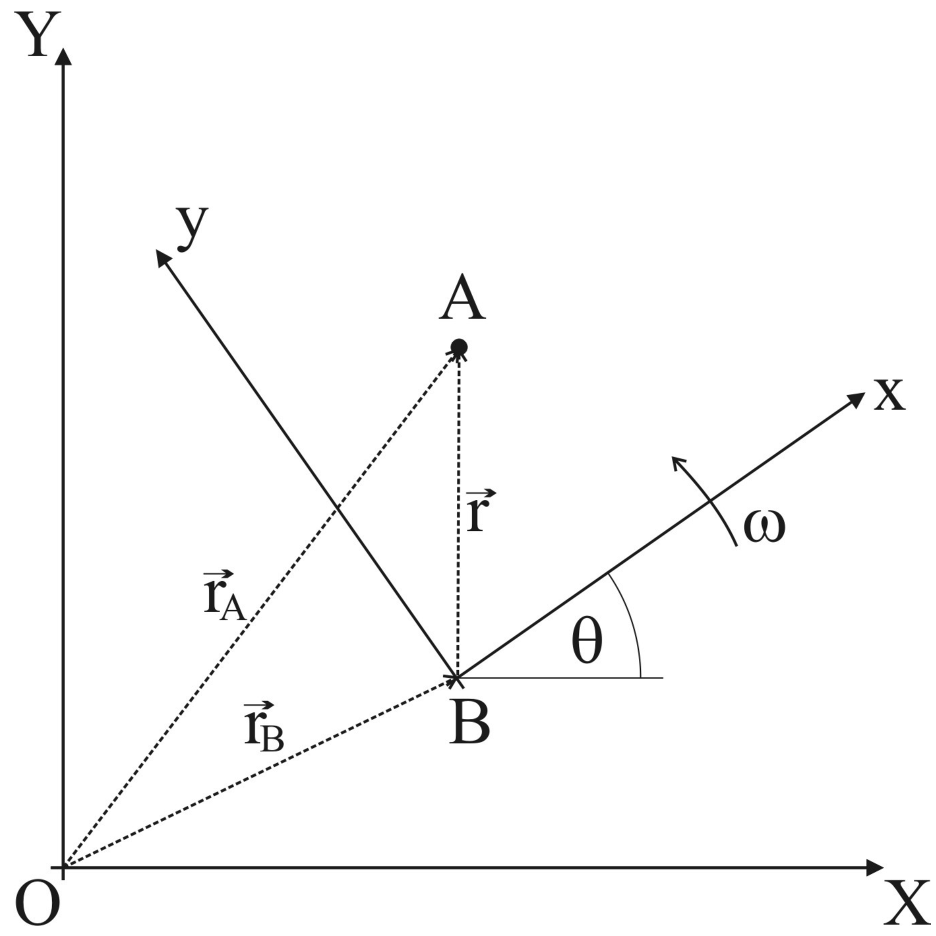
# Mozgás leírása nem-inerciarendszerekben. Tehetetlenségi erők.

**Bokor Nándor, BME, 2013**

(X,Y): *inerciarendszer*.

(x,y): *gyorsuló vonatkoztatási rendszer*. Ez *nem inerciarendszer*, mert:
(1) az origója, B, *transzlációs gyorsulást végez* az (X,Y) inerciarendszerhez képest,
(2) az (x,y) koordinátatengelyek *forognak* a B origó körül.




A tömegpont, amelynek a mozgását le akarjuk írni, éppen az A pontban tartózkodik. Az (X,Y) inerciarendszerben mért helyvektorát így írhatjuk:

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r} = \vec{r}_B + \left(x\vec{i} + y\vec{j}\right), \qquad (1)$$

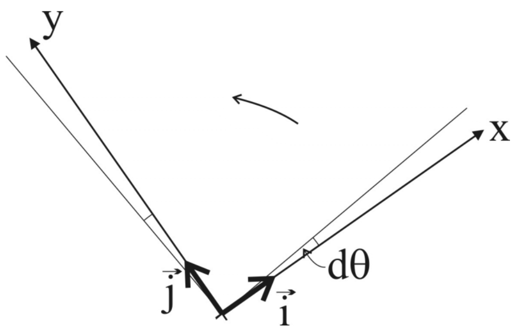
ahol $\vec{r}$ az (x,y) gyorsuló vonatkoztatási rendszerben mért helyvektor, $\vec{i}$ és $\vec{j}$ pedig a gyorsuló vonatkoztatási rendszer x- és y-irányú egységvektorai.
Amint az alábbi ábra mutatja, ezeknek az egységvektoroknak az idő szerinti deriváltja (változási gyorsasága) így írható:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\theta \cdot \vec{j}}{dt} = \omega \cdot \vec{j} \qquad (2)$$

illetve

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = -\frac{d\theta \cdot \vec{i}}{dt} = -\omega \cdot \vec{i} \ , \tag{3}$$

ahol $\omega = \dot{\theta}$ az (x,y) tengelyek szögsebessége.




