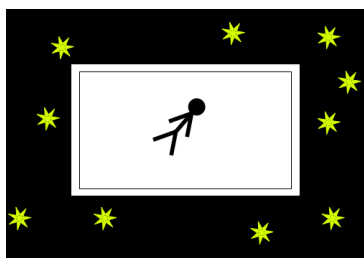


ERŐ-E A GRAVITÁCIÓ?

1

Inerciarendszer (IR): olyan vonatkoztatási rendszer, ahol érvényes
Newton első törvénye ($\vec{F}_e = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$)

1. példa:



← ez pl. IR (Newton és Einstein egyetért)

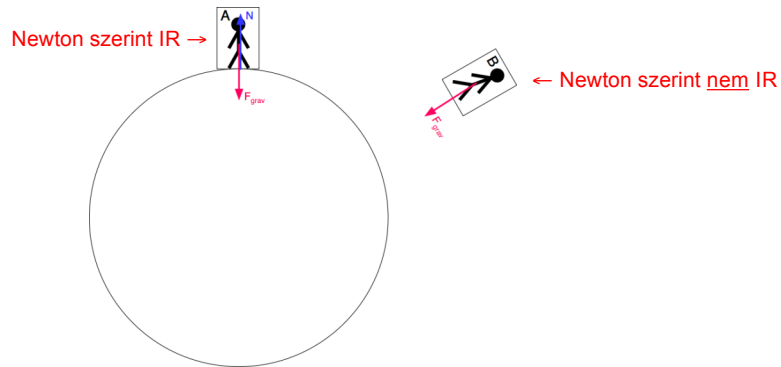
Inerciarendszerben tett felfedezések:

- (1) Amikor valaki gyorsul (azaz *erő hat rá*, pl. a fal megüti, egy gumikötél meghúzza), azt becsukott szemmel is *érzi*.
- (2) Érvényes az ún. Maximális Öregedés Elve (M.Ö.E.): két esemény között az az óra regisztrálja a legtöbb eltelt időt, amelyre a két esemény között nem hatott erő.

2

2. példa:

Newton szerint: A inerciarendszer, B nem az, a gravitáció pedig erő.



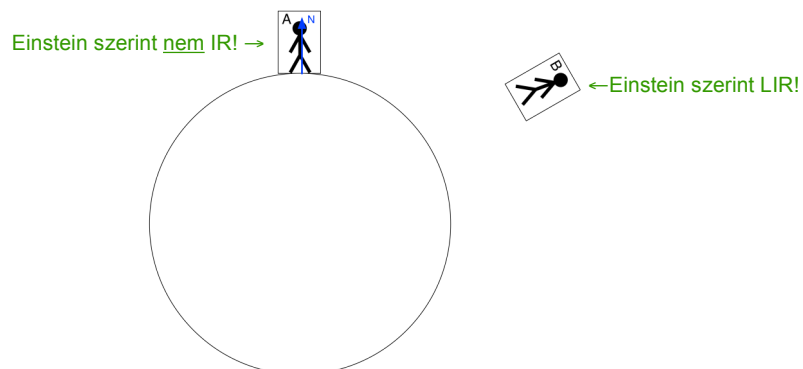
Csakhogy a fenti "IR"-ben a következő felfedezéseket tesszük:

- (1) "Amikor valakire erő hat, azt becsukott szemmel is érzi, **kivéve a gravitációs erőt (azt ugyanis nem érzi).**"
- (2) "A M.Ö.E. **módosított formában** érvényes: két esemény között az az óra regisztrálja a legtöbb eltelt időt, amelyre a két esemény között **csak a gravitációs erő hat.**"

3

2. példa:

Einstein szerint: a gravitáció *nem* erő (pl. azért, mert nem érezzük), és a B az inerciarendszer, nem pedig az A.

