $\varepsilon_{foton} = (\varepsilon - \delta\varepsilon)$ ismeretlen fotonenergia szerepel. Vagyis

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon &= \varepsilon - \varepsilon_{foton} = \frac{\varepsilon_{foton}^2}{2mc^2} = \frac{(\varepsilon-\delta\varepsilon)^2}{2mc^2} \\
&= \frac{\varepsilon^2}{2mc^2} - \frac{2\delta\varepsilon\cdot\varepsilon}{2mc^2} + \frac{\delta\varepsilon^2}{2mc^2} \approx \frac{\varepsilon^2}{2mc^2} && (18.8.10)
\end{aligned}$$

Ez az az energia rész, ami az atom visszalökődésére fordítódik, vagyis a foton energiája ennyivel kisebb lesz. Ezért

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_{foton}}{\varepsilon} \approx \frac{\varepsilon}{2mc^2}. \tag{18.8.11}$$

Ezzel az állítást igazoltuk[15].

(b) Relativisztikus megoldás

Válasszuk az atom alapállapotbeli energiáját nullának. A kibocsátott foton energiája a visszalökődés miatti energiaveszteség következtében nem azonos az energiaszintek ε távolságával. Jelöljük ezt E_{foton}-nal! Felhasználva a speciális relativitáselmélet energia, impulzus és nyugalmi

[15]Szilárd testekben a képletbe helyettesítendő tömeg az atomok kölcsönhatása miatt nem feltétlen azonos a szabad atom tömegével, lehet annál nagyobb, kisebb, sőt akár végtelen is. Ezt a tömeget az atom *effektív tömegének* nevezzük. Ezt a Mössbauer-effektust használjuk ki pl. a meteorok és holdkőzetek analízisére a Mössbauer-spektroszkópiában.

tömeg között fennálló $E^2 - p^2c^2 = (mc^2)^2$ képletét[16]

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{atom} &= mc^2 + \varepsilon \\
\varepsilon_{foton} &= 0 \\
\varepsilon'_{foton} &= \varepsilon \\
\varepsilon'_{atom} &= \sqrt{p^2_{atom}c^2 + (m'c^2)^2},
\end{aligned} \tag{18.8.12}$$

ahol $m'c^2$ azt jelöli, hogy a mozgó atom energiájának számolásánál nem a nyugvó atom m tömegével kell számolni[17]. Ebben a folyamatban a kibocsátott foton energiája sokkal kisebb az atom nyugalmi energiájánál: $\varepsilon_{foton} << mc^2$, ezért $m' \approx m$, vagy másképpen $\delta m \equiv m' - m << m$. A (18.8.12) egyenletbe behelyettesítve (18.8.1)-et:

$$\varepsilon'_{atom} = \sqrt{p'^2_{atom}c^2 + (m'c^2)^2} \tag{18.8.13}$$
$$= \sqrt{p'^2_{foton}c^2 + (m'c^2)^2} \tag{18.8.14}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{foton}}{c}\right)^2 c^2 + (m'c^2)^2} \tag{18.8.15}$$
$$= \sqrt{\varepsilon^2_{foton} + ((m+\delta m)c^2)^2}. \tag{18.8.16}$$

Emeljünk ki mc^2-et, és használjuk ki, hogy $(1+x)^2 \approx (1+2x)$, $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$, ha $x << 1$, valamint, hogy $\varepsilon_{foton} << mc^2$ és $\delta m << m$

$$\varepsilon'_{atom} = \sqrt{(mc^2)^2 \cdot \left(\left(\frac{\varepsilon_{foton}}{mc^2}\right)^2 + \left(1 + \frac{\delta m}{m}\right)^2\right)} \tag{18.8.17}$$
$$= mc^2 \cdot \sqrt{\left(\left(\frac{\varepsilon_{foton}}{mc^2}\right)^2 + \left(1 + \frac{\delta m}{m}\right)^2\right)} \tag{18.8.18}$$
$$= mc^2 \cdot \sqrt{\left(\left(\frac{\varepsilon_{foton}}{mc^2}\right)^2 + 1 + 2\frac{\delta m}{m}\right)} \tag{18.8.19}$$
$$= mc^2 \cdot \left[1 + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\varepsilon_{foton}}{mc^2}\right)^2 + 2\frac{\delta m}{m}\right)\right] \tag{18.8.20}$$

azaz

$$\varepsilon'_{atom} = mc^2 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2_{foton}}{mc^2} + \delta m c^2 \tag{18.8.21}$$

[16]Szilárd testekben a képletben szereplő tömeg az atom *effektív tömege*, ami nem azonos a szabad atom tömegével, ezt használjuk ki pl. a Mössbauer-effektusnál, ahol az atom visszalökődését a többi atom akadályozza.

