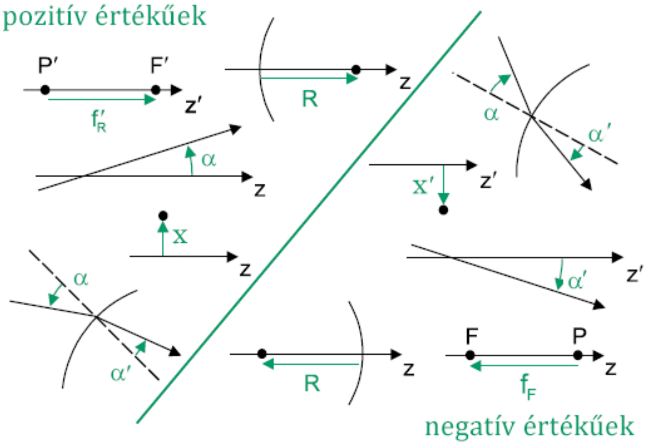
Optika gyakorlat 3.

Mátrix optika, vékonylencse, vastaglencse, optikai leképezés

Mátrix optika paraxiális közelítésben

Hengerszimmetrikus rendszerben a fénysugarakat két paraméterrel jellemezzük: 1. az optikai tengelytől mért laterális távolság (x); 2. az optikai tengellyel bezárt szög (α). Ezen két paramétert összekapcsolva, adott z helyen a fénysugarat egyértelműen meghatározza az alábbi oszlopvektor:

$$\begin{bmatrix} x \\ n\alpha \end{bmatrix} \qquad , \textit{ahol } n \textit{ a közeg törésmutatója}$$

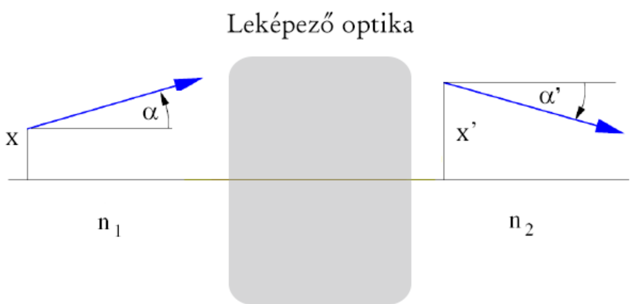


1. ábra. Előjel-konvenciók

A paraxiális közelítés két feltétele:
1. Tengelyhez közeli sugarak (x laterális távolság jóval kisebb, mint a fizikai rendszerméret)
2. Tengellyel kis szöget bezáró sugarak ($\alpha << 1$)

Ebben az esetben az optikai leképezőrendszerben terjedő fénysugarak a felületekkel való találkozáskor azok normálisával is kis szöget zárnak be $\longrightarrow$ a sin és tan trigonometrikus függvények helyettesítehtők magával a szög radiánban kifejezett értékével.

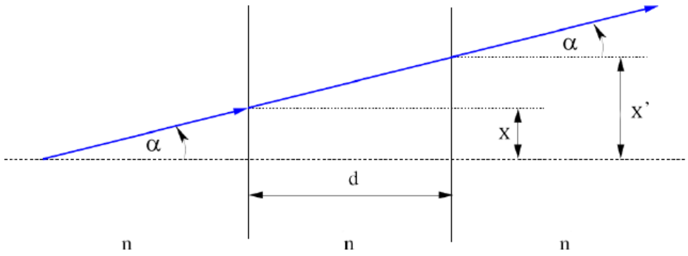
$$\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) \approx \alpha[rad]$$



Az optikai rendszer hatását a fénysugarakra egy lináris transzformációval kívánjuk leírni, ahol M a leképezés mátrixa, és a vesszős mennyiségek a transzformáció utáni állapotot jellemzik:

$$\begin{bmatrix} x' \\ n'\alpha' \end{bmatrix} = \bar{\bar{M}} \begin{bmatrix} x \\ n\alpha \end{bmatrix}$$