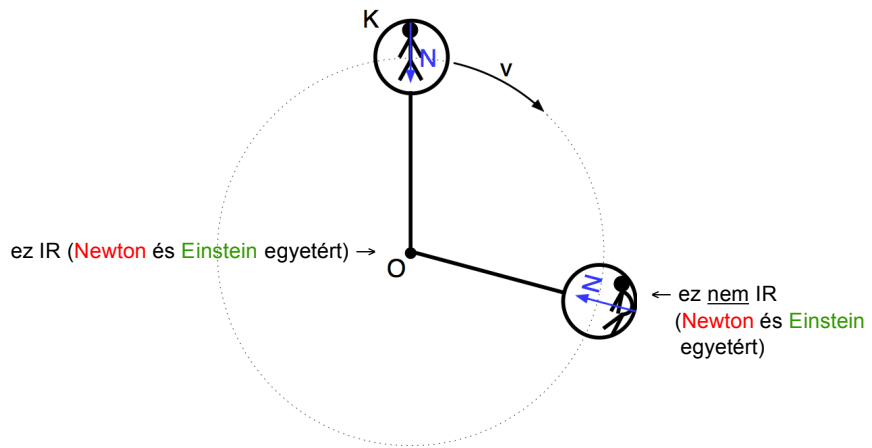


Az eredeti (IR-re tett) megállapítások B-ben változatlanul *érvényben maradnak*:

- (1) Amikor valakire erő hat, azt becsukott szemmel is *érzi*.
- (2) M.Ö.E.: két esemény között az az óra regisztrálja a legtöbb eltelt időt, amelyre a két esemény között nem hatott erő.

4

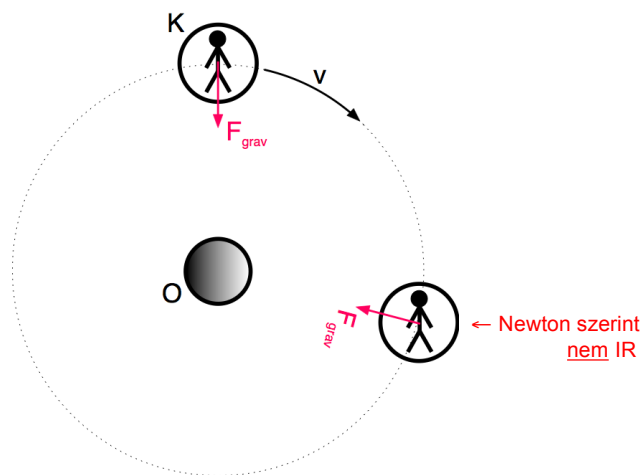
3. példa:



Körhinta inerciarendszerben. A körpályára kényszerítő erő a felület nyomóereje (vagy a Coulomb- vagy a Lorentz-erő, stb.).

5

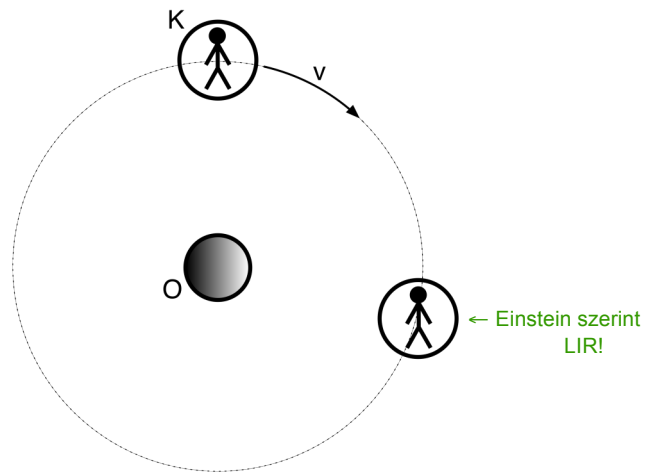
4. példa:



Gravitációs körhinta. A "körpályára" kényszerítő "erő" a gravitáció (amit a kabin utasa *nem* érez).