[17]Ezt szokás hagyományosan tömegnövekedésnek nevezni.

18.8.2 alapján

$$\varepsilon_{atom} = \varepsilon'_{atom} + \varepsilon'_{foton} \tag{18.8.22}$$

$$mc^2 + \varepsilon = \varepsilon'_{atom} + \varepsilon'_{foton} \tag{18.8.23}$$

$$mc^2 + \varepsilon = \varepsilon'_{foton} + mc^2 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2_{foton}}{mc^2} + \delta mc^2 \tag{18.8.24}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{foton} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2_{foton}}{mc^2} + \delta mc^2 \tag{18.8.25}$$

Tehát a visszalökődés miatt a foton energiája

$$\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2_{foton}}{mc^2} + \delta mc^2 \quad \text{-el} \tag{18.8.26}$$

kisebb, lesz, mint az átmenet energiája. Ez a képlet a klasszikus fizikaitól a δmc^2-el különbözik, ami az első tagnál is sokkal kisebb.

18.9. Feladat: (HN 44B-9) A csillagközi térben az atomos hidrogén éles spektrumvonala, az ún. 21 cm-es sugárzás keletkezik; a csillagászok ezt tartják legalkalmasabbnak a csillagok közötti hidrogenfelhök detektálására. A csillagközi por elmosódottá teszi a látható tartományba eső hullámhosszakat, ezért az elöbb emlitett sugárzás, amely a rádióhullámok tartományába esik, nagyon hasznos. Az elektronállapotok közötti energiaátmenetet, melytől ez a sugárzás ered, nem lehet egy meghatározott n-nel jellemezni. Az a helyzet, hogy az n = 1 alapállapotban az elektron és a proton spinje paralel vagy antiparalel lehet; a két állapot energiája kissé különböző.

(a) Mi a feltétele a magasabb energiájú állapotnak?

(b) A pontos hullámhosszérték 21,11 cm. Mi a két állapot energiakülönbsége?

(c) A gerjesztett állapot átlagos élettartama 10^7 év. Számitsuk ki a gerjesztett állapot energiájának bizonytalanságát.

Megoldás:

(a)

Az elemi részecskék (példánkban a proton és az elektron) spinjéhez mágneses momentum is kapcsolódik a

$$\mu = Qg\frac{1}{2m}S \tag{18.9.1}$$

képlet szerint, ahol S a spin, μ a mágneses momentum nagysága, Q a részecske töltése és g az ún. g–faktor. Mivel a proton töltése pozitív az elektron töltése negatív a proton mágneses momentuma spinjével egyirányú, az elektroné azzal ellentétes. A proton mágneses momentumához

tartozó mágneses térben az elektron akkor lesz magasabb energiájú, ha a mágneses momentumok egyirányúak, vagyis a spin momentumok ellentétes irányúak.
(b)
A két állapot energiakülönbsége felel meg a kibocsátott foton energiájának. Mivel
$\lambda = 0,2111\,m$, az energiakülönbség

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon &= h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \frac{6.62607\cdot 10^{-34}\,J\,s\cdot 2.99793\cdot 10^{8}\,m/s}{0.2111\,m} = 9.40998\cdot 10^{-25}\,J \\ &= 5.87325\cdot 10^{-6}\,eV \end{aligned} \tag{18.9.2}$$

(c) Az energiabizonytalanság

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon\cdot\Delta T &\geq \hbar \\ \Delta\varepsilon &\geq \frac{\hbar}{\Delta T} = \frac{1.05457\cdot 10^{-34}\,J\,s}{10^{7}\cdot 365\cdot 24\cdot 3600 s} = 3.34403\cdot 10^{-49} J \\ &= 2.08718\cdot 10^{-30}\,eV \end{aligned} \tag{18.9.3}$$

18.10. Feladat: (HN 44C-36) Mi a valószinűsége annak, hogy az ls-állapotú hidrogén elektronját a magtól 2,50 a_o-nál nagyobb távolságra találjuk meg?

