

1. Feladatok rugalmas és rugalmatlan ütközések tárgyköréből

Impulzustétel, impulzusmegmaradás törvénye

1.1. Feladat: Órai megoldásra 1. feladat Egy $m = 4$ kg tömegű kalapács $v_0 = 6$ m/s sebességgel érkezik a szög fejéhez és $\Delta t = 0,002$ s alatt fékeződik le, miközben a szög behatol a fába. (A szög tömege elhanyagolható a kalapács tömegéhez viszonyítva.)

- (a) Számítsuk ki az átlagos fékező erőt!
- (b) Számítsuk ki a szög útját a fában!
- (c) Mekkora munkát végzett a fa a szögön?

1.2. Feladat: (HN 8B-27) A kezdetben nyugalomban lévő 5 kg tömegű testre 5 másodpercig 6 N állandó erő hat, majd az erő 3 s alatt egyenletesen zérusra csökken. Mekkora sebességet ér el a test?

1.3. Feladat: (HN 8C-42) * Egy 8 kg tömegű test nyugalmi helyzetből indulva $F = At - Bt^2$ erő hatására gyorsul, ahol $A = 24$ N/s és $B = 1,2$ N/s².

- (a) Határozzuk meg, hogy mekkora maximális sebességet ér el a tömeg mielőtt újra megállna!
- (b) Mennyi idő múlva következik ez be?

1.4. Feladat: (HN 8C-43) * A 2,5 kg tömegű test nyugalmi helyzetből indulva $F = At^2$ erő hatására gyorsul, ahol $A = 0,75$ N/s².

- (a) Határozzuk meg a test sebességét 15 másodperccel az erő alkalmazása után!
- (b) Mekkora állandó erővel lehetne elérni ezt a sebességet?

1.5. Feladat: Órai megoldásra 2. feladat Egy $M = 80$ kg tömegű ember jégen egy helyben állva eldob vízszintes irányban egy $m = 20$ kg tömegű golyót. A golyó az embertől mérve $v_0 = 20$ m/s sebességgel távolodik. Mekkora az ember v_M sebessége a jéghez viszonyítva? (A jég és az ember közötti súrlódási erő elhanyagolhatóan kicsi.)

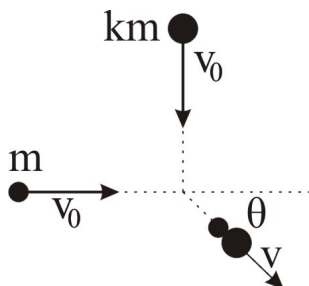
Rugalmatlan ütközések

1.6. Feladat: Az m tömegű v_0 sebességű test tökéletesen rugalmatlanul ütközik az M tömegű álló testtel. Mekkora lesz az ütközés utáni együttes sebességük? Mekkora átlagos erőhatás lép fel köztük, ha az ütközés ideje (a becsapódástól számítva az összeragadásig) t .

1.7. Feladat: Két azonos m tömegű test azonos nagyságú v_0 sebességgel halad, az egyik az y tengelyen, a másik az x tengelyen, mindkét esetben a pozitív irányban. Az origóban a testek tökéletesen rugalmatlanul ütköznek. Mekkora lesz az együttes sebességvektoruk és annak nagysága?

1.8. Feladat: (HN 8A-4) Egy m tömegű v_0 sebességgel mozgó test vele egyenlő tömegű, eredetileg nyugalomban lévő testbe ütközik és összeragad vele. Határozzuk meg a kinetikus energia $(K - K_0)/K_0$ relatív megváltozását!

1.9. Feladat: (HN 8B-11) Két, m illetve km (k állandó) tömegű test egyenlő v_0 sebességgel halad merőleges irányból a 1. ábrán látható módon közeledik egymáshoz, összeütközik, és összeragadva mozognak együtt tovább. Fejezzük ki a végsebességük irányát meghatározó θ szöget a k segítségével!



1. ábra.