6

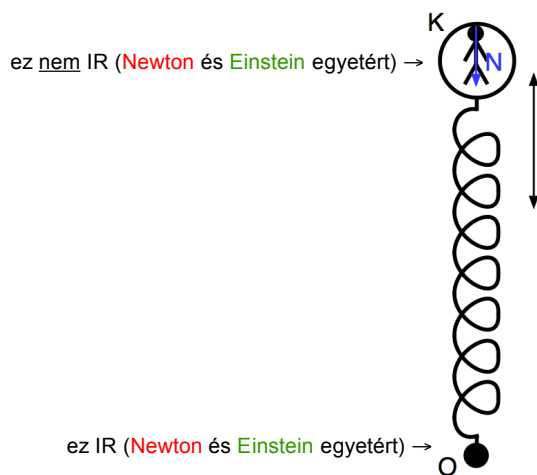
4. példa:



Gravitációs körhinta. "Gravitációs erő" nem létezik!

7

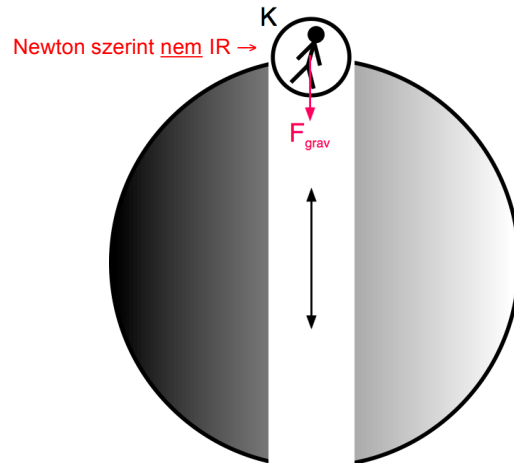
5. példa:



Rugó inerciarendszerben. Az utas szinuszos gyorsulását a felület nyomóereje okozza.

8

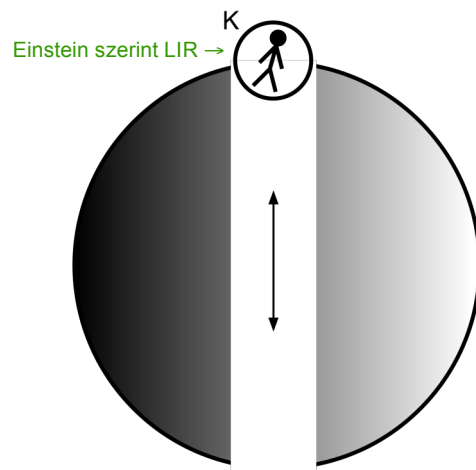
6. példa:



Gravitációs rugó. Az utas "szinuszos gyorsulását" a gravitációs "erő" okozza (amit az utas *nem* érez).

9

6. példa:



Gravitációs rugó. "Gravitációs erő" nem létezik!

10

EKVIVALENCIA-ELV:

Egy csak a gravitáció hatására (azaz “szabadon”) mozgó vonatkoztatási rendszer (lokálisan*) ugyanolyan, mint egy gravitáló testektől távoli inerciarendszer.

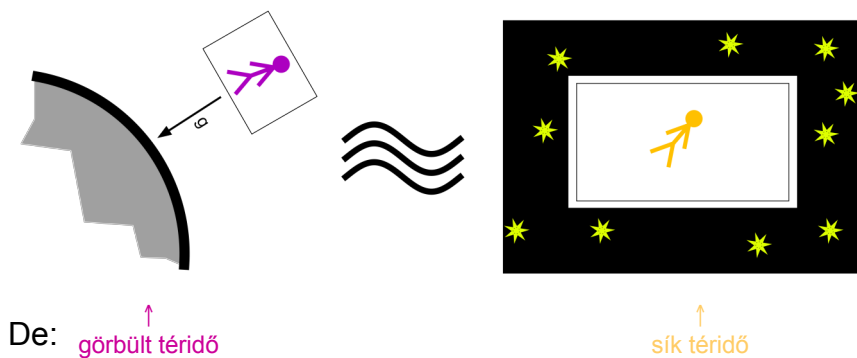
Egy a Földön nyugvó vonatkoztatási rendszer (lokálisan*) ugyanolyan, mint egy gravitáló testektől távoli gyorsuló vonatkoztatási rendszer.