Megoldás: Az 1s állapotbeli gömbszimmetrikus hullámfüggvény szorzat alakban írható (*szeparálható*): $\psi(r,\vartheta,\varphi) = R(r)\cdot\ y(\vartheta,\varphi)$, ennek radiális és szögfüggő része

$$R(r) = 2\left(\frac{1}{a_o}\right)^{3/2}\cdot e^{-r/a_o} \tag{18.10.1}$$

$$Y(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}} \tag{18.10.2}$$

A teljes hullámfüggvény az 1s állapotban csak a távolságtól függ:

$$\psi(r) = \sqrt{\frac{1}{\pi a_o^3}}\,e^{-r/a} \tag{18.10.3}$$

Annak a valószínűsége, hogy az elektront a magtól r' -nél nagyobb távolságra találjuk

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(r',\infty) &= \int_{r'}^{\infty}|\psi(r)|^2\cdot 4\pi r^2\,dr = \\ &= \frac{4}{a_o^3}\int_{r'}^{\infty} r^2\cdot e^{-2r/a_o}\,dr. \end{aligned} \tag{18.10.4}$$

Integráltáblázatból kinézve az integrál értékét[18]

$$\mathcal{P}(r') \equiv \mathcal{P}(r', \infty) = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{2\,r'}{a_o} \right)^2 + \frac{2\,r'}{a_o} + 1 \right) e^{-\frac{2\,r'}{a_o}} \tag{18.10.9}$$

Behelyettesítve az $r' = 2,50\,a_o$ értéket[19]: $\dfrac{2\,r'}{a_o} = 5.00$

$$\mathcal{P}(r') = \left(\frac{1}{2} 5.00^2 + 5.00 + 1 \right) e^{-5.00} = 0.125 \tag{18.10.10}$$

19. Feladatok a speciális relativitáselmélet tárgyköréből

Relativisztikus kinematika

19.1. Feladat: Egy űrhajósnak a saját ideje szerint egy feladat elvégzéséhez 2 percre van szüksége. Mennyi idő telik el ezalatt a Föld vonatkoztatási rendszerében, ha az űrhajó $0,5c$ sebességgel

[18] Ez az integrál integráltáblázat nélkül két egymás utáni parciális integrálás alkalmazásával könnyen kiszámolható:
Ehhez egy kis segítség: Vezessünk be egy új változót (18.10.4)-be! Legyen $x = \dfrac{2\,r}{a_0}$, ekkor $r = \dfrac{a_0\,x}{2}$ és $dr = \dfrac{a_0}{2}\,dx$, az integrálás határai pedig $\dfrac{2\,r'}{a_0}$ és ∞:

$$\frac{4}{a_o^3} \int_{r'}^{\infty} r^2 \cdot e^{-2\,r/a_o}\,dr = \frac{4}{a_o^3} \int_{2\,r'/a_0}^{\infty} \frac{a_o^2}{4} x^2 \cdot e^{-x}\, \frac{a_o}{2}\,dx = \frac{1}{2} \int_{2\,r'/a_0}^{\infty} x^2\, e^{-x} dx \tag{18.10.5}$$

A parciális integrálás képlete szerint

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,dx. \tag{18.10.6}$$

Először legyen $u' \equiv e^{-x}$,és $v \equiv \dfrac{1}{2} x^2$, ekkor $u = -e^{-x}$ és $v' = x$

$$\frac{1}{2} \int_{2\,r'/a_0}^{\infty} x^2 \cdot e^{-x}\,dx = \left[-\frac{1}{2} x^2\, e^{-x} \right]_{2\,r'/a_0}^{\infty} - \int_{2\,r'/a_0}^{\infty} x(-e^{-x})\,dx \tag{18.10.7}$$

A jobboldali integrál ugyancsak parciálisan integrálható. Most $u' \equiv -e^{-x}$,és $v \equiv x$, ahonnan $u = e^{-x}$ és $v' = 1$.

