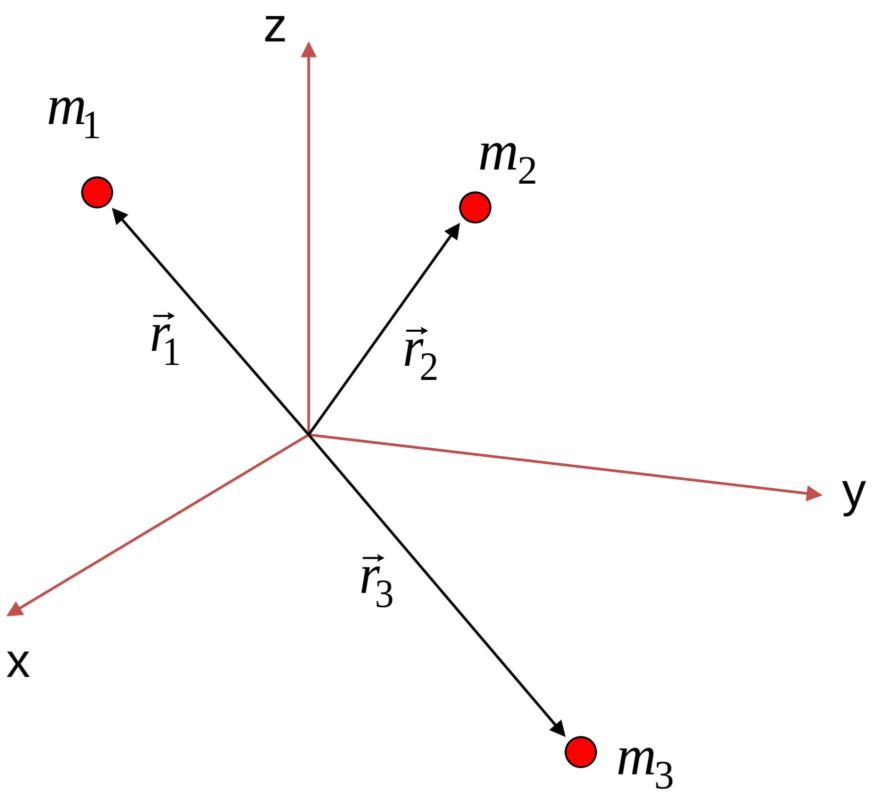
Fizika i

1. előadás

Pontrendszer:



Tömegközéppont:

$$\vec{r}_{tkp} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Tömegközéppont sebessége:

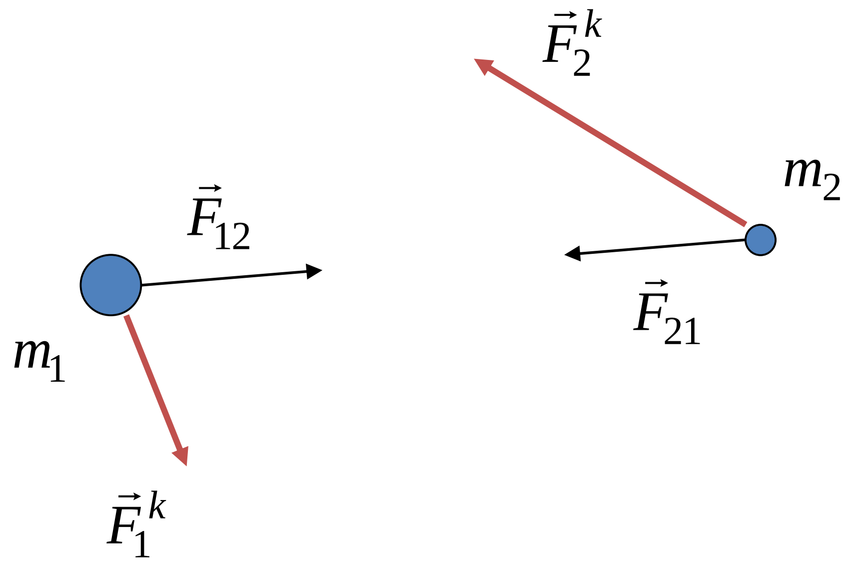
$$\vec{v}_{tkp} = \frac{d\vec{r}_{tkp}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}$$

Tömegközéppont gyorsulása:

$$\vec{a}_{tkp} = \frac{d\vec{v}_{tkp}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i}$$

Pontrendszer - dinamika:

külső erők: $\vec{F}_1^k$ **és** $\vec{F}_2^k$



$$I.\ \vec{F}_1^k + \vec{F}_{12} = m_1\vec{a}_1$$

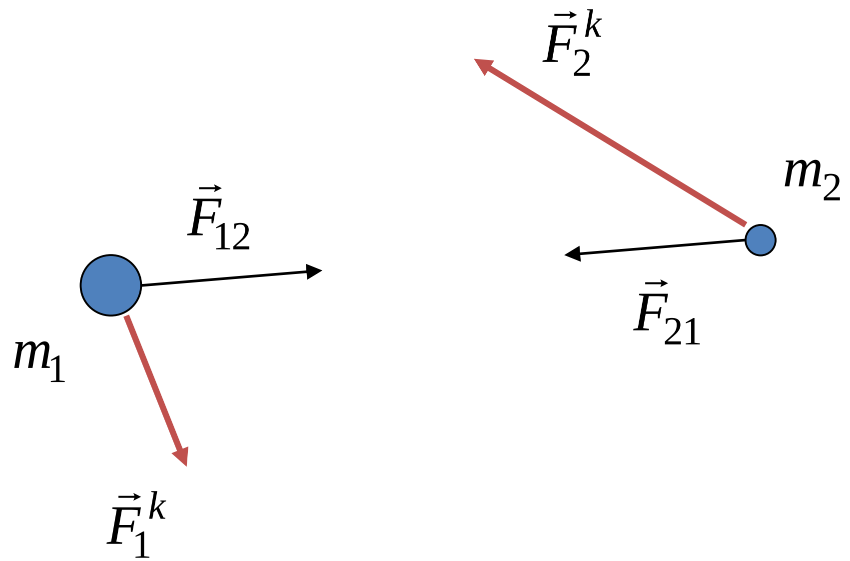
$$II.\ \vec{F}_2^k + \vec{F}_{21} = m_2\vec{a}_2$$

$$I.+II.\quad \underbrace{\vec{F}_1^k + \vec{F}_2^k}_{\vec{F}_e^k} + \underbrace{\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}}_{=0} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 \Longrightarrow \vec{F}_e^k = \sum_i m_i\vec{a}_i$$

Láttuk: $\vec{a}_{tkp} = \dfrac{d\vec{v}_{tkp}}{dt} = \dfrac{\sum_i m_i\ddot{\vec{r}}_i}{\sum_i m_i} = \dfrac{\sum_i m_i\vec{a}_i}{\sum_i m_i} \longrightarrow$

$$\boxed{\vec{F}_e^k = \left(\sum_i m_i\right)\vec{a}_{tkp} = M\vec{a}_{tkp}}$$

Pontrendszer impulzusa:



Látuk:

$$I.+II.\quad \underbrace{\vec{F}_1^k+\vec{F}_2^k}_{\vec{F}_e^k}+\underbrace{\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}}_{=0}=\underbrace{m_1\vec{a}_1+m_2\vec{a}_2} \quad\Rightarrow\quad \vec{F}_e^k=\sum_i m_i\vec{a}_i$$

$$\boxed{\vec{F}_e^k=\left(\sum_i m_i\right)\vec{a}_{tkp}=M\vec{a}_{tkp}}$$

$$\vec{F}_e^k=m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt}+m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt}=\frac{d\vec{p}_1}{dt}+\frac{d\vec{p}_2}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1+\vec{p}_2\right) \quad\Rightarrow\quad \vec{F}_e^k=\frac{d\vec{p}_{syst.}}{dt}$$

$$\boxed{\text{Ha}\quad \vec{F}_e^k=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{p}=const.}$$

Ez az impulzus-megmaradás törvénye.

