

Szabad kő röppályája Schwarzschild-, ill. Painlevé-Gullstrand-“térképen“.

$x^\alpha(\tau) = ?$ [$T(\tau), r(\tau), \theta(\tau), \varphi(\tau) = ?$] [másik lehetőség: $r(\varphi) = ?$ stb.]

$$\frac{L}{m} = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} (= konst)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{mr^2} \quad [1]$$

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dT}{d\tau} - \sqrt{\frac{2M}{r}} \frac{dr}{d\tau} (= konst)$$

$$\frac{dT}{d\tau} = \left[\frac{E}{m} + \sqrt{\frac{2M}{r}} \frac{dr}{d\tau} \right] \cdot \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \quad [2]$$

1

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dT^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{r}} dT dr - dr^2 - r^2 d\varphi^2$$

$$1 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dT}{d\tau}\right)^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{r}} \left(\frac{dT}{d\tau}\right) \left(\frac{dr}{d\tau}\right) - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \quad [3]$$

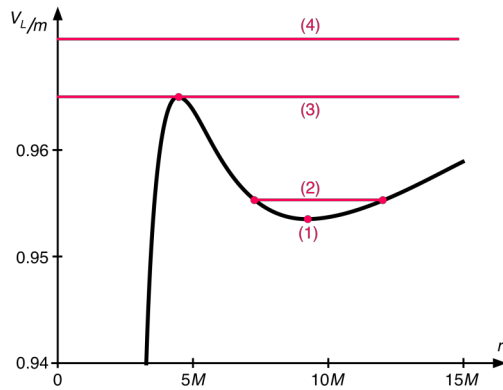
[1], [2] és [3] alapján:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{m^2 r^2}\right)$$

$$\left[\frac{V_L(r)}{m}\right]^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{m^2 r^2}\right) \quad \text{“effektív potenciál“}$$

2

pl. $L/m = 3.7M$:



$$\left[\frac{V_L(r)}{m} \right]^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \right)$$

- (1) stabil körpálya
- (2) ellipszis-szerű pálya (ld. Merkúr pályája a Nap körül)
- (3) instabil („borotvaél“-) körpálya
- (4) „fejesugrás“ a fekete lyukba

3

Hasonlítsuk össze a newtoni és az einsteini számolást!

Newton:

$$\frac{L}{m} = r^2 \frac{d\varphi}{dt} (= konst)$$

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \quad (\text{sebességkomponensek polárkoordináta-rendszerben})$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = E - \left(-\frac{Mm}{r} \right) \quad (\text{kin. energia} = \text{összenergia} - \text{pot. energia})$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{E}{m} - \left[-\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2m^2 r^2} \right] \quad [\text{NEP}]$$

4

Newton:

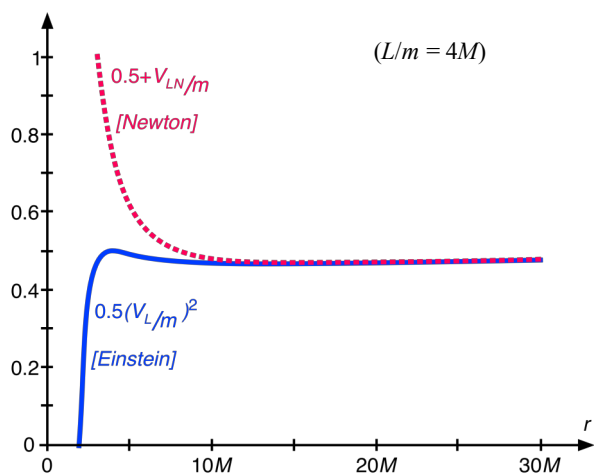
$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{E}{m} - \left[-\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2m^2 r^2} \right] \quad \text{[NEP]}$$

$$\frac{V_{LN}(r)}{m} = -\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2m^2 r^2} \quad \text{Newtoni effektív potenciál}$$

Einstein:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{E}{m} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{V_L(r)}{m} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{E}{m} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{E}{m} \right)^2 - \left[\frac{1}{2} - \frac{M}{r} + \frac{L^2}{2m^2 r^2} - \frac{ML^2}{m^2 r^3} \right] \quad \text{[GREP]} \end{aligned}$$

5

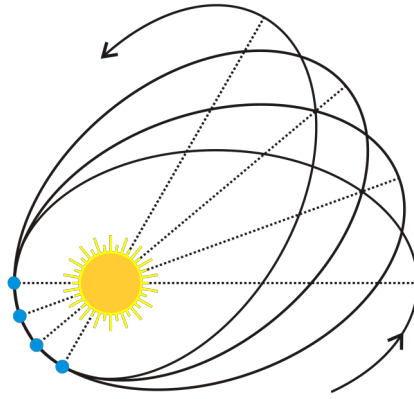


A newtoni effektív potenciálból hiányzik az $\sim 1/r^3$ -ös vonzó tag \rightarrow
 a newtoni számolás szerint nem lehet beleesni egy pontszerű tömegbe, kivéve ha
 sugárirányban esünk felé.

Einstein szerint bele lehet esni.

6

A Merkúr perihélium-precessziójának számértéke.



Kérdés: a ki-be oszcillálás periódusideje (T_p) ugyanannyi-e, mint a körüljárás periódusideje (T_ϕ)?