*a téridő kis tartományában.

11

EKVIVALENCIA-ELV:

Egy csak a gravitáció hatására (azaz “szabadon”) mozgó vonatkoztatási rendszer lokálisan ugyanolyan, mint egy gravitáló testektől távoli inerciarendszer.
[A gravitáció a Földön “kikapcsolható” azzal, ha elengedjük magunkat.]

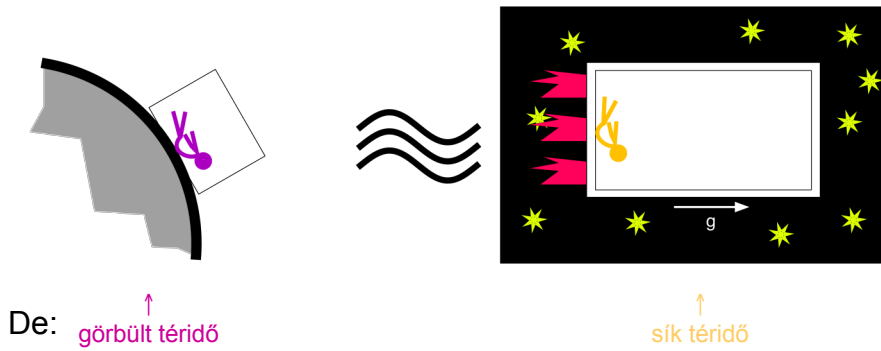


12

EKVIVALENCIA-ELV:

Egy a Földön nyugvó vonatkoztatási rendszer
lokálisan ugyanolyan, mint
egy gravitáló testektől távoli gyorsuló vonatkoztatási rendszer.

[A "gravitáció" az űrhajóban bekapcsolható azzal, ha bekapcsoljuk a hajtóművet.]



13



Einstein játéka. (A gravitáció "megszüntethető"!)

14



AZ EKVIVALENCIA-ELVBŐL MÁRIS LEVEZETHETŐ NÉHÁNY ÁLTALÁNOS RELATIVITÁSELMÉLETBELI EREDMÉNY (ANÉLKÜL, HOGY A TÉRIDŐ GÖRBÜLTSGÉT FIGYELEMBE VENNÉNK):

1. Fénysugár elhajlása gravitációs térben.
2. A gravitációs kék-, ill. vöröseltolódás.

Erő-e a gravitáció? NEM.

*MI A GRAVITÁCIÓ?
A TÉRIDŐ GÖRBÜLETE.*

Egy nagy tömegű test begömbíti maga körül a téridőt, és ebben a görbült téridőben - erőhatás híján - a "lehető legegyenesebb" (geodetikus) világvonalon halad a szabad tömegpont.

17

1. "A Nap kering a Föld körül, vagy a Föld a Nap körül?"

2. Tehát: Kopernikusznak v Ptolemaiosznak van-e igaza?

18

Erő-e a gravitáció? NEM.

A GRAVITÁCIÓ: A TÉRIDŐ GÖRBÜLETE.

Hogyan *mutatható ki méréssel* ez a görbület?
“Egy vektort párhuzamos eltolással végigviszünk egy *zárt világvonalon**, és ellenőrizzük, hogy a vektor a végén ugyanarra mutat-e, mint az elején.”

Nem használható módszer. (*Zárt világvonalon nem tudunk közlekedni!)

19

Erő-e a gravitáció? NEM.