Ütközések

Csoportosítása:

- egyenes-ferde (attól függően, hogy az ütköző testek sebességei a tkp-jaikat összeköt egyenesbe esnek-e)
- centrális-nem centrális (attól függően, hogy az ütköző testek érintkezési pontja rajta van-e a testek tkp-jait összeköt egyenesen);

Rugalmas ütközés (az impulzus és a mechanikai energia is megmarad)

$$m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2'^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2$$

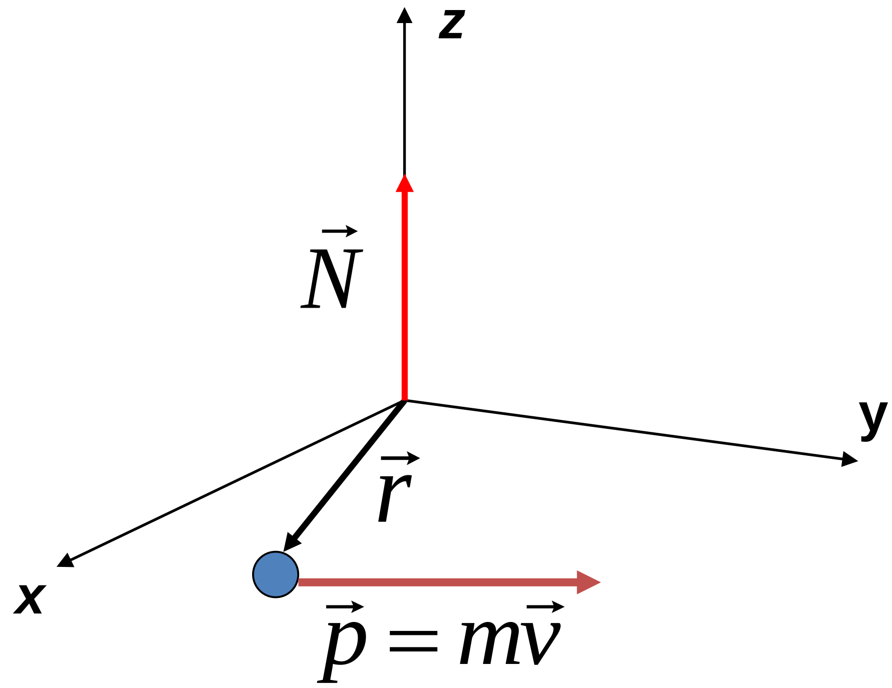
Rugalmatlan ütközés (impulzus megmarad, mechanikai energia nem)

$$(m_1 + m_2)\vec{v}' = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

Anyagi pont impulzusmomentuma

Anyagi pont origóra vonatkozó impulzusmomentuma az **r**(*t*) helyvektorának és **p**(*t*) impulzusának vektoriális szorzata:

$$\boxed{\vec{N} = \vec{r} \times \vec{p}}$$



Az impulzusmomentum nagysága:

$$N = pr\sin\alpha$$

Mértékegység: Js

Forgatónyomaték

Egy anyagi pontra ható erőnek az origóravonatkozó forgatónyomatéka az anyagi pont $\mathbf{r}(t)$ helyvektorának és az $\mathbf{F}(t)$ erőnek a vektoriális szorzata:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

A forgatónyomaték nagysága:

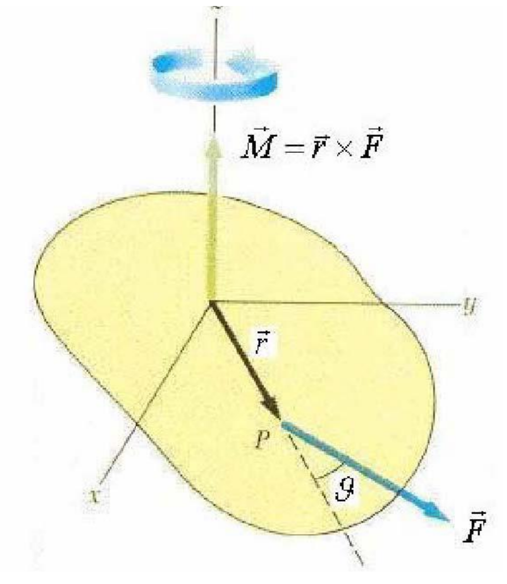
$$M = rF\sin\alpha$$

vagy:

$$M = Fd \quad \text{illetve} \quad M = rF_t$$

erőkar

az erő tangenciális komponense



Impulzusmomentum-tétel

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{N}}{dt}}$$

Ha az anyagi pontra ható erő forgatónyomatéka zérus, az anyagi pont impulzusmomentuma állandó.

$$\vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{N}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \acute{a}lland\acute{o}$$

Az impulzusmomentum megmaradásának tétele

Merev testek mechanikája

tömegpont modell → kiterjedt, de alakját nem változtató test

szabadsági fokok

Egy tömegpont mozgását egy helyvektorral, vagyis *3 skalár adattal jellemezhetjük*

f=3

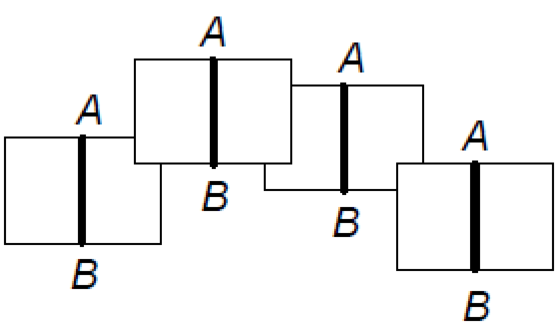
Egy merev test helyzetét akkor ismerjük, ha megadjuk három – nem egy egyenesbe eső – pontjának helyzetét.

A 9 adat közül csak 6 független

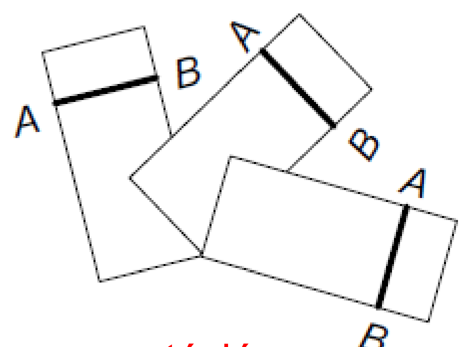
f=6

Pl: egy kerék egy felületen gurul, vagy a test egy pont körül vagy rögzített tengely körül forog

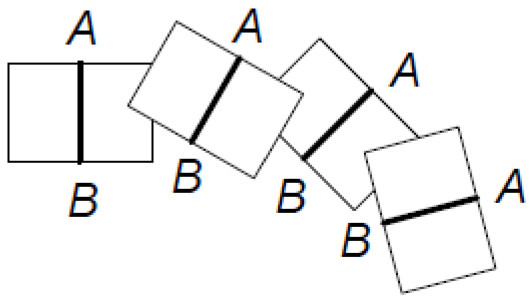
f=5 f=3 f=1



transzláció

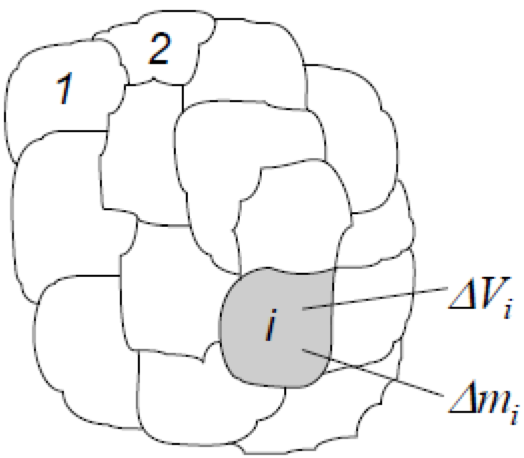


rotáció



A merev test tetszőleges mozgása elemi transzlációk és rotációk egymásutánjaként fogható fel.

