10. GYAKORLAT

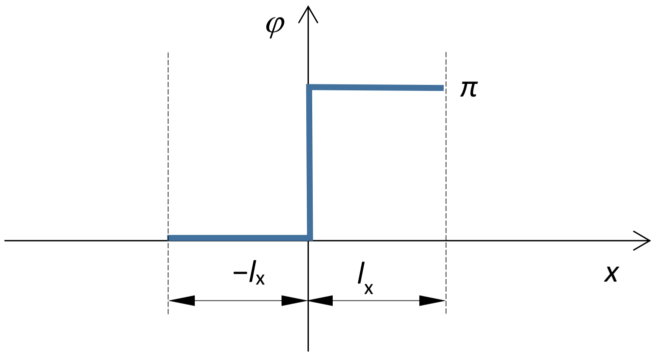
Dr. Erdei Gábor, 2019-11-26

Két ellenfázisú rés távolterének meghatározása Fraunhofer-diffrakcióval

$$E(x',y') = \frac{e^{ikz'} \cdot e^{i\frac{k}{2z'}\left(x'^2+y'^2\right)}}{i \cdot \lambda z'} \iint\limits_{\Sigma} E(x,y) \cdot e^{-i\frac{k}{z'}(x'x+y'y)} dxdy \tag{1}$$

y-irányban az apertúra legyen végtelen (1-dimenziós vizsgálat):

$$E(x') = \frac{e^{ikz'} \cdot e^{i\frac{kx'^2}{2z'}}}{i \cdot \lambda z'} \int\limits_{\Sigma} E(x) \cdot e^{-i\frac{kx'}{z'}x} dx \tag{2}$$



A téramplitudó abszolút értéke egységnyi az l_x szélességű szakaszon, azon kívül zérus.

$$\int\limits_{\Sigma} E(x) \cdot e^{-i\frac{kx'}{z'}x} dx = \int\limits_{-l_x}^{0} e^{-i\frac{kx'}{z'}x} dx - \int\limits_{0}^{l_x} e^{-i\frac{kx'}{z'}x} dx =$$

$$= -\frac{z'}{ikx'}\left[e^{-i\frac{kx'}{z'}x}\right]_{-l_x}^{0} + \frac{z'}{ikx'}\left[e^{-i\frac{kx'}{z'}x}\right]_{0}^{l_x} = \frac{z'}{ikx'}\left(-2 + e^{i\frac{kx'}{z'}l_x} + e^{-i\frac{kx'}{z'}l_x}\right) =$$

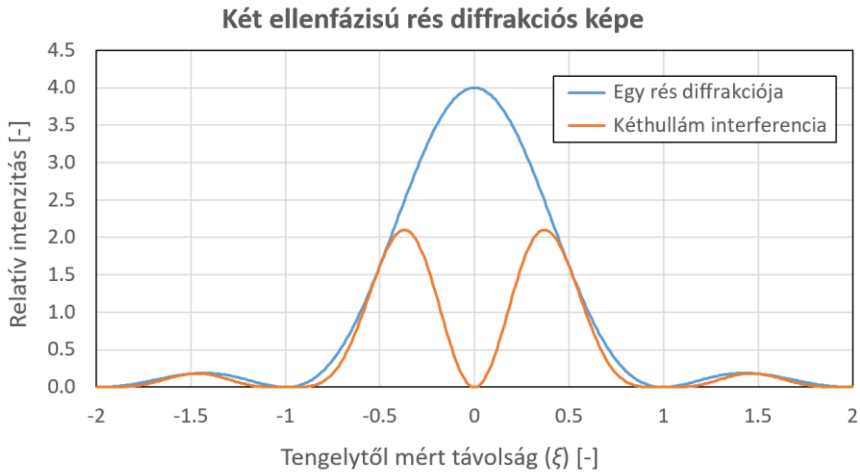
$$= \frac{z'2}{ikx'}\left[\cos\left(\frac{kx'}{z'}l_x\right) - 1\right] = -\frac{z'2}{ikx'}\left[2\sin^2\left(\frac{kx'}{z'}\frac{l_x}{2}\right)\right] = i \cdot 2l_x \cdot sinc\left(\frac{x'l_x}{\lambda z'}\right) \cdot \sin\left(\pi\frac{x'l_x}{\lambda z'}\right). \tag{3}$$

Ahol felhasználtuk, hogy:

$$\cos 2\theta \equiv 1 - 2\sin^2\theta \tag{4}$$

$$I(x') = \frac{\mathrm{v}\varepsilon}{2}\frac{1}{(\lambda z')^2} \cdot 4l_x^2 \cdot sinc^2\left(\frac{x'l_x}{\lambda z'}\right) \cdot \sin^2\left(\pi\frac{x'l_x}{\lambda z'}\right). \tag{5}$$

$$\xi \equiv \frac{x'l_x}{\lambda z'} \tag{6}$$



Érdekesség: optical vortex (optikai örvény)

(kép: wikipédia) A nyaláb egy 2π fázisugrást tartalmaz, hasonlóan a csavardiszlokációhoz. Ennek következtében a „hullámfront” csavarvonal alakot ölt, melynek tengelyében fázisszingularitás van – itt végig zérus a térerősség. A nyaláb forgatonyomatékot képes kifejteni kis részecskékre. Alkalmazás: pl. csillagászatban exobolygók fényképezése esetén a központi csillag fényének kioltására.

