MECHANIKA 2	A) HF 05.

A 09.) feladat

Adott egy állandó keresztmetszetű egyenes rúd. Tengelye a vízszintes „z” tengely, a hossza „b”. A rudat a z=0 pontban „mereven megfogtuk” (pl. beépítettük egy merev falba). A másik végén a rudat egy függőleges „x” irányú „F” erővel lefelé hajlítjuk. A rúd súlyából adódó deformációs hatás az „F”-hez képest elhanyagolható.

A rúdnak a (hajlítás irányának megfelelő) keresztmetszeti tényezője (a „keresztmetszet másodrendű nyomatéka”) legyen „I”. A rúd anyagának Young modulusa „E” . A rúd („semleges szál”) „z” helyen keletkező „x” irányú elmozdulását „u(z)” jelöli.

Keressük a rúd végének az u(b) lehajlását.

a.) Írja fel az „M” hajlító forgató nyomaték és az u(z) közötti összefüggést!
b.) A megadott terhelés alapján határozza meg az M(z) függvényt!
c.) Az eddigi válaszok felhasználásával írja fel az u(z)-re vonatkozó differenciál egyenletet!
d.) Adja meg az u(z) általános megoldást!
e.) Határozza meg az u(0)-nál érvényesülő peremfeltételeket!
f.) Határozza meg a peremfeltételeknek megfelelő u(z) megoldást!
g.) Határozza meg a rúd végének az u(b) lehajlását.

A 10.) feladat

Adott egy állandó keresztmetszetű egyenes rúd. Tengelye a vízszintes „z” tengely, a hossza „b”. A rudat a z=0 pontban „mereven megfogtuk” (pl. beépítettük egy merev falba).

A rúdnak a **saját súlyából adódó**, függőleges „x” irányú deformációját (lehajlását) vizsgáljuk.

A rúdnak a (hajlítás irányának megfelelő) keresztmetszeti tényezője (a „keresztmetszet másodrendű nyomatéka”) legyen „I”. A rúd anyagának Young modulusa „E” . A rúd („semleges szál”) „z” helyen keletkező „x” irányú elmozdulását „u(z)” jelöli. A rúd hosszegységre eső súlyát jelölje p=mg/b.

Keressük a rúd végének az u(b) lehajlását.

a.) Írja fel az „M” hajlító forgató nyomaték és az u(z) közötti összefüggést!
b.) A megadott terhelés alapján határozza meg az M(z) függvényt!
c.) Az eddigi válaszok felhasználásával írja fel az u(z)-re vonatkozó differenciál egyenletet!
d.) Adja meg az u(z) általános megoldást!
e.) Határozza meg az u(0)-nál érvényesülő peremfeltételeket!
f.) Határozza meg a peremfeltételeknek megfelelő u(z) megoldást!
g.) Határozza meg a rúd végének az u(b) lehajlását.

EXTRA gyakorlásra:

h.) Az infinitezimális elfordulást megadó $d\varphi = Rdz$ összefüggés felhasználásával határozza meg a rúd z=b végén lévő felületének (keresztmetszetének) a $\varphi(b)$ elfordulását!

MECHANIKA 2	B) HF 05.

B 13.) feladat

Adott egy állandó keresztmetszetű egyenes rúd. Tengelye a vízszintes „z” tengely, a hossza „b”. A rudat a két végénél (z=0 és a z=b pontokban) két ékkel alátámasztottuk. A rúd **a saját súlyától** behajlik. Az ékszerű alátámasztás miatt a rúd véglapjai a deformáció során elfordulhatnak, de függőleges („x”) irányban nem mozdulhatnak el.

A rúdnak a (hajlítás irányának megfelelő) keresztmetszeti tényezője (a „keresztmetszet másodrendű nyomatéka”) legyen „I”. A rúd anyagának Young modulusa „E” . A rúd („semleges szál”) „x” irányú elmozdulását „u(z)” jelöli. A rúd hosszegységre eső súlyát jelölje p_0=mg/b.

Keressük a rúd közepének az u(b/2) lehajlását.

A gyakorlaton ezt a feladatot az „M” hajlító forgató nyomaték és az u(z) között fennálló $M = I \cdot E \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ kapcsolat alkalmazásával megoldottuk. Azt is bizonyítottuk, hogy érvényes a $\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} = p(z)$ összefüggés is, ahol p(z) a rúd hosszegységre eső súlya az adott helyen. A jelen feladat esetén nyilvánvaló, hogy p(z)= p_0 állandó.

a.) A két fenti formula összevonásával írja fel az u(z) (deriváltjai) és a p_0 között kapcsolatot teremtő (**negyedrendű**) differenciálegyenletet!

b.) Adja meg az u(z) általános megoldást!

c.) Írja fel matematikai alakban a most kiróható (**négy darab**) peremfeltételt: :

- a rúd két végén nincsen lehajlás,
- a rúd két végén nem lép fel forgatónyomaték.

d.) Határozza meg a peremfeltételeknek megfelelő u(z) megoldást!

e.) Ellenőrizze, hogy ez ugyanaz, mint amit a gyakorlaton kaptunk!