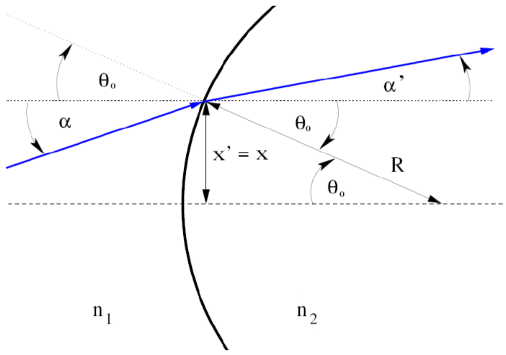
Szabad terjedés mátrixa



$$x' = x + d \cdot \tan(\alpha) \approx x + d \cdot \alpha$$
$$\alpha = \alpha'$$

$$\longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} x' \\ n'\alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ n\alpha \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \textit{ haladási mátrix}$$

Görbült határfelületen való törés mátrixa



A Snellius-Descartes törvény paraxiális közelítésben:

$$n_1 \cdot (\alpha - \theta_0) \approx n_2 \cdot (\alpha' - \theta_0) \qquad , \textit{ahol} \quad \Theta_0 \approx -\frac{x}{R}$$

$$n_2\alpha' = n_1\alpha - \frac{n_2 - n_1}{R} \cdot x = n_1\alpha - P \cdot x \qquad , \textit{ahol } P = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \textit{az ún. törőerő}$$
$$x = x'$$

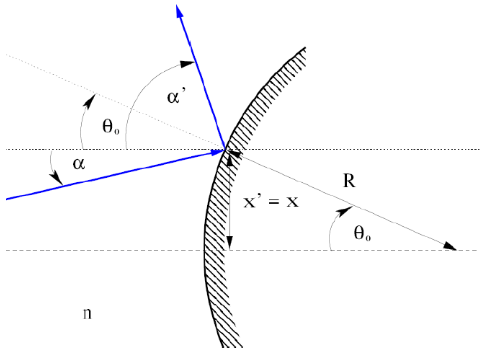
$$\longrightarrow \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{bmatrix} \textit{ törési mátrix}$$

Görbült határfelületen való tükröződés mátrixa

A visszaverődési törvény szerint:

$$\alpha - \theta_0 = -\alpha' + \theta_0 \qquad , \textit{ahol} \quad \Theta_0 \approx -\frac{x}{R}$$

$$n\alpha' = -n\alpha - \frac{2n}{R} \cdot x = -n\alpha - P \cdot x \qquad , \textit{ahol } P = \frac{2n}{R} \quad \textit{a törőerő}$$
$$x = x'$$

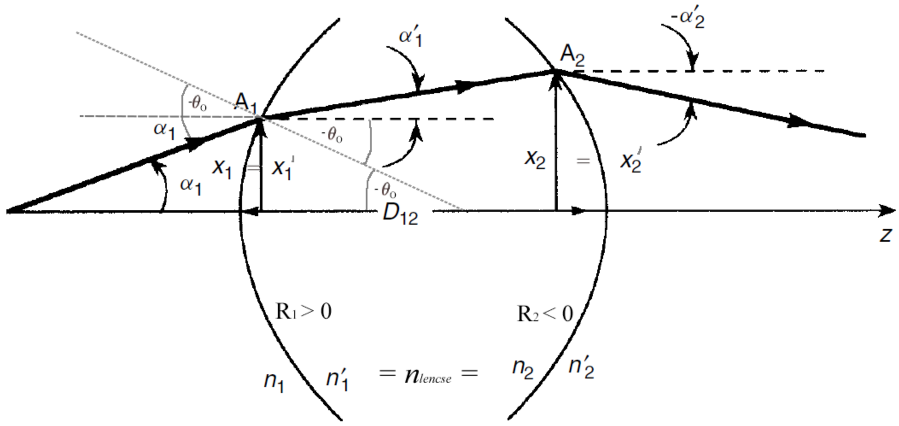


$$\longrightarrow \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P & -1 \end{bmatrix} \; \textit{visszaverődési mátrix}$$

Tetszőleges elemekből felépülő optikai rendszer esetén a különböző transzformációs mátrixokat (haladás, törés, visszaverődés) megfelelő sorrendben (jobbról balra) egymás után felírva és összeszorozva megkapjuk a teljes rendszert leíró transzformációs mátrixot. A rendszermátrix az optikai rendszer bal szélén belépő fénysugár és a rendszer jobb szélén kilépő fénysugár között teremt kapcsolatot.

1. példa: Vastaglencse mátrix

Írjuk fel a vastaglencse transzformációs mátrixát paraxiális közelítésben!