Fresnel-diffrakció felhasználása: fókuszált nyaláb tereloszlása

$$E(x',y') = \frac{e^{ikz'} \cdot e^{i\frac{k\left(x'^2+y'^2\right)}{2z'}}}{i\lambda z'} \iint_{\Sigma} E(x,y) \cdot e^{i\frac{k}{2z'}(x^2+y^2)} \cdot e^{-i\frac{k}{z'}(x'x+y'y)} dxdy \tag{7}$$

ld. előadásanyag…

Bár ez egy egyszerűsített levezetés volt, a fentiek analógiájára ugyanez a végeredmény némileg bonyolultabban kiadódik a Huygens-Fresnel integrálból is (ld. Optikai tervezés óra). Tehát a közelítés ez utóbbi keretein belül érvényes, azaz ha *NA* < 0,5.

Pl. Téglalapapertúra tereloszlása vékonylencse fókuszsíkjában

$\rho = f$ (fókusztávolság), $E(x, y) = E_0$

$$I(x',y') = \frac{v\varepsilon}{2}\frac{E_0^2}{(\lambda f)^2} l_x^2 l_y^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{x' l_x}{\lambda f}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{y' l_y}{\lambda f}\right) \tag{8}$$

$$x_{Nyquist} = \frac{\lambda f}{l_x} \tag{9}$$

Ugyanez körapertúra esetén:

$$R_{Airy} = 1{,}22\frac{\lambda f}{D} \tag{10}$$

Pl. m = 20× nagyítású mikroszkópobjektív: NA = 0,4, f = 9,0 mm, λ = 550 nm.

$$\frac{D}{f} = 2\frac{D/2}{f} = 2\tan\theta \approx 2\sin\theta = 2NA \tag{11}$$

$$R_{Airy} = 1{,}22\frac{\lambda}{2NA} = 0{,}61\frac{0{,}550\ \mu\text{m}}{0.4} = 0{,}84\ \mu\text{m} \tag{12}$$

Gauss-nyaláb tereloszlása egy lencse fókuszsíkjában

$\rho = f$ (fókusztávolság). Feltesszük, hogy a lencse apertúrája jóval nagyobb mint a Gauss-nyaláb $1/e^2$-ed sugara (w_0). Ekkor az integrálást mínusz végtelentől plusz végtelenig végezhetjük.

$$E(x,y) \equiv e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} = e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} \tag{13}$$

$$E(x',y') = \frac{e^{i\frac{k}{2f}\left(x'^2+y'^2\right)}}{i\cdot\lambda f}\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}}\cdot e^{-i\frac{k}{f}(x'x+y'y)}dxdy \tag{14}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{w_0^2}}\cdot e^{-i\frac{kx'}{f}x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{w_0^2}}\cdot\left(\cos\left(-\frac{kx'}{f}x\right) + i\sin\left(-\frac{kx'}{f}x\right)\right)dx \tag{15}$$

A második tag antiszimmetrikus, ezért az integrálja nulla. Az első tagé zárt alakban felírható (ld. Abramowitz and Stegun (1972, p. 302, equation 7.4.6)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{w_0^2}}\cdot\cos\left(\frac{kx'}{f}x\right)dx = \sqrt{\pi w_0^2}\cdot e^{-\pi^2 w_0^2\left(\frac{x'}{\lambda f}\right)^2} \tag{16}$$

Ami szintén Gauss-függvény. Az intenzitás:

$$I(x',y') = \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda f}\right)^2\cdot e^{-2\pi^2 w_0^2\left(\frac{x'}{\lambda f}\right)^2}\cdot e^{-2\pi^2 w_0^2\left(\frac{y'}{\lambda f}\right)^2} = \frac{\pi w_0^2}{(\lambda f)^2}\cdot e^{-2\pi^2 w_0^2\left(\frac{r'}{\lambda f}\right)^2} \tag{17}$$

$$I(r') = \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda f}\right)^2\cdot e^{-2\left(\frac{r'}{\frac{\lambda f}{\pi w_0}}\right)^2} \tag{18}$$

Vagyis a fókuszban a nyaláb $1/e^2$-ed sugara (w):

$$w = \frac{\lambda f}{\pi w_0} = \frac{2}{\pi}\frac{\lambda f}{2w_0} = 0.637\frac{\lambda f}{2w_0}. \tag{19}$$

Mind (18) és (19) tökéletes összhangban van a Gauss-nyaláb távoltéri tereloszlásáról tanultakkal (ld. 2. gyakorlat), azzal a helyettesítéssel, hogy $z \to f$.