7

Kitérő: harmonikus oszcillátor (rugóhoz rögzített test)

$$x(t) = A \sin \omega t \quad \text{ahol } \omega = \sqrt{k/m}$$

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$$\frac{V(x)}{m} = \frac{1}{2} \omega^2 x^2$$

$$\frac{d(V/m)}{dx} = \omega^2 x$$

$$\frac{d^2(V/m)}{dx^2} = \omega^2$$

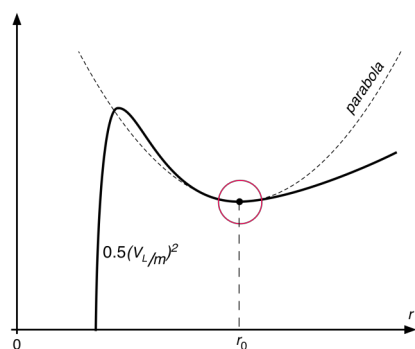
A potenciális energia függvényből közvetlenül megkapható a rezgés körfrekvenciája.

8

Vissza a Merkúrhez:

Newton: $\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{E}{m} - \left[-\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2m^2 r^2} \right] = \frac{E}{m} - \frac{V_{LN}}{m}$ [NEP]

Einstein: $\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{E}{m} \right)^2 - \left[\frac{1}{2} - \frac{M}{r} + \frac{L^2}{2m^2 r^2} - \frac{ML^2}{m^2 r^3} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{E}{m} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{V_L}{m} \right)^2$ [GREP]



A ki-be oszillálás körfrekvenciája:

$$\omega_r^2 = \left[\frac{d^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{V_L}{m} \right)^2 \right]}{dr^2} \right]_{r=r_0} = \dots = \frac{M(r_0 - 6M)}{r_0^3(r_0 - 3M)}$$

[Newtonnál: $\omega_{rN}^2 = \dots = \frac{M}{r_0^3}$]

9

A körüljárás (átlagos) szögsebessége:

$$\frac{L}{m} = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = r^2 \omega_\varphi = r_0^2 \bar{\omega}_\varphi$$

$$\bar{\omega}_\varphi^2 = \frac{L^2}{m^2 r_0^4} = \dots = \frac{Mr_0}{r_0^3(r_0 - 3M)}$$

[Newtonnál: $\bar{\omega}_{\varphi N}^2 = \dots = \frac{M}{r_0^3}$]

Tehát:

$$\omega_r < \bar{\omega}_\varphi \quad \rightarrow \quad \text{a perihélium előrehalad}$$

[Newtonnál: $\omega_{rN} = \bar{\omega}_{\varphi N} \quad \rightarrow \quad \text{a Merkúr pályája zárt ellipszis}$]

10

A ki-be oszcillálás periódusideje: $T_r = \frac{2\pi}{\omega_r}$

A szögelfordulás ezalatt: $T_r \cdot \bar{\omega}_\varphi$

A szög-excesszus ezalatt (azaz egy periódus alatt):

$$\Delta\varphi_1 = T_r \cdot \bar{\omega}_\varphi - 2\pi = T_r \cdot (\bar{\omega}_\varphi - \omega_r)$$

Egyrészt: $\bar{\omega}_\varphi^2 - \omega_r^2 = \frac{Mr_0}{r_0^3(r_0 - 3M)} - \frac{M(r_0 - 6M)}{r_0^3(r_0 - 3M)} = \frac{6M^2}{r_0^3(r_0 - 3M)} = \frac{6M}{r_0} \bar{\omega}_\varphi^2$

Másrészt: $\bar{\omega}_\varphi^2 - \omega_r^2 = (\bar{\omega}_\varphi - \omega_r)(\bar{\omega}_\varphi + \omega_r) \approx (\bar{\omega}_\varphi - \omega_r) \cdot 2\bar{\omega}_\varphi$

Tehát: $\bar{\omega}_\varphi - \omega_r \approx \frac{3M}{r_0} \cdot \bar{\omega}_\varphi$

11

$$\Delta\varphi_1 = T_r \cdot \bar{\omega}_\varphi - 2\pi = T_r \cdot (\bar{\omega}_\varphi - \omega_r) \qquad \bar{\omega}_\varphi - \omega_r \approx \frac{3M}{r_0} \cdot \bar{\omega}_\varphi$$

$M = 1.477 \cdot 10^3 \text{m}$; $r_0 = 5.8 \cdot 10^{10} \text{m}$; 1 évszázad alatt 417 körfordulás

A teljes precesszió egy évszázad alatt:

$$\frac{\Delta\varphi}{\text{évszázad}} = \Delta\varphi_1 \cdot 417 \frac{\text{ford.}}{\text{évsz.}} = [T_r \cdot (\bar{\omega}_\varphi - \omega_r)] \cdot 417 \approx \left[T_r \cdot \frac{3M}{r_0} \bar{\omega}_\varphi \right] \cdot 417$$

$$\frac{\Delta\varphi}{\text{évszázad}} \approx 2\pi \frac{3M}{r_0} \cdot 417 \approx 2 \cdot 10^{-4} / \text{évsz.} \approx 41'' / \text{évsz.}$$

(Pontosabb elméleti számolással: $\approx 43'' / \text{évsz.}$)

Megj.: A **teljes** mért precesszió egy évszázad alatt: $\sim 575'' / \text{évsz.}$ Ebből $532''$ -et a többi bolygó perturbáló hatása okozza – ezeket newtoni mechanikával is lehet számolni –, a maradék $43''$ pedig a Nap által begörbitett téridő következménye.

12