MEGJEGYZÉS: Ez az „új módszer” lehetővé teszi az ún. „statikailag határozatlan” problémák megoldását. Lásd a következő feladatokat!

B 14.) feladat

Adott egy állandó keresztmetszetű egyenes rúd. Tengelye a vízszintes „z” tengely, a hossza „b”. a rudat a z=0 végénél „mereven megfogtuk” (pl. beépítettük egy merev falba) és a z=b végénél egy ékkel alátámasztottuk. Az ékszerű alátámasztás miatt rúd z=b véglapja a deformáció során elfordulhat, de függőleges („x”) irányban nem mozdulhat el. A rúd **a saját súlyától** behajlik.

A rúdnak a (hajlítás irányának megfelelő) keresztmetszeti tényezője (a „keresztmetszet másodrendű nyomatéka”) legyen „I”. A rúd anyagának a Young modulusa „E”. A rúd („semleges szál”) „x” irányú elmozdulását „u(z)” jelöli. A rúd hosszegységre eső súlyát jelölje p_0=mg/b.

Keressük a rúd közepének az u(b/2) lehajlását.

FONTOS ELMÉLETI MEGJEGYZÉS:

Ez a feladat azért „furcsa”, mert „**statikailag túlhatározott**”. Hiszen a (merev testeket feltételező) statikai egyensúly egyenletei („$\sum \vec{F} = 0$” és „$\sum \vec{M} = 0$”) nem elegek a rúd hossza mentén fellépő M(z) forgatónyomaték függvény meghatározásához. Márpedig ennek ismerete szükséges az $M = I \cdot E \cdot u''$ differenciálegyenlet megoldásához. Ennek az az oka, hogy a statikai egyensúlyt csupán csak a z=0 helyen lévő merev befogással is biztosítani lehet. Ezért a statikai egyensúlyt biztosító külső erőhatások csak akkor számolhatók ki, ha a rúd u(z) deformációját is figyelembe vesszük. De az u(z) meghatározásához szükség van a külső erőhatások ismeretére. Nos ez a probléma gyökere. Jó lenne z u(z)-re olyan egyenletet találni, amelyben közvetlenül nem szerepelnek (a szintén ismeretlen) külső erőhatások. **A bevezetett „új módszerben" pontosan erről van szó**. Mint láttuk, itt nem kell ismerni a (befogásoknál és az alátámasztásnál fellépő) konkrét külső erőhatásokat. Ezek az u(z)-re kirótt peremfeltételekben testesülnek meg.

a.) Írja fel az u(z) (deriváltjai) és a p_0 között kapcsolatot teremtő (**negyedrendű**) differenciálegyenletet!

b.) Adja meg az u(z) általános megoldást!

c.) Írja fel matematikai alakban a most kiróható (**négy darab**) peremfeltételt: :

– a rúd két végén nincsen lehajlás,

– a rúd (semleges szál) alakja olyan, hogy a z=0 helyen „nem törik" meg.

– a rúd z=b végén nem lép fel forgatónyomaték.

d.) Határozza meg a peremfeltételeknek megfelelő u(z) megoldást!

e.) Határozza meg a rudat alátámasztó éknél (z=b fellépő erőhatást!

f.) Határozza meg a rúd maximális behajlásának a helyét és a maximális behajlás nagyságát!

B 15.) feladat

Adott egy állandó keresztmetszetű egyenes rúd. Tengelye a vízszintes „z" tengely, a hossza „b". A rudat mindkét végénél (z=0 és z=b „mereven megfogtuk" (pl. merev falakba beépítettük). A rúd **a saját súlyától** behajlik.

A rúdnak a (hajlítás irányának megfelelő) keresztmetszeti tényezője (a „keresztmetszet másodrendű nyomatéka") legyen „I". A rúd anyagának a Young modulusa „E" . A rúd („semleges szál") „x" irányú elmozdulását „u(z)" jelöli. A rúd hosszegységre eső súlyát jelölje p_0=mg/b.

Keressük a rúd közepének az u(b/2) lehajlását.

a.) Írja fel az u(z) (deriváltjai) és a p_0 között kapcsolatot teremtő (**negyedrendű**) differenciálegyenletet!

b.) Adja meg az u(z) általános megoldást!

c.) Írja fel matematikai alakban a most kiróható (**négy darab**) peremfeltételt:

d.) Határozza meg a peremfeltételeknek megfelelő u(z) megoldást!

e.) Határozza meg a rúd végénél fellépő erőhatásokat!

f.) Határozza meg a rúd maximális behajlását!

g.) Hasonlítsa ezt össze a kétékes alátámasztásnál kapott eredménnyel!