2. ábra. Vastaglencse

Megoldás:
Definíció szerint:

$$\begin{bmatrix} x_2' \\ n_2'\alpha_2' \end{bmatrix} = \bar{\bar{M}}_{12} \begin{bmatrix} x_1 \\ n_1\alpha_1 \end{bmatrix}$$

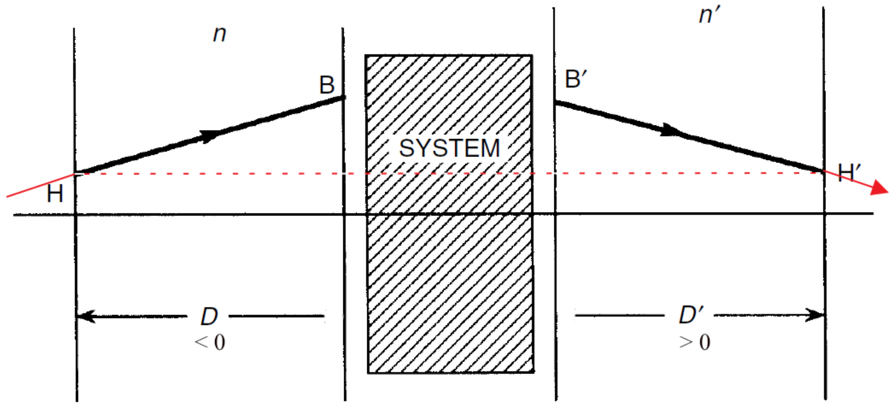
$$\bar{\bar{M}}_{12} = \bar{\bar{R}}_2 \cdot \bar{\bar{T}}_{12} \cdot \bar{\bar{R}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{D_{12}}{n_l} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{P_1 D_{12}}{n_l} & \frac{D_{12}}{n_l} \\ -P_1 - P_2 + \frac{P_1 P_2 D_{12}}{n_l} & 1 - \frac{P_2 D_{12}}{n_l} \end{bmatrix}$$

Vékonylencse mátrix ($D_{12} \longrightarrow 0$)

$$\bar{\bar{M}}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{bmatrix} \quad , ahol \quad P = P_1 + P_2$$

Fősík-fősík leképezés

Milyen új változók bevezetésével helyettesíthető egy tetszőleges optikai rendszer vékonylencse transzformációs mátrixxal? (Segítség: a rendszert helyettesítsük egy olyan vékonylencsével, ahol gondolatban a vékonylencse két szélét eltávolítotuk egymástól. Az eredő rendszermátrixra alkalmazzuk a vékonylencse mátrix megfeleltetést!



3. ábra. Az optikai rendszer helyettesítése fősík-fősík párral

Megoldás:

Tegyük fel, hogy az optikai rendszer transzformációs $M_{BB'}$ mátrixa ismert (pl. vastaglencse mátrix).

$$\overline{\overline{M}}_{BB'} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

A H $\longrightarrow$ H' leképezés mátrixát feleltessük meg egy vékonylencse mátrixnak:

$$\overline{\overline{M}}_{HH'} = \overline{\overline{T}}' \cdot \overline{\overline{M}}_{BB'} \cdot \overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{D'}{n'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{-D}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} M_{11} + \frac{D' M_{21}}{n'} & -\frac{M_{11} D}{n} + M_{12} - \frac{M_{21} D D'}{n n'} + \frac{M_{22} D'}{n'} \\ M_{21} & M_{22} - \frac{D M_{21}}{n} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{bmatrix}$$

Ez praktikusan azt jelenti, hogy a H és H' síkok egy vékonylencse bal- és jobboldali felületének felelnek meg. A síkok között a fény azonos magasságban halad (laterális nagyítás = 1), és a fény útjának elhajlását kizárólag a P törőerő határozza meg. A H-t tárgyoldali fősíknak, a D-t a tárgyoldali fősík távolságnak, A H'-t képoldali fősíknak, a D'-t a képoldali fősík távolságnak nevezzük.