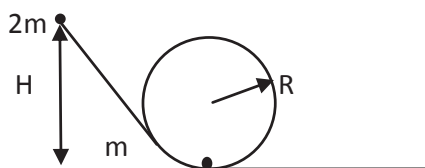
1.10. Feladat: (HN 8B-14) Két, m illetve km (k állandó) tömegű test egyenlő v_0 sebességgel halad a $+x$ és $-x$ irányban. Ütközésük után összeragadva haladnak tovább.

- (a) Határozzuk meg az adott paraméterek függvényében, hogy mekkora az összeragadt testek v sebességének nagysága és iránya?
- (b) Mekkora a v/v_0 arány, ha $k = 2$?

1.11. Feladat: (HN 9B-7) Fából készült $M = 800$ g tömegű ballisztikus ingatestbe vízszintes irányból $m = 20$ g tömegű ólomsöréttel lőttünk. A lengésbe jövő ingatest $h = 10$ cm magasba emelkedik.

- (a) Mekkora v közös sebességgel indul az ingatest-sörét rendszer?
- (b) Mekkora v_0 sebességgel csapódik az ingába a golyó? A sörét K kinetikus energiájának hányadrésze vész el, azaz fordítódott a fa deformálására, ill. felmelegítésére?

1.12. Feladat: Egy $2m$ tömegű test súrlódás mentesen csúszik le a hurokhoz illeszkedő lejtőn a 2. ábrának megfelelően. Mekkora H magasságból indítsuk a testet, hogy a tökéletesen rugalmas ütközés után a pálya alján lévő m tömegű test végighaladjon a hurkon?



2. ábra.

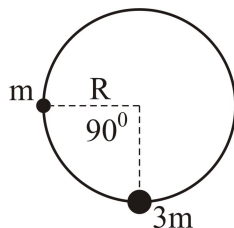
Rugalmas ütközések

1.13. Feladat: Mutassa meg, hogy a kemény asztallapon pattogó m tömegű golyó hosszú idő átlagában mg erővel nyomja az asztallapot!

1.14. Feladat: Egy L oldalélű hasámban az oldallal párhuzamosan, v_0 sebességgel mozog egy m tömegű részecske.

- (a) Mekkora átlagos erővel nyomja a részecske a szembenlévő falakat?
- (b) Mekkora az átlagos nyomás, ha a mozgásra merőleges lapok felülete A ?
- (c) Hogyan változik a megoldás, ha N részecske teszi ezt?

1.15. Feladat: (HN 9C-32) Függőleges síkú, R sugarú körré hajlított, merev huzalon a rá fűzött m tömegű gyöngy a 3. ábrán látható módon lecsúszik. A körpálya oldalsó pontjából nyugalom-



3. ábra.

ban lévő gyöngy pusztán a gravitáció hatására lecsúszik és rugalmasan ütközik a kör legmélyebb pontjában nyugalomban lévő $3m$ tömegű másik gyönggyel.

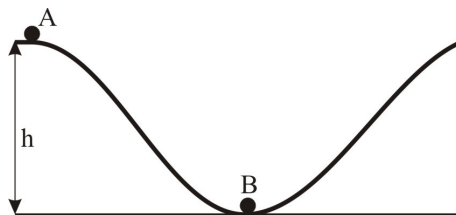
(a) Az R sugárral kifejezve határozzuk meg, hogy milyen magasra emelkednek a gyöngyök az ütközés után!

(b) Az ütközés után a gyöngyök súrlódásmentesen folyamatosan tovább mozognak és újra rugalmasan ütköznek. Határozzuk meg, hogy mennyi a gyöngyök sebessége közvetlenül a második ütközés után!

1.16. Feladat: Órai megoldásra 3. feladat A 4. ábrán látható súrlódásmentes pálya A pontjából elengedünk egy testet. Végigcsúszva a B pontban ütközik egy másik testtel.

(a) Mekkora v sebességgel ér az A pontból indított test a B pontban lévő testhez?

(b) Milyen magasra emelkedik a másik test, ha az ütközés tökéletesen rugalmas ($m_A = m_B/2$, $h = 1.8$ m)?



4. ábra.