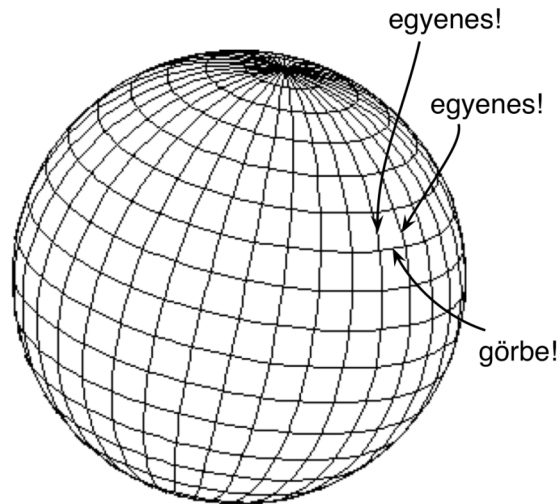
A GRAVITÁCIÓ: A TÉRIDŐ GÖRBÜLETE.

Hogyan *mutatható ki méréssel* ez a görbület?
Két szabad tömegpont mozgásának követésével.
 (“Két geodetikus világvonala egymáshoz képest hogyan viselkedik?”)

Hogyan *érezhető* ez a görbület? Az árapály-erő hatásának tapasztalásával. (A Földön: ingerküszöb alatti mértékben kicsi.)

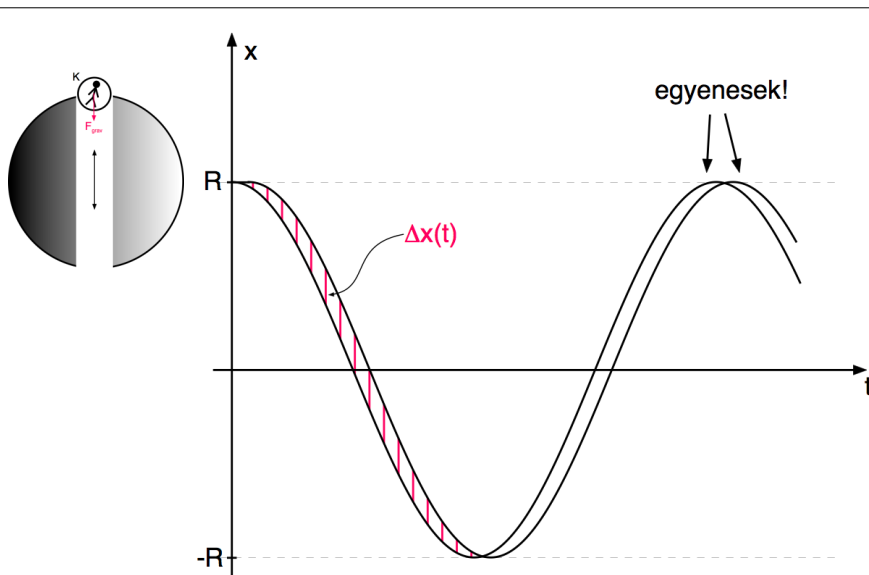
20

GÖRBÜLT SOKASÁGOK



Egy pontból kiindítunk két egyenest.
Ismét metszik egymást! → görbült felület!

21



Gravitációs rugó. Két kabint egymás után elengedve vizsgáljuk a két *geodetikus* (*egyenes!*) világvonal egymáshoz képesti viselkedését. Tapasztalat: többször metszik egymást → következtetés: görbült tér!

Föld

“Árapály-erő” → a szabadon eső űrhajós spagettizálódik. (Nem érezzük, mert nagyon kicsi, $\sim 10^{-4}\text{N}$ nagyságú erők)

23

Mesterséges gravitáció forgással. Kényelmes utazás-e ez? Mekkora “árapály-erő” feszíti *itt* az űrhajóst?