$$\int_{2\,r'/a_0}^{\infty} x(-e^{-x})\,dx = \left[x\,e^{-x} \right]_{2\,r'/a_0}^{\infty} - \int_{2\,r'/a_0}^{\infty} e^{-x}\,dx = \left[-x\,e^{-x} \right]_{2\,r'/a_0}^{\infty} - \left[-e^{-x} \right]_{2\,r'/a_0}^{\infty} \tag{18.10.8}$$

A végeredmény:

$$\frac{1}{2} \int_{2\,r'/a_0}^{\infty} x^2\, e^{-x} dx = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{2\,r'}{a_o} \right)^2 + \frac{2\,r'}{a_o} + 1 \right) e^{-\frac{2\,r'}{a_o}}$$

[19] $a_o = 0,0529\,nm$

halad a Földhöz képest?

Megoldás: Jelölések: $\tau = 2$ perc $= 120$ s és $v = 0,5c$.
A Föld vonatkoztatási rendszerében

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 138,56\,\mathrm{s} \tag{19.1.1}$$

idő telik el.

19.2. Feladat: Két távoli galaxis a Földtől ellenkező irányban távolodik, mindegyik 0,8c sebességgel. Mekkora volna a másik galaxis távolodási sebessége az egyiken lévő megfigyelő számára?

Megoldás: Gondolatban helyezkedjünk el az egyik galaxison. Most ez a K rendszer. A Föld ehhez képest mozog $v_0 = 0,8c$ sebességgel. A Föld a K' rendszer. Ebben a rendszerben mozog a másik galaxis $u'_x = 0,8c$ sebességgel. E galaxis K rendszerbeli u_x sebességének kiszámolására alkalmazzuk a sebesség-összeadás

$$u_x = \frac{v_0 + u'_x}{1 + \frac{v_0 u'_x}{c^2}} \tag{19.2.1}$$

összefüggését. Behelyettesítés után kapjuk, hogy K rendszerbeli (egyik galaxisbeli) megfigyelő számára a másik

$$u_x = 0,9756c \tag{19.2.2}$$

sebességgel távolodik.

Relativisztikus dinamika

19.3. Feladat: Egy m_0 tömegű test sebessége $v_1 = 0,6c$-ről $v_2 = 0,8c$-re változik. a.) Mekkora munkavégzés volt ehhez szükséges? Számítsa ki klasszikus és relativisztikus módon is! b.) Mekkora a test impulzusváltozása? Számítsa ki klasszikus és relativisztikus módon is!

Megoldás: a, A munkavégzés a klasszikus mechanika szerint:

$$W_{kl} = \frac{1}{2}m_0 v_2^2 - \frac{1}{2}m_0 v_1^2 = 0,14 m_0 c^2, \tag{19.3.1}$$

míg relativisztikusan:

$$W_{rel} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{5}{12}m_0c^2 = 0,4167m_0c^2. \tag{19.3.2}$$

b, Az impulzusváltozás a klasszikus mechanika szerint:

$$\Delta P_{kl} = m_0v_2 - m_0v_1 = 0,2m_0c, \tag{19.3.3}$$

míg relativisztikusan:

$$\Delta P_{rel} = \frac{m_0v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{m_0v_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{7}{12}m_0c = 0,5833m_0c. \tag{19.3.4}$$

19.4. Feladat: Részecskegyorsítóban különböző töltött részecskéket tudunk gyorsítani.
(a) Mekkora egy proton sebessége, ha tömege kétszerese nyugalmi tömegének? ($m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg)
(b) Mekkora energiával gyorsítható fel a proton erre a sebességre?
(c) Mekkora lenne a nyugalomból induló elektron sebessége ekkora gyorsítási energia befektetése után?

Megoldás:
(a) A feladat matematikai megfogalmazása:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2m_0, \tag{19.4.1}$$

amiből a proton sebessége

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c = 0,866c = 2,598 \cdot 10^8 \text{ m/s}. \tag{19.4.2}$$

(b) E sebesség felhasználásával a gyorsításhoz befektetett energia

$$\Delta E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 = m_0c^2 = 1,503 \cdot 10^{-10}\,\text{J} = 9,394 \cdot 10^8\,\text{eV}. \tag{19.4.3}$$

(c) A fenti összefüggés átrendezésével és az elektron tömegének alkalmazásával

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{m_ec^2}{\Delta E + m_ec^2}\right)^2} = 2,9999992 \cdot 10^8 \text{ m/s}. \tag{19.4.4}$$

Megjegyzés: Látható, hogy a ΔE befektetett energia növelésével a fénysebesség egyre jobban megközelíthető.