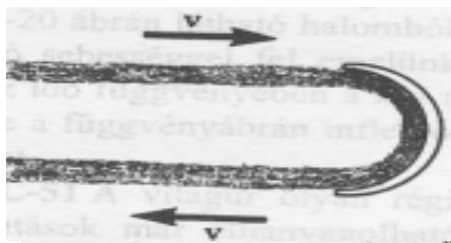
Általános ütközések

1.17. Feladat: $h_1 = 1,25$ m magasból $m = 1$ kg tömegű golyó a $\Delta t = 0,05$ s időtartamú kölcsönhatás után $h_2 = 80$ cm magasra pattan vissza. Mekkora átlagos erőt fejtett ki a talaj a golyóra ezen ütközés alatt?

Folytonos közegek impulzusváltozása

1.18. Feladat: (HN 8A-33) A 600 l/perc hozamú és 20 m/s sebességű vízszintes irányú vízszög függőleges falba ütközik, s számottevő freccsenés nélkül szétterül rajta. Mekkora erőt fejt ki a vízszög a falra? (A víz sűrűsége 1000 kg/m^3 .)

1.19. Feladat: (HN 8A-34) Egy nyugvó turbinalapátba vízszög ütközik. A lapát a vízszög irányát az 5. ábrán látható módon megfordítja. A víz sebessége mind az ütközés előtt, mind



5. ábra.

az ütközés után v . Határozzuk meg a lapátra ható erőt, ha az időegységéntként becsapódó víz tömege μ !

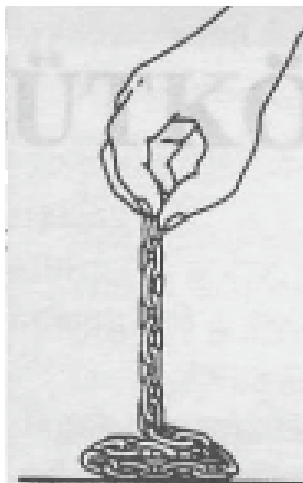
1.20. Feladat: (HN 8A-40) Egy 3000 kg tömegű rakéta meghajtású űrhajó egy helyben lebeg a Hold felszíne felett, ahol a $g = 1,63 \text{ m/s}^2$. Mekkora sebességgel bocsátja ki a rakéta a hajtóanyagot, ha 2 kg/s sebességgel fogyasztja a fűtőanyagot?

1.21. Feladat: (HN 8B-41) A 130000 kg tömegű rakéta függőlegesen helyezkedik el a kilövőálláson.

(a) Mekkora kell lennie a hajtóművek tolóerejének ahhoz, hogy a rakéta 17 m/s^2 gyorsulással induljon felfelé?

(b) Hány kg/s a hajtóanyag fogyasztás akkor, ha a hajtógáz rakétához viszonyított sebessége 2100 m/s ?

1.22. Feladat: Órai megoldásra 4. feladat (HN 8C-48) Egy függőlegesen lógó, m tömegű hajlékony l hosszúságú láncot állandó v sebességgel engedünk le az asztalra az 6. ábrán látható módon. Adjuk meg az idő függvényében, hogy mekkora erőt fejt ki a lánc az asztalra!



6. ábra.

1.23. Feladat: (HN 9C-47) A Földhöz viszonyítva v sebességű és időegységenként μ tömeget szállító vízáram csapódik a turbinalapátra. Az ütközés hatására a turbinalapát egyenesvonalú mozgásba kezd, míg a vízáram $v/4$ sebességgel visszafelé halad a Földhöz képest.

- (a) Mekkora sebességgel mozog a turbinalapát?
- (b) Határozzuk meg v és μ függvényében, hogy mekkora erő hat a mozgó lapátra?

2. Feladatok a gravitációs erő tárgyköréből. Kepler törvényei

Centrális erőtér. Potenciális energia

2.1. Feladat: (HN 16B-16) A "szinkron" műhold akkora sebességgel kering körpályán, hogy a földi megfigyelő számára nyugalomban lévőnek látszik.

- (a) Magyarázzuk meg, miért csak az egyenlítő síkjában lévő pályán lehetséges az ilyen mozgás!
- (b) Határozzuk meg a pálya sugarát a Föld középpontjától mérve!
- (c) Határozzuk meg azt a legtovábbi szélességi fokot, ahonnan ez a műhold a Földről még látható!