24

n-dimenziós sokaság (pl. 2D felület, 3D tér, 4D téridő, stb.) metrikája:

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + \dots + g_{12}dx^1 dx^2 + \dots =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j$$

A metrikát (a fenti egyenletet) a sokaság "lakói" mérésekre alapozva fel tudják állítani:

1. A sokaságot bekoordinátázzák az x^1, x^2, \dots, x^n (tetszőlegesen) felvett koordinátákkal.
2. Két közeli pont között megméri a ds távolságot, és ugyanakkor regisztrálják a két pont közötti dx^i koordináta-különbségeket is.
3. A 2-es lépést megismétlik sok közeli pontpárra. Összességében rengeteg adatot összegyűjtenek.
4. Ezekből az adatokból megállapítják a $g_{ij} = g_{ij}(x^k)$ függvényeket (a metrikus tenzor elemeit).

De: hogyan tudják a "lakók" megállapítani, hogy sokaságuk görbült-e?

25

Emlékeztető: ha sokaságunk 2D felület, alkalmazható a "Theorema Egregium" (Gauss, 1828):

$$K(x^1, x^2) = \frac{1}{2g} \left[2 \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{11}}{(\partial x^2)^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial x^1)^2} \right] +$$

$$+ \frac{g_{12}}{4g^2} \left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right) - 2 \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) + \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) \right] -$$

$$- \frac{g_{22}}{4g^2} \left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) - \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right)^2 \right] -$$

$$- \frac{g_{11}}{4g^2} \left[\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right) \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) - \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right)^2 \right]$$

ahol $g \equiv \det g_{ij} = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$

[csak 2D felületre alkalmazható!]

26

n-dimenziós sokaság görbültségét kifejező mennyiség:
a Riemann-tenzor (Riemann, 1854)

Ezt is ki tudják számítani a sokaság "lakói" a $g_{\alpha\beta}(x^\gamma)$ metrikus tenzorból:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} \equiv \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} \Gamma^\gamma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\mu}$$

ahol $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left[\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right]$, és $g^{\alpha\sigma}$ a metrikus tenzor inverze.

[tetszőleges dimenziójú sokaságra alkalmazható!]

27

TOVÁBBI PÉLDÁK

**Az n-dimenziós sokaságunk
legyen a 4D téridő!**

28

6. 4D téridő a világvűrben, nagy tömegektől távol; kockarács-hálózat, szinkronizált órák:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

koordináták: " x^0 " = t " x^1 " = x " x^2 " = y " x^3 " = z

metrikus tenzor: $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Riemann-tenzor: $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \dots = 0$ SÍK (GÖRBÜLETLEN) TÉRIDŐ!

29

7. 4D téridő a világvűrben, nagy tömegektől távol; gömbhéj-hálózat, szinkronizált órák:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

koordináták: " x^0 " = t " x^1 " = r " x^2 " = θ " x^3 " = φ

metrikus tenzor: $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$

Riemann-tenzor: $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \dots = 0$ SÍK (GÖRBÜLETLEN) TÉRIDŐ

30

8. Gömbszimmetrikus, álló tömeg körüli téridő; Schwarzschild-koordinátákkal felírva:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

koordináták: " x^0 " = t " x^1 " = r " x^2 " = θ " x^3 " = φ

metrikus tenzor: $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$

Riemann-tenzor: $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \dots \neq 0$ GÖRBÜLT TÉRIDŐ!

31

9. Gömbszimmetrikus, álló tömeg körüli téridő; Painlevé-Gullstrand-koordinátákkal felírva:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dT^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{r}} dT dr - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

koordináták: " x^0 " = T " x^1 " = r " x^2 " = θ " x^3 " = φ

metrikus tenzor: $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & -\sqrt{\frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{2M}{r}} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$

Riemann-tenzor: $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \dots \neq 0$ GÖRBÜLT TÉRIDŐ

32

10. Forgó fekete lyuk (+ a Nap + a Föld) körüli téridő; Doran-koordinátákkal felírva, az egyenlítői síkban:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dT^2 - 2\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}}dTdr + 2\left(\frac{2Ma}{r}\right)dTd\varphi +$$

$$+ 2a\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}}drd\varphi - \frac{r^2}{r^2 + a^2}dr^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right)d\varphi^2$$

koordináták: " x^0 " = T " x^1 " = r " x^2 " = φ

metrikus tenzor: $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{r} & -\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}} & \frac{2Ma}{r} \\ -\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}} & -\frac{r^2}{r^2 + a^2} & -a\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}} \\ \frac{2Ma}{r} & -a\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}} & r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \end{pmatrix}$