Leolvasva a megfelelő mátrixelemeket kapjuk:

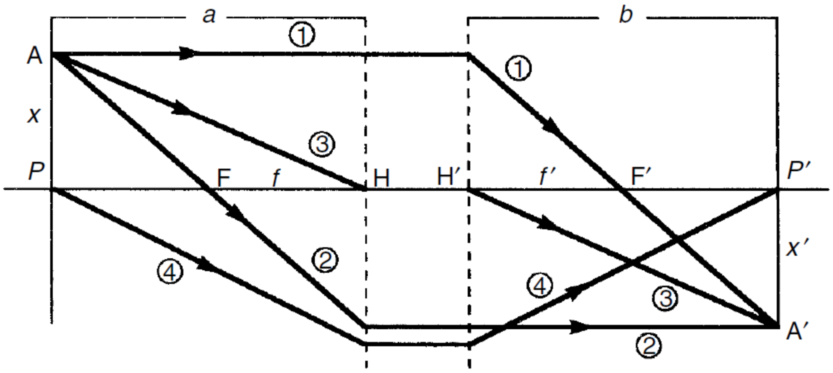
$$P_{HH'} = -M_{21}$$

$$D = -\frac{n}{M_{21}} \cdot (1 - M_{22})$$

$$D' = \frac{n'}{M_{21}} \cdot (1 - M_{11})$$

A vastaglencse mátrixra alkalmazva a kapott egyenletet, kapjuk a vastaglencse törőerejét és fősíkjainak távolságát:

$$P_{HH'} = P_l = P_1 + P_2 - \frac{P_1 \cdot P_2 \cdot D_{12}}{n_l}$$



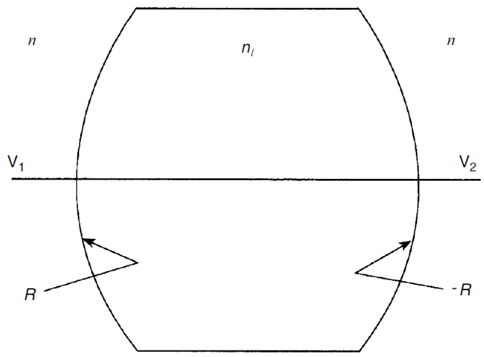
4. ábra. Nevezetes sugarak és fősíkok

$$D = -\frac{n}{M_{21}} \cdot (1 - M_{22}) = D_{12} \cdot \frac{n}{n_l} \cdot \frac{P_2}{P_l}$$

$$D' = \frac{n'}{M_{21}} \cdot (1 - M_{11}) = -D_{12} \cdot \frac{n'}{n_l} \cdot \frac{P_1}{P_l}$$

2. példa: Vastaglencse fősíkok

Határozzuk meg egy $n = 1$ törésmutatójú közegbe helyezett $n_l = 1,5$ törésmutatójú D_{12} vastagságú, $+R$ és $-R$ görbületi sugarú vékonylencsékből létrehozott vastaglencse törőerejét, illetve a fősíkjainak helyét!



Megoldás: A vastaglencse törőereje:

$$P_l = P_1 + P_2 - \frac{P_1 \cdot P_2 \cdot D_{12}}{n_l}$$

Felhasználva, hogy a két vékonylencse törőereje rendre:

$$P_1 = \frac{n_l - n}{R}$$

$$P_2 = \frac{n - n_l}{-R} = P_1$$

A vastaglencse törőereje a következőképpen írható:

$$P_l = P_1 + P_2 - \frac{P_1 \cdot P_2 \cdot D_{12}}{n_l} = 2 \cdot P_1 - \frac{(n_l - n)^2}{n_l} \cdot \frac{D_{12}}{R^2}$$

A numerikus értékeket behelyettesítve kapjuk, hogy a görbületi sugár függvényében a törőerő:

$$P_l = 2 \cdot \frac{0,5}{R} - \frac{0,25}{0,5} \cdot \frac{D_{12}}{R^2}$$

Amennyiben $D_{12} << R^2$ a képlet az utolsó tag elhagyásával a következő alakra egyszerűsödik:

$$P_l = P_1 + P_2 = 2 \cdot \frac{0,5}{R} = \frac{1}{R}$$

A vastaglencse törőerejének ismeretében a fősíkok helye is meghatározható. Alkalmazzuk továbbra is a $D_{12} << R^2$ közelítést:

$$D = -\frac{n}{M_{21}} \cdot (1 - M_{22}) = D_{12} \cdot \frac{n}{n_l} \cdot \frac{P_2}{P_l}$$

$$D' = \frac{n'}{M_{21}} \cdot (1 - M_{11}) = -D_{12} \cdot \frac{n'}{n_l} \cdot \frac{P_1}{P_l}$$