2.2. Feladat: (HN 16B-31) Egy nem forgó gömb alakú bolygó tömege M , sugara R . A bolygó felszínéről radiális irányban egy részecskét lőnek ki $\sqrt{\gamma M/(2R)}$ sebességgel. Számítsuk ki mekkora távolságra jut el a részecske a bolygó középpontjától?

2.3. Feladat: Órai megoldásra 5. feladat (HN 16B-34) Jelölje M illetve R a Föld tömegét illetve sugarát.

(a) Mekkora az a minimális v_0 sebesség, amellyel az egyenlítőn függőlegesen kilőtt test a Föld felszínétől éppen két földugárnyi magasságig emelkedik? A Föld forgását és a légköri súrlódást ne vegyük figyelembe.

(b) A Föld forgását is számításba véve, növekszik, csökken vagy változatlan marad-e az a, kérdésre adott válasz számértéke?

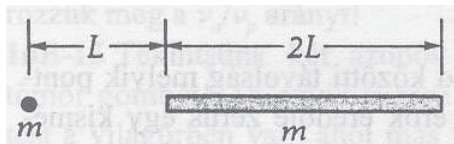
2.4. Feladat: (HN 16B-36) A Föld felszínén egy testet emelünk.

(a) Határozzuk meg annak a munkának a nagyságát, amivel egy 100 kg tömegű hasznos terhet 1000 km-rel a Föld felszíne felé lehet juttatni!

(b) Határozzuk meg azt a többletmunkát, ami ezen a szinten a hasznos teher körpályára állításához szükséges!

2.5. Feladat: (HN 16B-37) Mutassuk ki, hogy egy állandó sűrűségű bolygó felületéről a szökési sebesség a bolygó sugarával arányos!

2.6. Feladat: (HN 16C-47) * A 7. ábrán látható kicsiny test és vékony rúd mindegyikének tömege m . A pontszerű test a rúd vonalában fekszik. A test L távolságban van a $2L$ hosszúságú rúd végétől. Mekkora a kicsiny m tömegű testre ható gravitációs erő?



7. ábra.

2.7. Feladat: Órai megoldásra 6. feladat (HN 16C-58) Egy ember a Föld felszínén guggoló helyzetből tömegközéppontját h magassággal tudja emelni. Számítsuk ki annak a legnagyobb (a Föld átlagsűrűségével azonos sűrűségű) kisbolygónak a sugarát, amelyről ez az ember ugyanilyen sebességgel felugorva elszökhetne, azaz elhagyhatná annak vonzáskörzetét.

2.8. Feladat: * Az M tömegű R sugarú bolygó egyenletes ρ tömegsűrűségű.

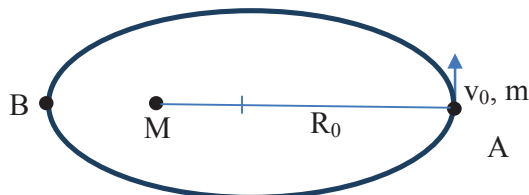
- Hogyan változik az m tömegű kicsiny testre ható erő a bolygó belsejébe való haladás során?
- Hogyan változik a potenciális energia a bolygón belül?

2.9. Feladat: A *VIFIZ* nevű, $R = 40020$ km sugarú és $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg tömegű bolygó felszínétől R távolságban v_0 sebességgel keringő űrhajó pályájáról letér és a bolygó felszínébe csapódik. Mekkora a becsapódás sebessége? ($\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²)

Kepler törvényei

2.10. Feladat: M tömegű csillag körül m tömegű bolygó kering ellipszis pályán (– a csillag rögzítettnek tekinthető) a 8. ábra szerint. Az ellipszis fél nagytengelyét jelöljük " a "-val. A bolygó az $R_0 = R_A$ naptávolban (A) v_0 sebességgel halad.

- Mekkora a napközeli (B) távolság?
- Mekkora a bolygó sebessége?
- Mekkora munkát végzett a gravitációs erőtér?
- Ábrázolja grafikonon a potenciális energia értékeket (A, B)!



8. ábra.