A merev test mint pontrendszer



$$V = \sum_i \Delta V_i$$

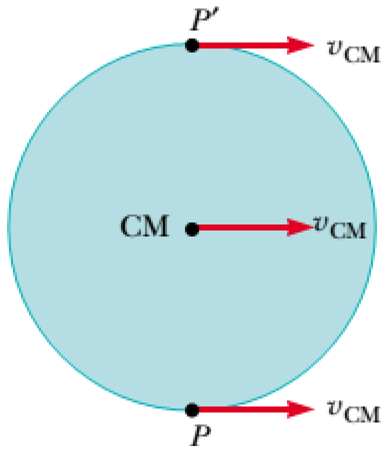
$$m = \sum_i \Delta m_i$$

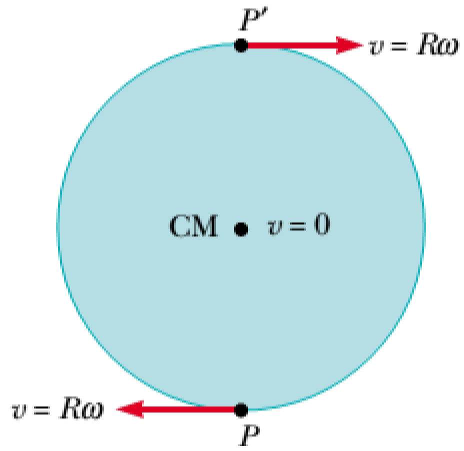
tömegközéppont:

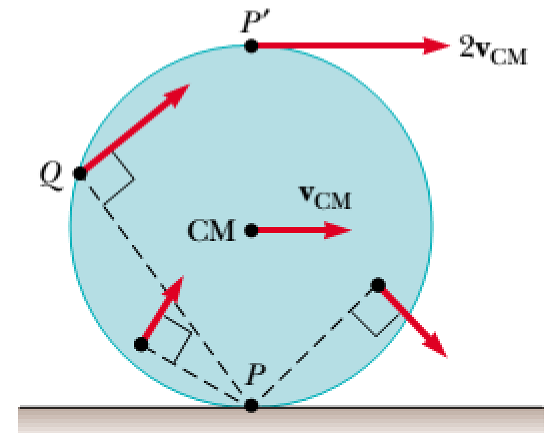
$$\vec{r}_{tkp} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

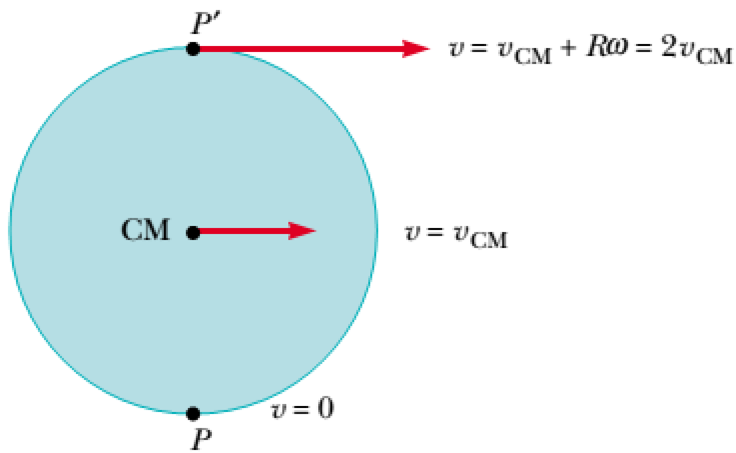
súlypont: az a pont, ahol a G gravitációs erőhatást egyesítve képzeljük, azért, hogy a gravitációtól származó forgatónyomatékot kiszámíthassuk.

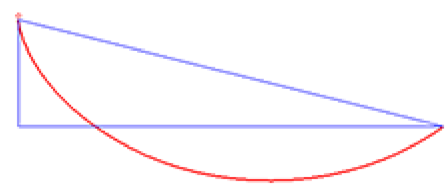
$$\vec{r}_{sp} = \frac{\sum_i G_i \vec{r}_i}{\sum_i G_i}$$

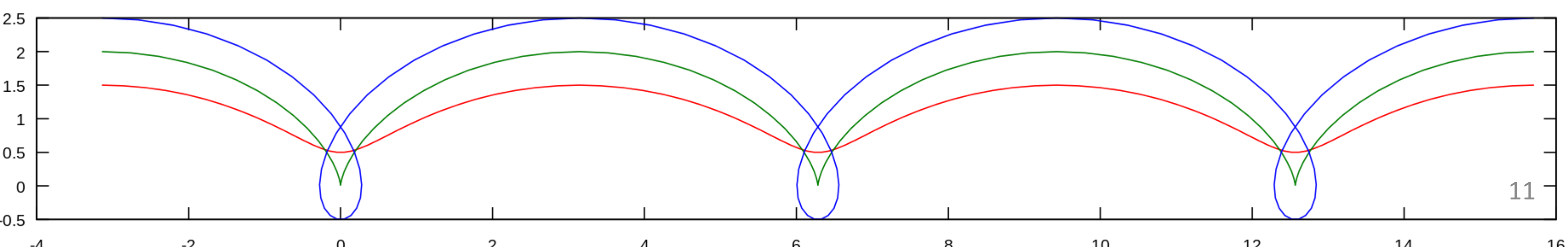

P′
v_{CM}
CM
v_{CM}
P
v_{CM}


P′
$v = R\omega$
CM
$v = 0$
$v = R\omega$
P

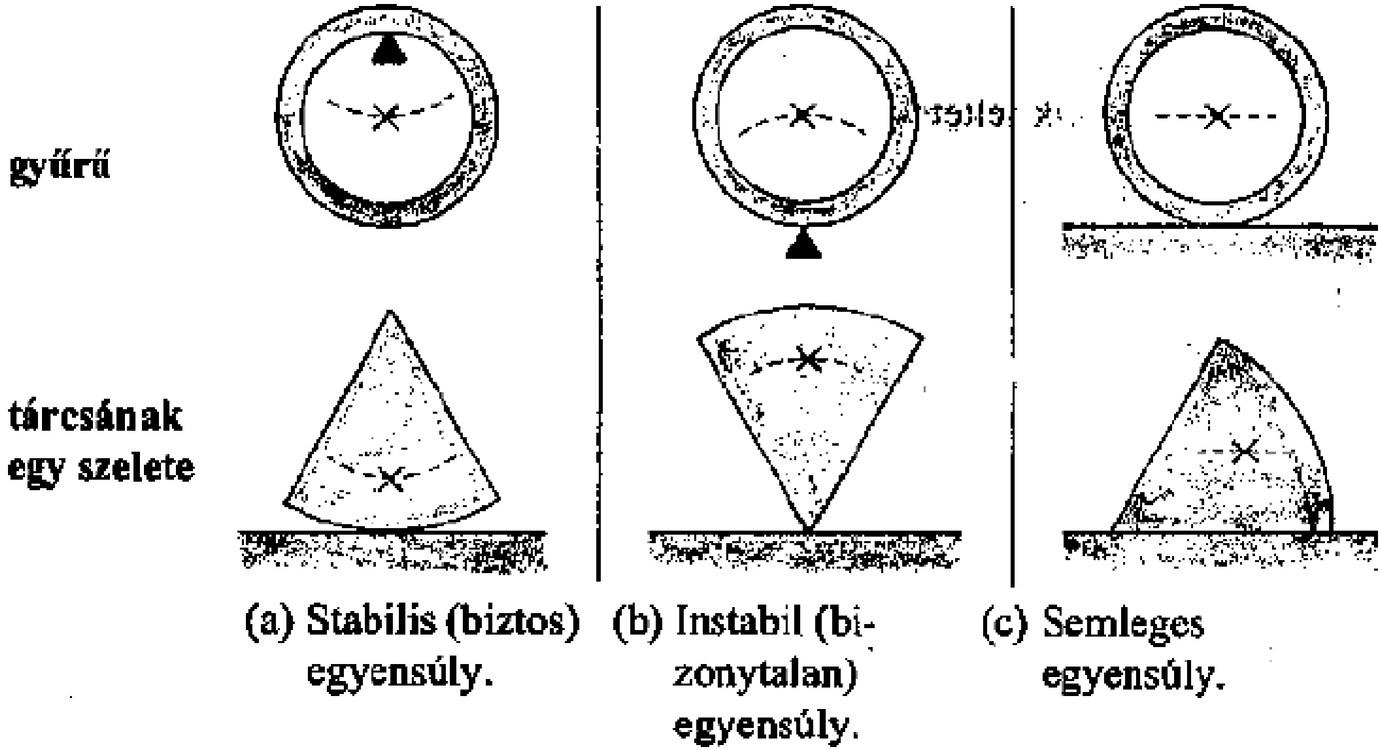

P′
$2\mathbf{v}_{CM}$
Q
$\mathbf{v}_{CM}$
CM
P


P′
$v = v_{CM} + R\omega = 2v_{CM}$
CM
$v = v_{CM}$
$v = 0$
P




2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12
14
16

Egyensúly (statika)