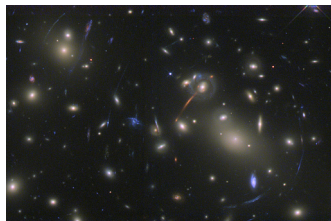
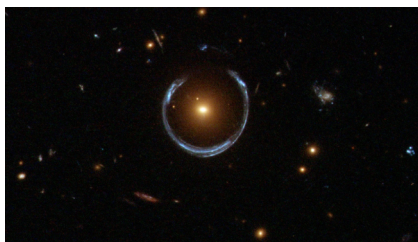
Riemann-tenzor: $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \dots \neq 0$

GÖRBÜLT TÉRIDŐ!

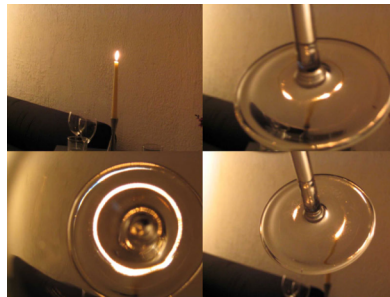
33

A görbült téridő néhány megfigyelhető következménye (részletesebben ld. később)

1. gravitációs lencsehatás (nagy tömegek - pl. galaxisok - begörbítik a fénysugarak útját)



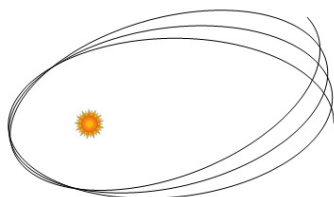
demonstráció házilag:



34

A görbült téridő néhány megfigyelhető következménye (részletesebben ld. később)

2. a bolygók perihéliumának vándorlása (a Nap körül a bolygók NEM ellipszispályán keringenek)



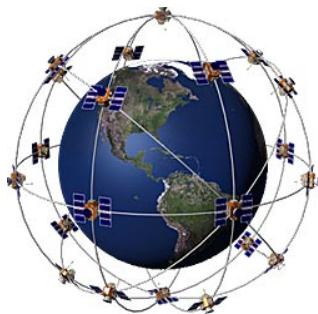
A naprendszerben a Merkúrnál a legerősebb az effektus: $\sim 43''/\text{évszázad}$
 $\sim 43''/(417 \text{ körfordulás})$

[A legközelebbi Merkúr-átvonulás: 2016. május 9.]

35

A görbült téridő néhány megfigyelhető következménye (részletesebben ld. később)

3. a GPS-nél relativisztikus korrekcióra van szükség (a Föld tömege begömbíti a téridőt)

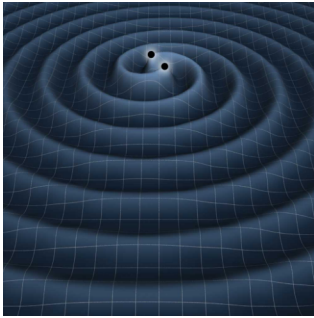


Nem egy az egyben a műholdak atomórái által mutatott időt kapják meg a vevőkészülékek, hanem a relativisztikus korrekciókkal (spec.rel. + ált. rel.) módosított értékeket. [Relativisztikus korrekciók nélkül naponta $\sim 10\text{km}$ távolságmérési hiba gyűlhetne össze.]

36

A görbült téridő néhány megfigyelhető következménye (részletesebben ld. később)

4. *gravitációs hullámok* (pl. két nagy tömegű objektum egyesülésekor)



pl. z-irányban terjedő, +-polarizációjú gravitációs hullám metrikája:

$$ds^2 = dt^2 - (1 + h)dx^2 - (1 - h)dy^2 - dz^2$$