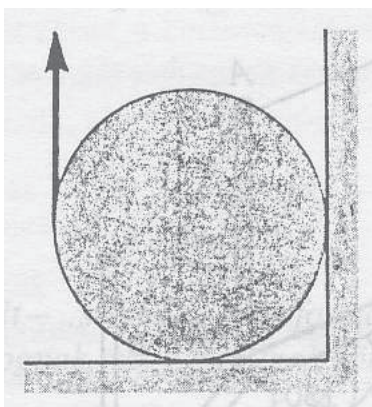
3. Feladatok merev testek fizikájának tárgyköréből

Forgatónyomaték, impulzusmomentum, impulzusmomentum tétel

3.1. Feladat: Órai megoldásra 7. feladat (HN 10B-4) Egy $\mathbf{F} = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} + f_z\mathbf{k}$ ($f_x = 2$ N; $f_y = 3$ N; $f_z = 0$ N) erő hat egy testre. A test a z koordinátatengely mentén fekvő forgástengellyel van rögzítve. Az erő az $\mathbf{r} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ ($x = 4$ m; $y = 5$ m; $z = 0$ m) pontban támad. Határozzuk meg a forgatónyomaték nagyságát és irányát!

3.2. Feladat: Egy "L" hosszúságú kötélen végén $0,2$ kg tömegű test függőleges síkban körmozgást végez. A pálya csúcsán a kör középpontjára vett perdület fele akkora, mint a pálya alján, ahol a tömeg kinetikus energiája 4 J. Mekkora az "L"?

3.3. Feladat: Órai megoldásra 8. feladat (HN 10C-48) A 9. ábra egy G súlyú homogén hengerre függőleges irányban ható F erőt mutat. A henger és a felületek közötti nyugalmi súrlódási együttható $\mu = 0,5$. Fejezzük ki a G függvényében azt a legnagyobb F erőt, amely még nem indítja meg a henger forgását!



9. ábra.

3.4. Feladat: (HN 13B-7) Homogén tömör henger csúszás nélkül gördül le a α szög alatt hajló lejtőn. Bizonyítsuk be, hogy a csúszást gátló nyugalmi tapadási súrlódási együttható legkisebb értéke $\tan\alpha/3$ kell, hogy legyen! (A henger tehetetlenségi nyomatéka $\theta = \frac{1}{2}mR^2$.)

3.5. Feladat: Egy tömör hengert és egy vékony falú csövet egyszerre engedünk el egy adott hajlásszögű lejtő tetejéről. Mindkét tárgy tisztán gördül.

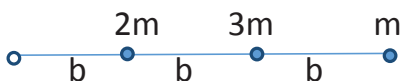
- Határozza meg a henger tömegközéppontjának gyorsulását!
- Határozza meg a cső tömegközéppontjának gyorsulását!
- Milyen messze gurul el a cső, míg a henger s_h utat tesz meg?

3.6. Feladat: Egy jójó külső R sugara tízszerese belső r sugarának. A jójó orsója körüli tehetetlenségi nyomatéka jó közelítéssel $\theta = \frac{1}{2}mR^2$, ahol m a jójó teljes tömege. A fonál vége nem mozog.

- Számítsa ki a jójó tömegközéppontjának gyorsulását!
- Határozza meg a fonálban ébredő erőt!

3.7. Feladat: Egy elhanyagolható tömegű merev rúdra három pontszerű testet erősítettek. Az egyik végén csapágyazott rúd függőleges síkban lenghet.

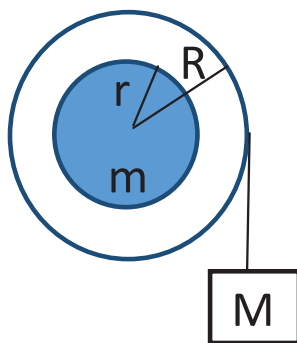
- Mekkora a tehetetlenségi nyomaték a csapágyra nézve?
- Mekkora lesz az alsó test sebessége a rúd függőleges helyzetben való áthaladásakor, ha a 10. ábrán látható helyzetből kezdősebesség nélkül elengedjük?



10. ábra.