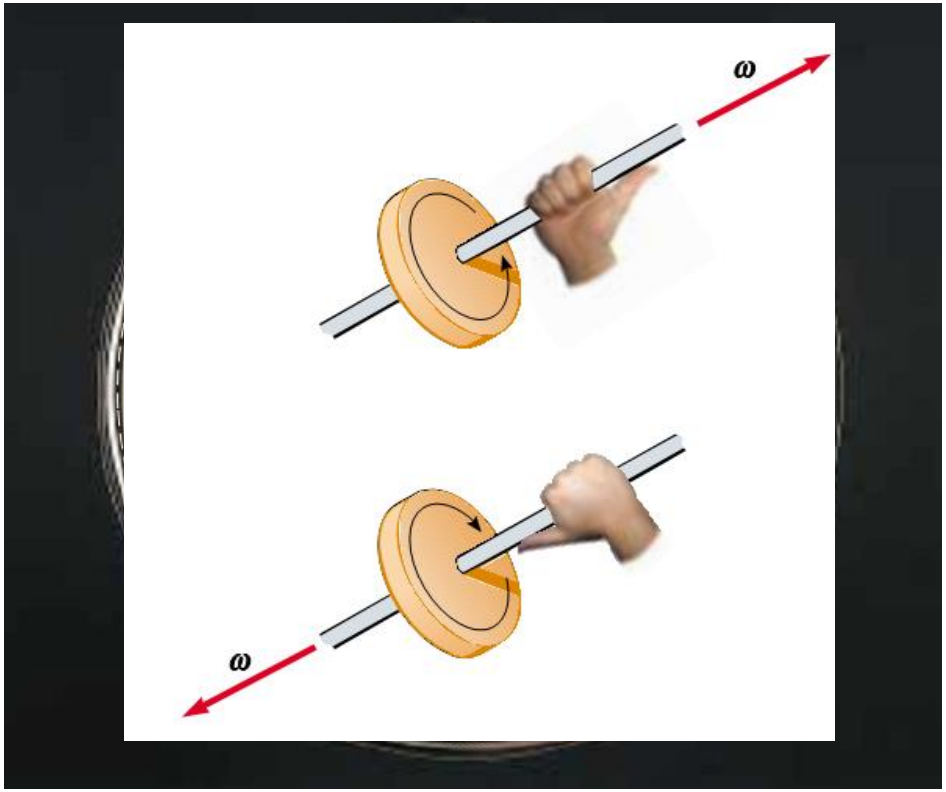


Egyensúly feltétele:

I. (transzlációs egyensúly): $$\sum F_{külső} = 0$$

II. forgási egyensúly: $$\sum M_{külső} = 0_{bármely\_tengelyre}$$

Merev test forgómozgása rögzített tengely körül



$t_k \rightarrow t_1 \quad ; \quad t_v \rightarrow t_2$

α: szögelfordulás [rad]

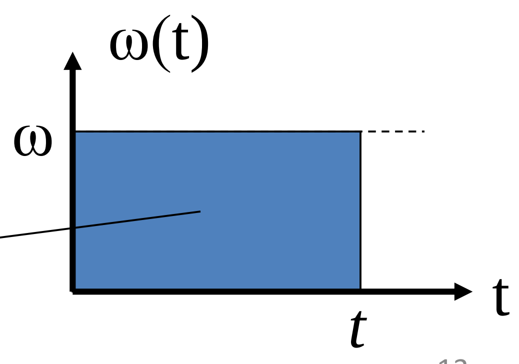
átlagos szögsebesség [1/s]

$$\omega_{átl.} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\alpha(t_2) - \alpha(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Ha ω=const. $\omega = \dfrac{\alpha(t) - \alpha_o}{t}$ $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

Korong helyzete: $\alpha(t)$

Elfordulás szöge: $\alpha(t) - \alpha_o = \omega t$



Ha ω≠const.

pillanatnyi szögsebesség

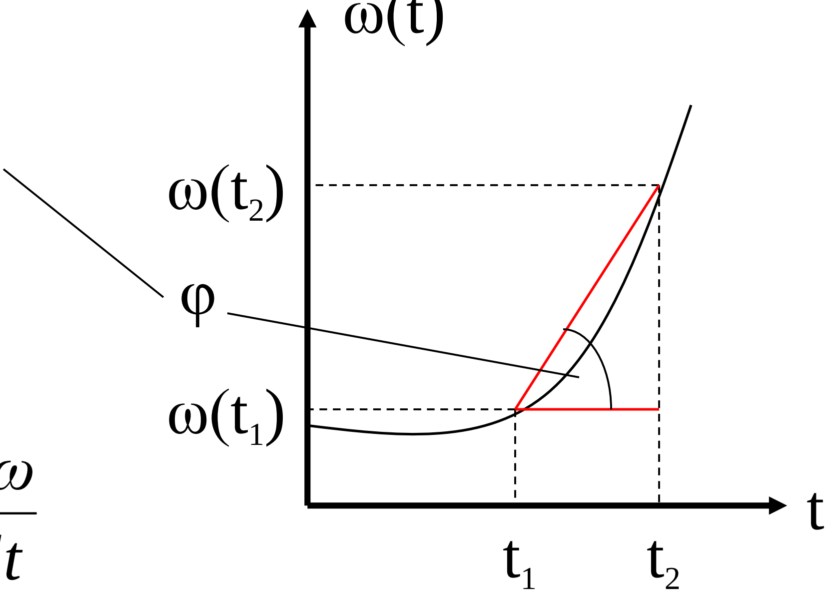
$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} = \frac{d\alpha}{dt}$$

átlagos szöggyorsulás [1/s²]

$$\beta_{átl} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega(t_2) - \omega(t_1)}{t_2 - t_1} = tg\,\varphi$$

pillanatnyi szöggyorsulás

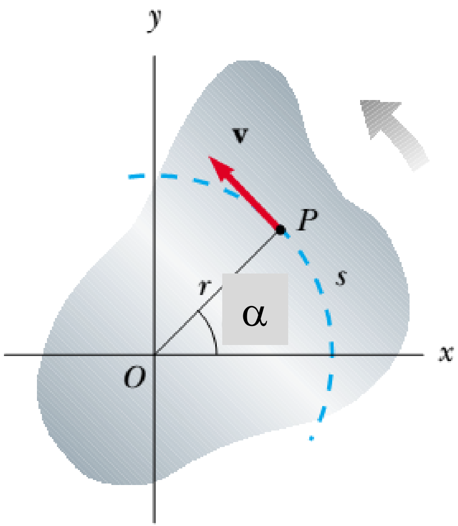
$$\beta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega(t+\Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$