Ez a szögsebesség vektoriális alakban a következőképpen írható fel:

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k} \ , \tag{4}$$

ahol $\vec{k}$ a z-irányú egységvektor (amely az ábra síkjából kifelé mutat). Az $\vec{\omega}$ iránya tehát az ún. „jobbkéz-szabályt“ követi.

A (4) alapján könnyen beláthatóak az alábbi összefüggések:

$$\vec{\omega} \times \vec{i} = \omega \cdot \vec{j} \tag{5}$$

és

$$\vec{\omega} \times \vec{j} = -\omega \cdot \vec{i} \ . \tag{6}$$

A (2)-t az (5)-tel, és a (3)-at a (6)-tal összevetve az

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega} \times \vec{i} \tag{7}$$

és

$$\dot{\vec{j}} = \vec{\omega} \times \vec{j} \tag{8}$$

összefüggésekhez jutunk.

A tömegpont (X,Y) rendszerbeli sebességét úgy kapjuk meg, hogy az (1) egyenletet idő szerint deriváljuk:

$$\dot{\vec{r}}_A = \dot{\vec{r}}_B + \frac{d}{dt}\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) = \dot{\vec{r}}_B + \left(x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}}\right) + \left(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}\right). \tag{9}$$

A (9) jobb oldalán szereplő második tagot (7) és (8) felhasználásával átírhatjuk:

$$x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} = \vec{\omega} \times \left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) = \vec{\omega} \times \vec{r}\ , \tag{10}$$

a (9) jobb oldalán szereplő harmadik tag pedig a tömegpontnak a *gyorsuló vonatkoztatási rendszerben mért* sebességét (az ún. „relatív sebességet”) adja meg:

$$\vec{v}_{rel} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}\ . \tag{11}$$

(10)-et és (11)-et a (9)-be behelyettesítve a tömegpont sebességére a

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_{rel} \tag{12}$$

összefüggés adódik, ahol $\vec{v}_B$ az a sebesség amellyel a B origó mozog (az inerciarendszerben mérve).

Az A pontban levő tömegpont (inerciarendszerben mért) gyorsulása a (12) idő szerinti deriválásából kapható meg:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{v}}_{rel}\ . \tag{13}$$

A fenti összefüggéseket használva a (13) jobb oldalán szereplő harmadik tag átírható a következő alakba:

$$\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_{rel}\right) = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) + \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}\ , \tag{14}$$

a (13) jobb oldalán szereplő negyedik tag pedig ebbe az alakba:

$$\dot{\vec{v}}_{rel} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}\right) = \dot{x}\dot{\vec{i}} + \dot{y}\dot{\vec{j}} + \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} = \vec{\omega} \times \left(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}\right) + \vec{a}_{rel} = \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}\ , \tag{15}$$

ahol $\vec{a}_{rel}$ a tömegpont gyorsulása *a gyorsuló vonatkoztatási rendszerben mérve* („relatív gyorsulás”).

Tehát

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}\ . \tag{16}$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt a tömegpont *m* tömegével, és rendezzük át az egyenletet, hogy *úgy nézzen ki*, mint Newton 2. törvénye (amit a gyorsuló megfigyelő nézőpontjából írtunk fel):

$$m\vec{a}_{rel} = \vec{F}_{net} - m\vec{a}_B + m\vec{r} \times \dot{\vec{\omega}} + m\vec{\omega} \times \left(\vec{r} \times \vec{\omega}\right) + 2m\vec{v}_{rel} \times \vec{\omega}\ , \tag{17}$$

ahol $m\vec{a}_A$ helyett az eredő erőt, $\vec{F}_{net}$-et írhattuk be, Newton 2. törvénye szerint (amely inerciarendszerekben érvényes).

Összefoglalva: ahhoz, hogy a Newton2-höz hasonló egyenletet használhasson, a gyorsuló megfigyelő kénytelen további „erőket“ bevezetni az egyenlet jobb oldalán (az *igazi, fizikai kölcsönhatásokból származó* $\vec{F}_{net}$ eredő erő mellé). Ezeket a további tagokat „tehetetlenségi erőknek“ nevezzük. Ezek nem írnak le semmilyen fizikai kölcsönhatást. Csupán matematikai kifejezések, amelyekre a gyorsuló megfigyelőnek azért van szüksége, mert szeretne Newton 2. törvényéhez hasonló kinézetű egyenletet használni.

A (17) jobb oldalán szereplő tehetetlenségi erők elnevezése:

| | |
|---|---|
| $-m\vec{a}_B$: | transzlációs tehetetlenségi erő |
| $m\vec{r} \times \dot{\vec{\omega}}$: | Euler-erő |
| $m\vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$: | centrifugális erő |
| $2m\vec{v}_{rel} \times \vec{\omega}$: | Coriolis-erő |