Ekkor $D_{12} << R^2$ miatt:

$$P_l = 2 \cdot P_1 = 2 \cdot P_2$$

Ezt felhasználva a vastaglencse fősíkjainak helye:

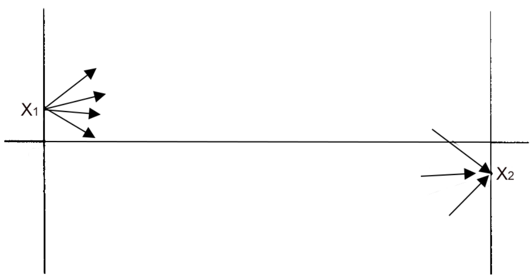
$$D = D_{12} \cdot \frac{n}{n_l} \cdot \frac{P_2}{P_l} = D_{12} \cdot \frac{1}{1,5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{D_{12}}{3}$$

$$D' = -D_{12} \cdot \frac{n'}{n_l} \cdot \frac{P_1}{P_l} = -D_{12} \cdot \frac{1}{1,5} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{D_{12}}{3}$$

Tehát a tárgy- és képoldali fősíkok helye: $D = -D' = \dfrac{D_{12}}{3}$.

Sík-sík leképezés mátrixa

Határozzuk meg egy általános sík-sík leképezés transzformációs mátrixát! Azonosítsuk a mátrixelemeket funkciójuk szerint!



5. ábra. Sík-sík leképezés

Megoldás: A leképezés mátrixa legyen:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ n_2\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ n_1\alpha_1 \end{bmatrix}$$

A fénysugarak különböző szögek alatt indulnak el a tárgyoldali x_1 pontból, és a leképezés definíciója szerint egy pontba fókuszálódnak a képoldalon: x_2. Mivel a képoldalon az érkezés független a tárgyoldali kiindulási szögektől, ezért a jobb felső mátrixelem B = 0.

Az A paraméter a rendszer laterális nagyítását jellemzi:

$$A = \frac{x_2}{x_1} \equiv m_x$$

Az egyenletrendszer második sorát kifejtve kapjuk:

$$n_2\alpha_2 = D \cdot n_1\alpha_1 + C \cdot x_1$$

Ezzel az egyenlettel már a törőfelületek esetében találkoztunk, ott a C paremétert a törőerő -1 -szereseként definiáltuk: $C \equiv -P$.

Vonjunk ki egymásból két különböző α_1 szöggel elindított fénysugárra felírt egyenletet (az x_1-es tag kiesik):

$$n_2\Delta\alpha_2 = n_1\Delta\alpha_1 \cdot D$$

A rendszer szögnagyítása definíció szerint:

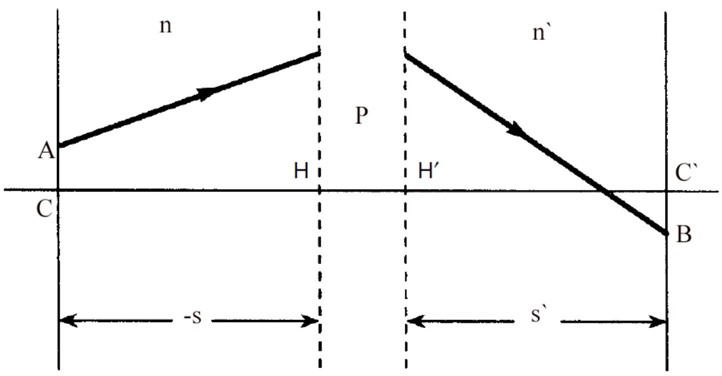
$$m_\alpha = \frac{\Delta\alpha_2}{\Delta\alpha_1} = \frac{n}{n'} \cdot D$$

A fenti összefüggéseket felhasználva a leképezés mátrixára kapjuk:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_x & 0 \\ -P & \frac{n'}{n} \cdot m_\alpha \end{bmatrix}$$

Képalkotás - leképezési törvény

Végezzünk képalkotást egy lencse segítségével, melynek törőereje P. A tárgy $-s$ távolságra helyezkedik el a tárgyoldali fősíktól n törésmutatójú közegben, a kép pedig s' távolságra a képoldali fősíktól n' törésmutatójú közegben.
Vezessük le a leképezési törvényt a fősíkok segítségével!