Adott: β(t), ω_o és α_o

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \beta(\tau)d\tau$$

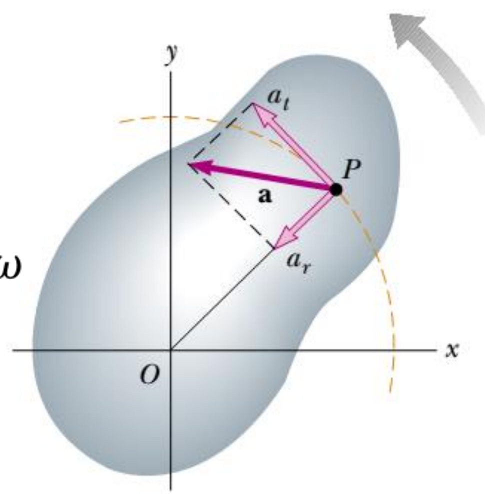
$$\alpha(t) = \alpha_0 + \int_0^t \omega(\tau)d\tau$$



v: kerületi sebesség

$$s = r\alpha$$

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\alpha}{dt} = r\omega$$

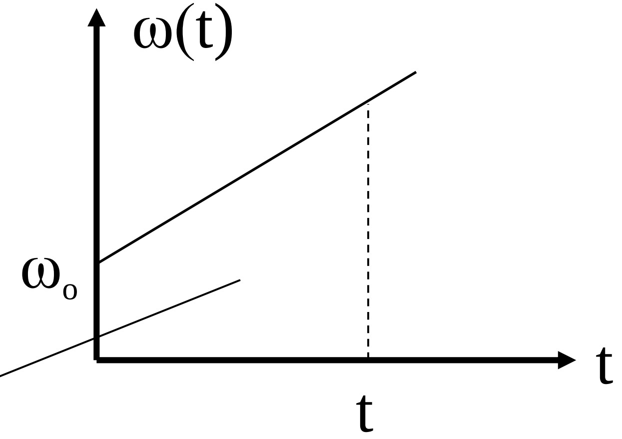


$$a_t = \frac{dv}{dt} = \mathrm{r}\frac{d\omega}{dt} = \mathrm{r}\beta$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

Ha $\boldsymbol{\beta}$=const.

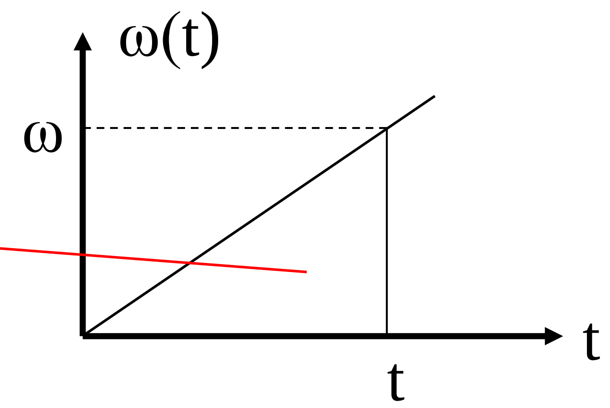
$$\omega(t)=\omega_o+\beta t$$



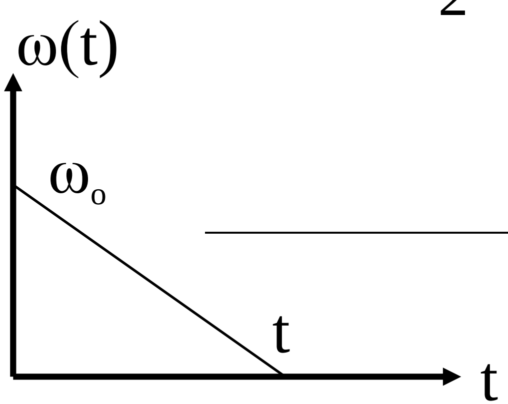
Szögelfordulás:

$$\alpha=\omega_o t+\frac{1}{2}\beta t^2$$

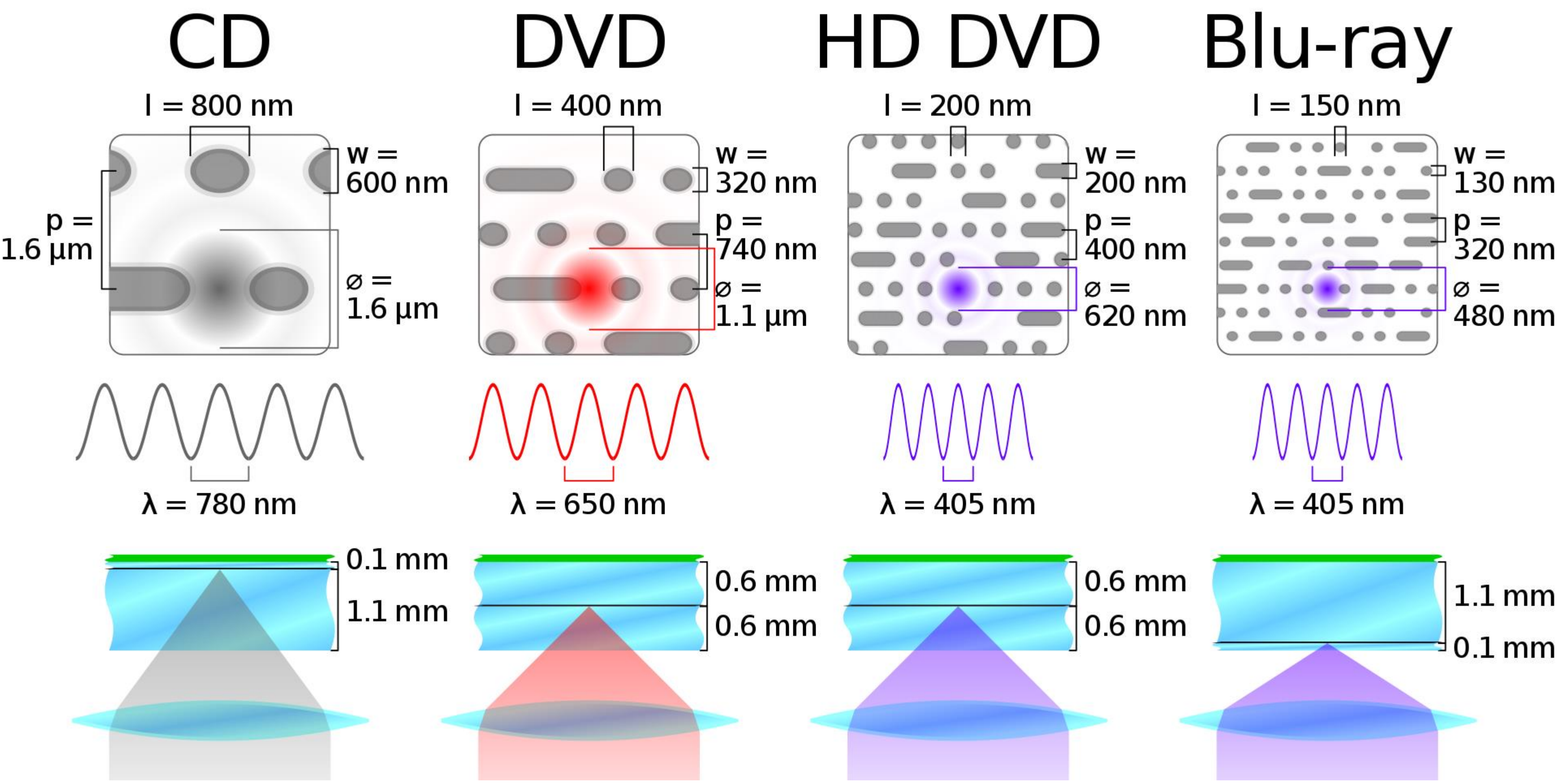
Ha ω_o=0 szögelfordulás:



$$\alpha=\frac{1}{2}\beta t^2=\frac{\omega t}{2}=\frac{\omega^2}{2\beta}$$



$$\beta\rightarrow|\beta|\ ,\ \omega\rightarrow\omega_o$$


CD
DVD
HD DVD
Blu-ray
l = 800 nm
w = 600 nm
p = 1.6 µm
⌀ = 1.6 µm
λ = 780 nm
0.1 mm
1.1 mm
l = 400 nm
w = 320 nm
p = 740 nm
⌀ = 1.1 µm
λ = 650 nm
0.6 mm
0.6 mm
l = 200 nm
w = 200 nm
p = 400 nm
⌀ = 620 nm
λ = 405 nm
0.6 mm
0.6 mm
l = 150 nm
w = 130 nm
p = 320 nm
⌀ = 480 nm
λ = 405 nm
1.1 mm
0.1 mm

In a typical compact disc player, the constant speed of the surface at the point of the laser–lens system is 1.3 m/s.