3.8. Feladat: Homogén tömör tárcsa sugara 6 cm, tömege $1,5$ kg. Nyugalomból indul a motor által kifejtett $0,6$ Nm forgatónyomaték hatására. Mennyi idő alatt éri el az 1200 1/perc fordulatszámot? ($\theta = \frac{1}{2}mr^2$)

3.9. Feladat: Egy $r = 20$ cm "tehetetlenségi" sugarú, $m = 40$ kg tömegű kerék sugara $R = 30$ cm. Az R sugárhoz tartozó keréktömeget hanyagoljuk el.) Függőlegesen helyeztük egy vízszintes



11. ábra.

tengelyre. Egy $M = 2.0$ kg tömegű testet erősítettünk a szélére tekert kötélre a 11. ábrának megfelelően. Határozza meg a kerék elengedés utáni kezdeti szöggyorsulását! (A kerékre: $\theta = mr^2$.)

3.10. Feladat: Egy lendkerék fordulatszáma 60 rad/s-ról 180 rad/s-ra növekedett a rajta történt 100 J munkavégzés következtében.

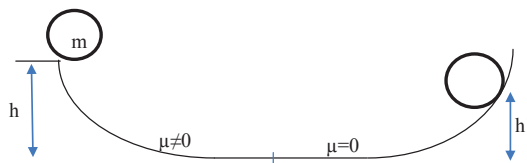
- Mekkora a tehetetlenségi nyomatéka?
- Ezt követően egy 3-szor nagyobb tehetetlenségi nyomatékú álló kereket nyomunk a lendkerékhez. Mekkora lesz a kialakuló közös fordulatszám?

3.11. Feladat: Egy m tömegű, $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ tehetetlenségi nyomatékú kereket ω_0 szögsebességgel megforgatunk és zérus kezdősebességgel a μ súrlódási együtthatójú talajra engedjük.

- Mennyi idő múlva fog tisztán gördülni a kerék?
- Mekkora utat tesz meg eközben?

3.12. Feladat: A 12. ábrán látható módon az m tömegű $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ tehetetlenségi nyomatékú korongot egy lejtőn h magasságban elengedünk. A lejtő tapadási súrlódási együtthatója μ_0 , ezért a korong itt tisztán gördül. A pálya második fele viszont súrlódásmentes.

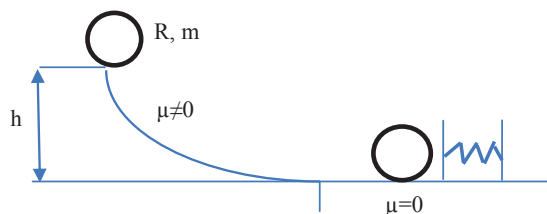
- Mekkora sebessége és szögsebessége van a korongnak a lejtő alján?
- Milyen h' magasra megy fel a súrlódásmentes emelkedőn a korong?
- Mennyi a lejtő tetején a korong impulzus momentuma?



12. ábra.

3.13. Feladat: Egy $R = 10$ cm sugarú, $m = 1$ kg tömegű tömör korong ($\theta = \frac{1}{2}mR^2$) tisztán legördül egy $h = 0,3$ m magasságú lejtős pályán. A lejtő alján nekiütközik a 13. ábrán látható fékezőrugónak, amelynek ütközője és a pálya ezen szakasza súrlódásmentes. A $k = 400$ N/m rugóállandójú rugó nyugalmi hossza $l_0 = 20$ cm.

- Mekkora a korong sebessége és szögsebessége a lejtő alján?
- Mekkora a korong impulzusmomentuma a rugó összenyomódása után?
- Mennyivel nyomódott össze a rugó?



13. ábra.

3.14. Feladat: Egy R sugarú, m tömegű homogén tömegeloszlású nem forgó kereket tengelyre merőlegesen v_0 sebességgel meglökünk és a μ súrlódási együtthatójú talajra engedjük. A kerék tehetetlenségi nyomatéka $\theta = \frac{1}{2}mR^2$.

- Mennyi idő múlva fog tisztán gördülni a kerék?
- Mekkora utat tesz meg eközben?