19.5. Feladat: Két azonos, kezdetben nyugvó m_0 tömegű részecske egyikével $\Delta E_1 = \frac{2}{3}m_0c^2$, a másikkal $\Delta E_2 = \frac{1}{4}m_0c^2$ energiát közlünk.
(a) Mekkora lesz a testek sebessége a nyugvó laborrendszerben?
(b) Feltételezve, hogy egy irányban mozognak, mekkora sebességűnek érzékeli a lassabban mozgó részecske a gyorsabban mozgót a saját rendszeréből nézve?

Megoldás:
(a) A nyugvó részecske v sebességre történő felgyorsításához szükséges energia befektetés

$$\Delta E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2. \tag{19.5.1}$$

Ennek felhasználásával a $\Delta E_1 = \frac{2}{3}m_0c^2$ esetén

$$v_1 = 0,8c \tag{19.5.2}$$

az elért sebesség, míg a $\Delta E_2 = \frac{1}{4}m_0c^2$ energia esetén

$$v_2 = 0,6c \tag{19.5.3}$$

a sebesség.
(b) Ez a két sebesség a két részecske K nyugvó (laborrendszerbeli sebessége). A kérdés, hogy a nyugvó rendszerhez képest $v_0 = v_2 = 0,6c$ sebességgel mozgó /a lassabb részecskéhez rögzített/ K' rendszerben milyen a másik részecske u'_x sebessége. A gyorsabb részecske sebességét a K rendszerben jelölje $u_x = v_2 = 0,8c$. A sebesség összeadás szerint

$$u_x = \frac{v_0 + u'_x}{1 + \frac{v_0u'_x}{c^2}}, \tag{19.5.4}$$

amelyből

$$u'_x = \frac{u_x - v_0}{1 - \frac{v_0u_x}{c^2}} = 0,384c. \tag{19.5.5}$$

19.6. Feladat: A kezdetben $v_0 = 0,6c$ sebességű m_0 nyugalmi tömegű részecske impulzusát 16/9-szeresére növeljük. Mekkora lesz a végső v_2 sebesség és mekkora energia befektetés kellett ehhez?
(a) Számítsa ki klasszikusan!
(b) Számítsa ki relativisztikus közelítésben!

Megoldás:
(a) Klasszikus megoldás: A részecske impulzusa kezdetben m_0v_0, a gyorsítás végén m_0v_2. A feladat szövege szerint

$$m_0v_2 = \frac{16}{9}m_0v_0, \tag{19.6.1}$$

amelyből

$$v_2 = \frac{16}{9}v_0 = \frac{16}{15}c. \tag{19.6.2}$$

A befektetendő energia

$$W_{kl} = \frac{1}{2}m_0v_2^2 - \frac{1}{2}m_0v_0^2 = 0,389m_0c^2. \tag{19.6.3}$$

(b) Relativisztikus megoldás: A részecske impulzusa kezdetben

$$\frac{m_0v_0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}, \tag{19.6.4}$$

a gyorsítás végén

$$\frac{m_0v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}. \tag{19.6.5}$$

A feladat szövege szerint fennáll, hogy

$$\frac{m_0v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{16}{9}\frac{m_0v_0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}. \tag{19.6.6}$$

Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy

$$v_2 = 0,8c. \tag{19.6.7}$$

A befektetendő energia

$$W_{rel} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = \frac{5}{12}m_0c^2 = 0,4167m_0c^2. \tag{19.6.8}$$

19.7. Feladat: Egy M tömegű részecske $v_1 = 0,6c$ sebességgel összeütközik egy másik m tömegű és $v_2 = 0,8c$ sebességű ellenkező irányba mozgó részecskével. Az ütközés után a két részecske egy összetett rendszert képez, amely a laboratóriumhoz képest nyugalomban van. Mekkora az M/m arány?

Megoldás: Az impulzus megmaradás ez esetben

$$\frac{Mv_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{mv_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} \tag{19.7.1}$$

alakban fogalmazható meg. Az adatok behelyettesítése után a kérdezett hányados

$$\frac{M}{m} = \frac{16}{9}. \tag{19.7.2}$$