(A) Find the angular speed of the disc in revolutions per minute when information is being read from the innermost first track ($r = 23$ mm) and the outermost final track ($r = 58$ mm).

Solution Using $v = r\omega$ can find the angular speed that will give us the required tangential speed at the position of the inner track,

$$\omega_i = \frac{v}{r_i} = \frac{1.3 \text{ m/s}}{2.3 \times 10^{-2} \text{ m}} = 57 \text{ rad/s}$$

$$= (57 \text{ rad/s})\left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}\right)\left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}\right)$$

$$= \boxed{5.4 \times 10^2 \text{ rev/min}}$$

For the outer track,

$$\omega_f = \frac{v}{r_f} = \frac{1.3 \text{ m/s}}{5.8 \times 10^{-2} \text{ m}} = 22 \text{ rad/s}$$

$$= \boxed{2.1 \times 10^2 \text{ rev/min}}$$

The player adjusts the angular speed ω of the disc within this range so that information moves past the objective lens at a constant rate.

(B) The maximum playing time of a standard music CD is 74 min and 33 s. How many revolutions does the disc make during that time?

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i = \tfrac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$$

$$= \tfrac{1}{2}(57 \text{ rad/s} + 22 \text{ rad/s})(4\,473 \text{ s})$$

$$= 1.8 \times 10^5 \text{ rad}$$

We convert this angular displacement to revolutions:

$$\Delta\theta = 1.8 \times 10^5 \text{ rad}\left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}\right) = \boxed{2.8 \times 10^4 \text{ rev}}$$

(C) What total length of track moves past the objective lens during this time?

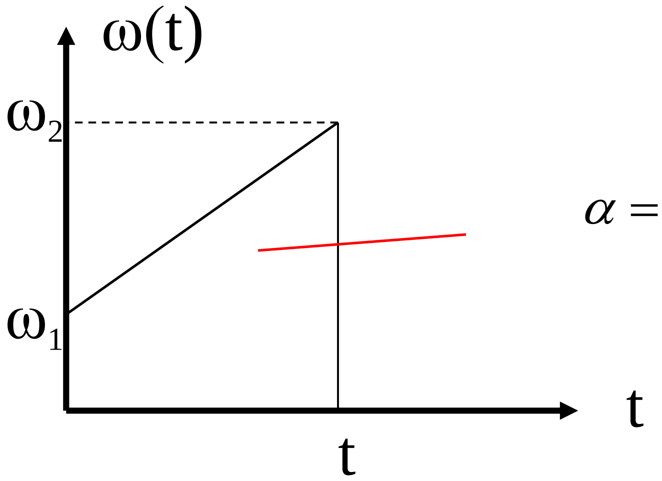
Solution Because we know the (constant) linear velocity and the time interval, this is a straightforward calculation:

$$x_f = v_i t = (1.3 \text{ m/s})(4\,473 \text{ s}) = \boxed{5.8 \times 10^3 \text{ m}}$$

(D) What is the angular acceleration of the CD over the 4 473-s time interval? Assume that α is constant.

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{22 \text{ rad/s} - 57 \text{ rad/s}}{4\,473 \text{ s}}$$

$$= \boxed{-7.8 \times 10^{-3} \text{ rad/s}^2}$$



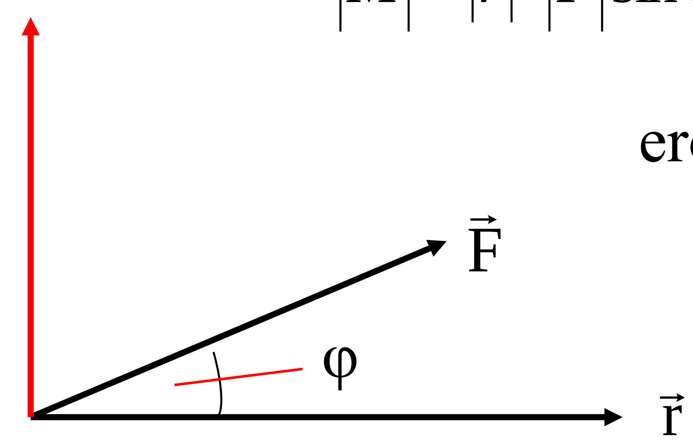
$$\alpha = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\beta}$$

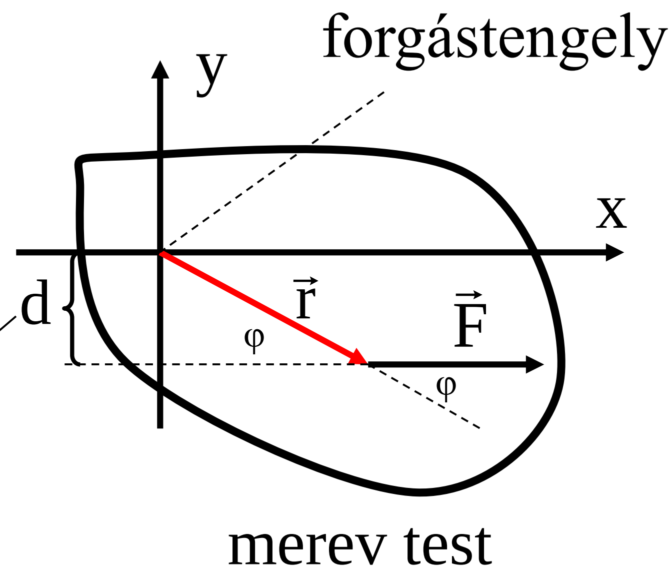
Def.: forgatónyomaték [Nm] $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ $\quad \left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\vec{F}\right| \sin\varphi = F \cdot d$