6. ábra. Képalkotás

Megoldás: A fősíkok segítségével a képalkotás 3 egyszerű lépésre bontható:

- terjedés a tárgysíktól a tárgyoldali fősíkig
- leképezés a tárgyoldali fősíkról a képoldali fősíkra
- terjedés a képoldali fősíktók a képsíkig

Ezek mátrixa rendre:

Terjedés a tárgysíktól a tárgyoldali fősíkig: $\begin{bmatrix} 1 & \frac{-s}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Leképezés a tárgyoldali fősíkról a képoldali fősíkra P törőerejű lencsével: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{bmatrix}$

Terjedés a képoldali fősíktól a képsíkig: $\begin{bmatrix} 1 & \frac{s'}{n'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ezek alapján a teljes lencse képalkotás mátrixa:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{s'}{n'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{-s}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elvégezve a mátrixszorzásokat kapjuk:

$$M = \begin{bmatrix} 1 - \frac{P \cdot s'}{n'} & \frac{s'}{n'} - \frac{s}{n} + \frac{P \cdot s' \cdot s}{n' \cdot n} \\ -P & 1 + \frac{P \cdot s}{n} \end{bmatrix}$$

Képalkotás esetén az $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ mátrixban $B = 0$ kell hogy legyen. Ezt felhasználva a következő egyenletet kapjuk a lencse leképezésére:

$$B = \frac{s'}{n'} - \frac{s}{n} + \frac{P \cdot s' \cdot s}{n' \cdot n} = 0$$

Átrendezve az egyenletet:

$$-\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = P$$

Vizsgáljuk meg a leképezést végtelen távoli tárgypont, azaz $lim_{s \to \infty}$ esetén. Végtelen távoli tárgyat a fókuszsíkjába képez le a lencse, így a fenti egyenletbe helyettesítve adódik a képoldali fókusztávolság definíciója:

$$s' = \frac{n'}{P} = f'$$

Hasonlóképpen vizsgáljuk meg a leképezést végtelen távoli képpont, azaz $lim_{s' \to \infty}$ esetén. Végtelen távoli képet a fókuszsíkjában elhelyezett tárgyról hoz létre a lencse, így a fenti egyenletbe helyettesítve adódik a tárgyoldali fókusztávolság definíciója:

$$s = -\frac{n}{P} = f$$

Tehát a lencse törőereje a tárgy- illetve a képoldali fókusztávolság és a törésmutatók segítségével a következőképpen fejezhető ki:

$$P = -\frac{n}{f} = \frac{n'}{f'}$$

Abban az esetben ha a lencsét $n = n' = 1$ törésmutatójú közegben helyezzük el a fenti egyenlet éppen a leképezési törvényt adja eredményül:

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'}$$

Vizsgáljuk meg részletesebben a lencse képalkotására vonatkozó $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ mátrixot.

A mátrix A eleme a lencse nagyítását határozza meg, mely ebben az esetben:

$$m_x = A = 1 - \frac{P \cdot s'}{n'} = 1 - (1 - \frac{n \cdot s'}{n' \cdot s}) = \frac{n \cdot s'}{n' \cdot s}$$

Tehát a lencse nagyítása $m_x = \dfrac{n \cdot s'}{n' \cdot s}$, ahol a fősíkok az $m_x = 1$ nagyításhoz tatrozó síkok. $m_x < 0$ esetén valódi, míg $m_x > 0$ esetén virtuális kép keletkezik.

Hasonlóan a mátrix D eleme a lencse szögnagyításával arányos, ahol az arányossági tényező a törésmutatók aránya. Ebben az esetben:

$$m_\alpha = \frac{n}{n'} \cdot D = \frac{n}{n'} \cdot (1 + \frac{P \cdot s}{n}) = \frac{n}{n'} \cdot (1 + (-1 + \frac{n' \cdot s}{n \cdot s'})) = \frac{s}{s'}$$

Tehát a lencse szögnagyítása $m_\alpha = \dfrac{s}{s'}$.

A lencse longitudinális nagyítása:

$$m_z = \frac{ds'}{ds} = \frac{n'}{n} \cdot m_x^2$$