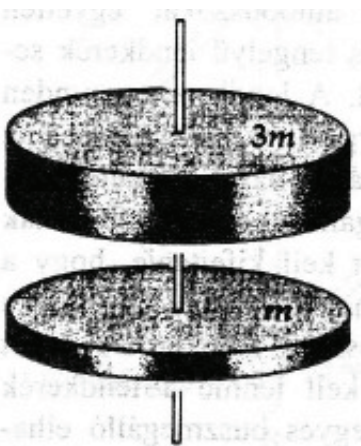
3.15. Feladat: ** A m tömegű R sugarú homogén korongot forgástengelye körül ω_0 szögsebességgel megforgatunk, majd lapjával – a tengely merőleges a felületre – a sík asztalra helyezzük.

A korong és asztal között μ súrlódási tényező van. Feltételezve, hogy korong egyenletesen nyomja az asztalt, mennyi idő múlva áll meg a korong? (A korong tehetetlenségi nyomatéka $\theta = \frac{1}{2}mR^2$.)

Impulzusmomentum megmaradása

3.16. Feladat: (HN 12B-28) A 14. ábrán látható két tömör tárcsa sugara R , egyik tömeg m , a másiké $3m$. A bemutatott módon súrlódásmentes csapágyazással közös tengelyre vannak szerelve. A felső tárcsának ω_0 kezdő szögsebességet adunk, majd nagyon kis magasságból ráejtjük a kezdetben nyugalomban lévő alsó tárcsára. A tárcsák – a közöttük fellépő súrlódás hatására – végül közös ω szögsebességgel együtt forognak.

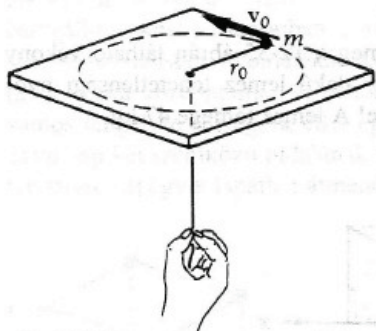
- A megadott mennyiségekkel fejezzük ki a végső ω szögsebességet, és
- a tárcsák egymáson való súrlódása közben keletkező hőmennyiséget!
- Mi lenne az egyenesvonalú analogonja ennek a forgási "ütközésnek"?



14. ábra.

3.17. Feladat: (HN 12C-50) A 15. ábra egy r_0 sugarú körpályán v_0 sebességgel vízszintes súrlódásmentes felületen mozgó m tömegű testet mutat. A testre rögzített és kicsiny lyukon átvezetett fonál biztosítja a centripetális erőt. Most a fonalat lassan húzzuk úgy, hogy a test az $r_0/2$ sugarú körpályára kerüljön. Számítsuk ki az m , az r_0 és v_0 függvényében

- a test végső sebességét és
- a fonál új helyzetbe húzása során végzett munkát!
- Mutassuk meg, hogy a végzett munka egyenlő a test kinetikus energiájának megváltozásával!



15. ábra.

Forgási energia

3.18. Feladat: Az L hosszúságú m tömegű rúd függőlegesen áll, az alsó pontja súrlódásmentes csapággal csatlakozik a talajhoz. Az egyensúlyi helyzetből kimozdul és a talajba csapódik. Mekkora a rúd szögsebessége a becsapódás pillanatában? A rúd tehetetlenségi nyomatéka a rúd végére vonatkoztatva $\theta = \frac{1}{3}mL^2$.

3.19. Feladat: * Az L szárhosszúságú, száranként m tömegű létra egyik lába a falnál áll, míg a másik lába súrlódásmentesen csúszhat a vízszintes talajon. A kezdetben 2α szögre szétnyitott létra szára csúszik, és a létra teljesen szétnyílván a talajba csapódik. Mekkora a létra szárainak szögsebessége a becsapódás pillanatában? (A rúd végpontjára vett tehetetlenségi nyomatéka $\frac{1}{3}mL^2$.)

3.20. Feladat: * A h magasságú toronyugró a palló szélén áll és összegörnyedés nélkül – merev rúdként – a vízbe fordul. (A lába a pallón nem csúszik meg a dőlés során.) Mekkora szögnél válik el a pallótól?