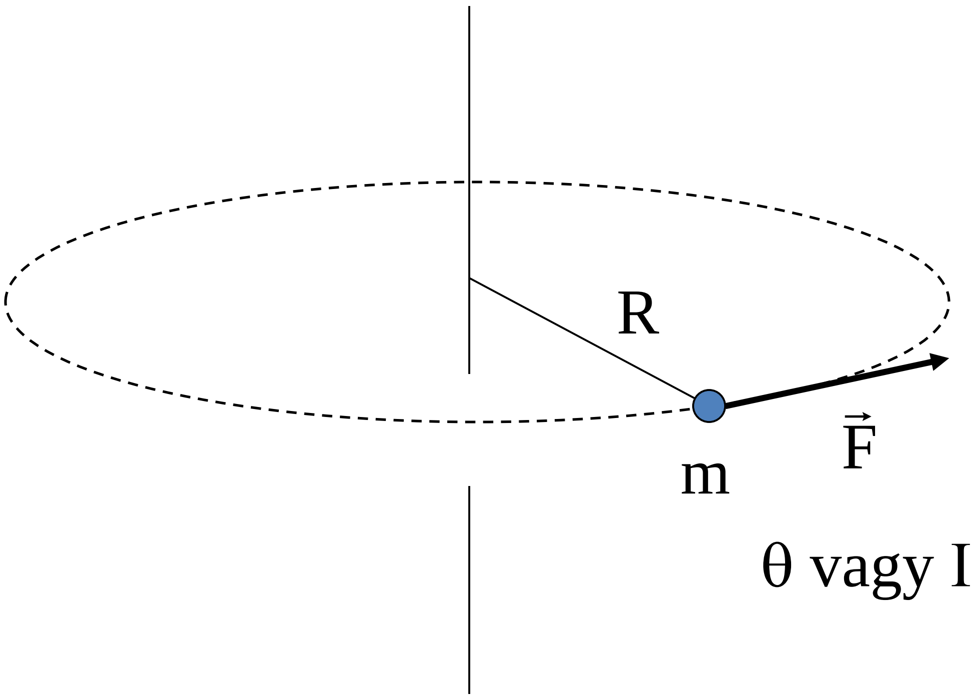
erő

erőkar





Forgás - dinamika



$$F = ma$$

$$FR = mRa$$

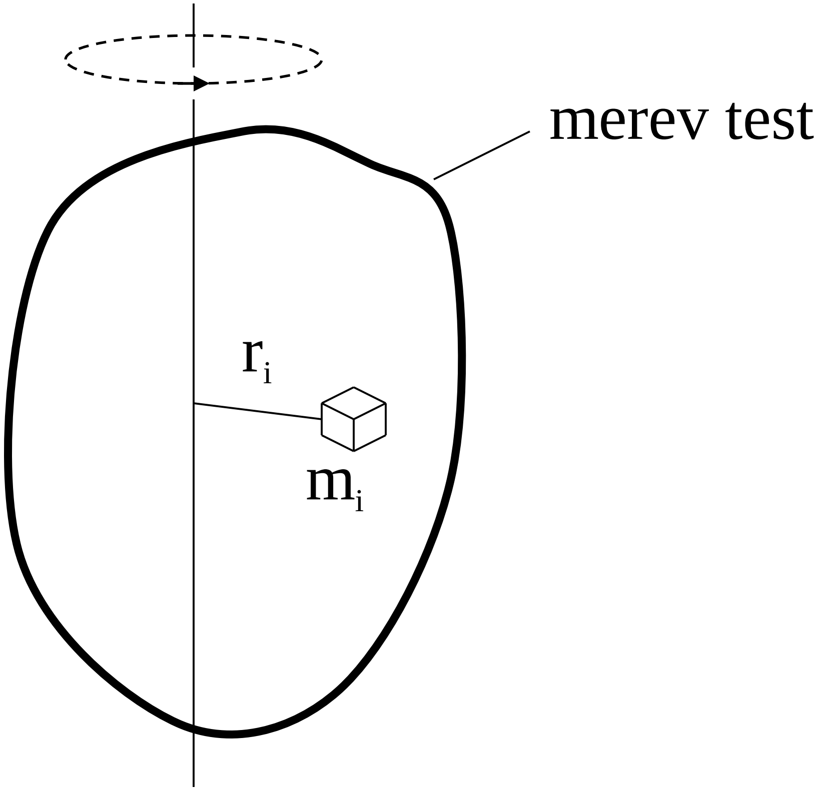
$$a_t = \beta R$$

$$M = \underbrace{mR}\,^2 \beta$$

θ vagy I: tehetetlenségi nyomaték

$$\boxed{M = \Theta\beta}$$

$$\langle \mathrm{F} = \mathrm{ma} \rangle$$



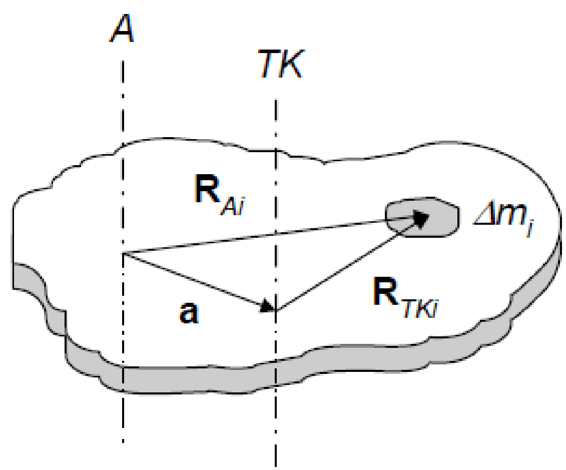
Tehetetlenségi nyomaték

$$\Theta = \sum_i m_i r_i^2$$

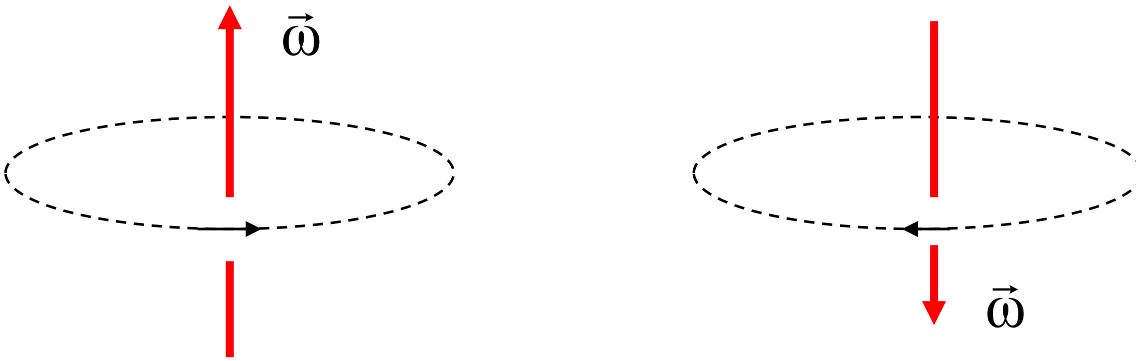
$$\Theta_{cső} = mr^2$$

$$\Theta_{henger} = \frac{1}{2} mr^2$$

Steiner tétel: $\Theta_A = \Theta_{TK} + a^2 m$



Irány:

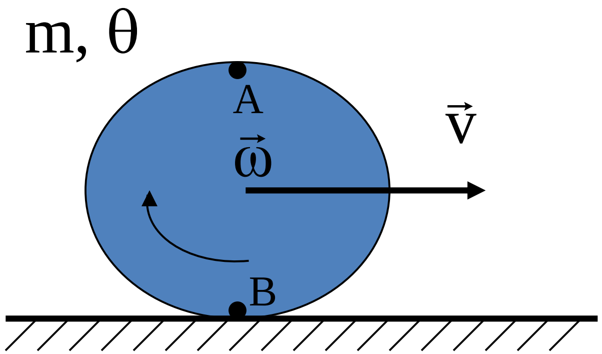


Mozgási energia: $$E_k = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$$

Munka: $W = M \cdot \varphi$ $$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M(\varphi) d\varphi$$

Pillanatnyi teljesítmény: $P = M \cdot \omega$

Gördülő mozgás

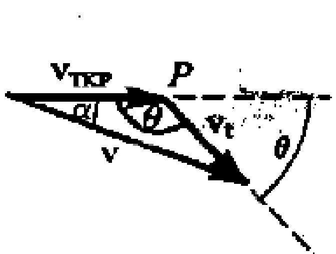


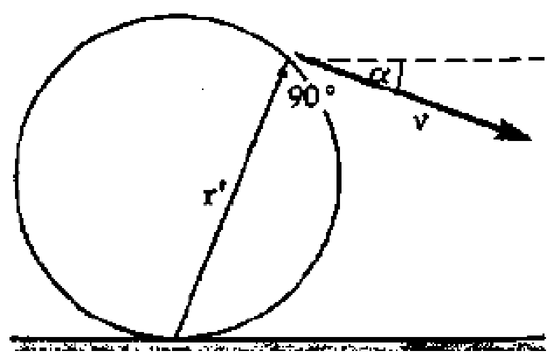
$$v_B = 0 \qquad v_A = 2v$$

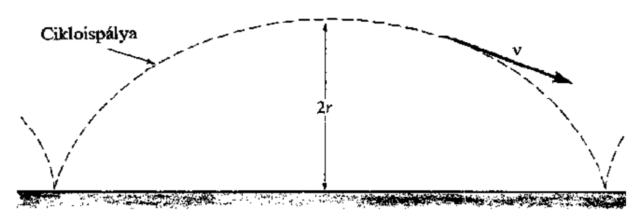
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

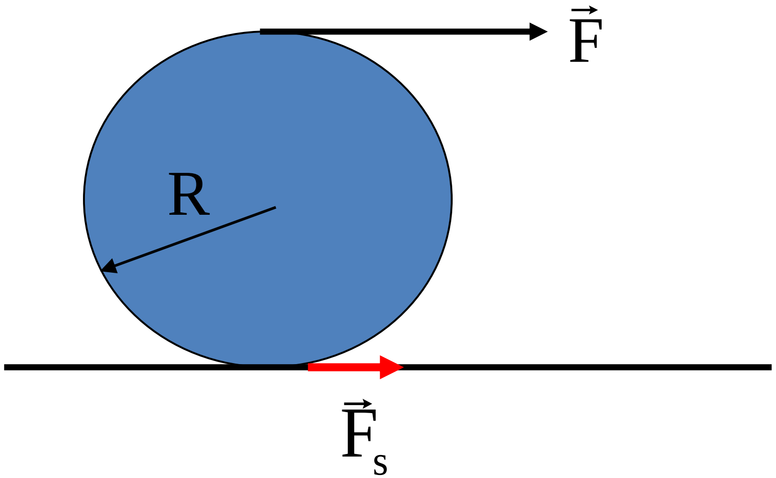
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{\Theta}{R^2}\right)v^2$$







Példa: tiszta gördülés



$$\text{I.} \quad F + F_s = ma$$

$$(M = \Theta\beta)$$

$$\text{II.} \quad (F - F_s)R = \Theta\beta = \Theta\frac{a}{R}$$

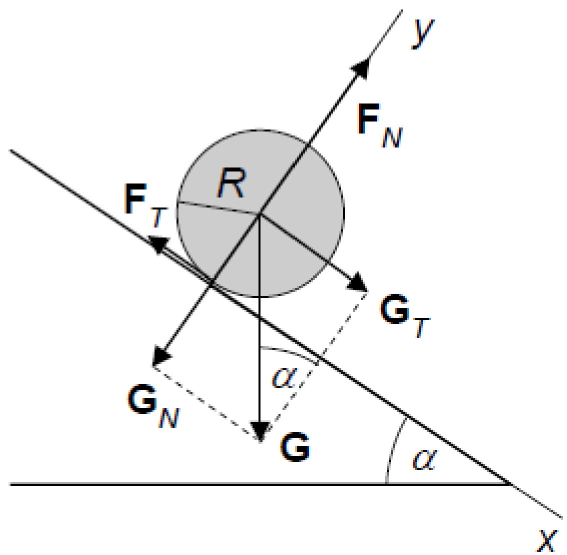
Tömör korong: $\Theta = \frac{1}{2}mR^2$

Súrlódási erő: $F_s \leq F_{s,\,\max}.$

$$a = \frac{4}{3}\frac{F}{m}$$

$$F_s = \frac{1}{3}F$$

Lejtőn legördülő henger (gömb)



haladó mozgás:

$$F_{ex} = G_T - F_T = ma_x$$

$$F_{ey} = F_N - G_N = ma_y$$

$$G_T - F_T = G\sin\alpha - F_T = ma_x$$

$$mg\sin\alpha - F_T = ma_x$$

forgó mozgás:

$$M_z = -F_T R$$

$$-F_T R = \Theta_z \beta_z$$

a test gördül: $a_x = -R\beta_z$

$$a_x = \frac{mg\sin\alpha}{m + \frac{\Theta_z}{R^2}} \qquad \beta_z = -\frac{mg\sin\alpha}{R\left(m + \frac{\Theta_z}{R^2}\right)}$$

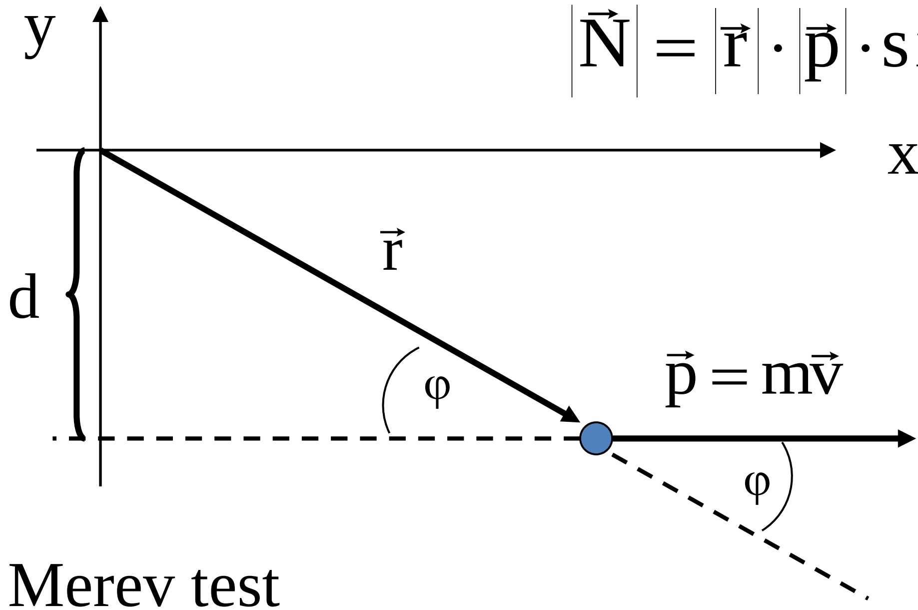
$$a_x^{henger} = \frac{2}{3} g\sin\alpha$$

$$a_x^{cső} = \frac{1}{2} g\sin\alpha$$

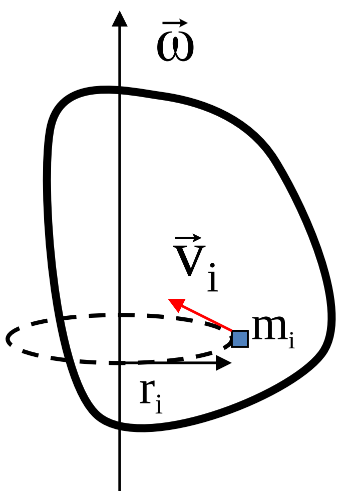
$$a_x^{g} = \frac{5}{7} g\sin\alpha$$

Láttuk: impulzusmomentum v. perdület $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$\left|\vec{N}\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\vec{p}\right| \cdot \sin(\varphi) = mvr\sin(\varphi) = mvd$$



Merev test



$$N_i = m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \omega \qquad (v_i = \omega r_i)$$

$$N = \sum_i m_i v_i r_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \Theta\omega \qquad \Rightarrow \quad E_k = \frac{N^2}{2\Theta}$$

Impulzusmomentum megmaradás

$$M = \Theta\beta$$

$$M = \Theta\beta = \Theta\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \Theta\frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Theta\omega_2 - \Theta\omega_1}{\Delta t} = \frac{N_2 - N_1}{\Delta t}$$

$$M = \frac{\Delta N}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad M = \frac{dN}{dt}$$

Perdület megmaradás:

$$Ha \;\; \vec{M}_e = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \vec{N} = const.$$

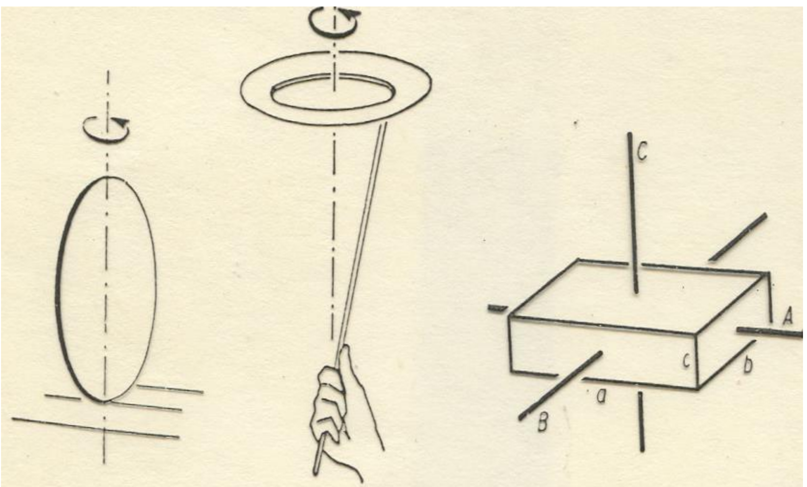
Szabad tengelyek

$$N_x = \Theta_{xx}\omega_x + \Theta_{xy}\omega_y + \Theta_{xz}\omega_z$$
$$N_y = \Theta_{yx}\omega_x + \Theta_{yy}\omega_y + \Theta_{yz}\omega_z$$
$$N_z = \Theta_{zx}\omega_x + \Theta_{zy}\omega_y + \Theta_{zz}\omega_z \,.$$

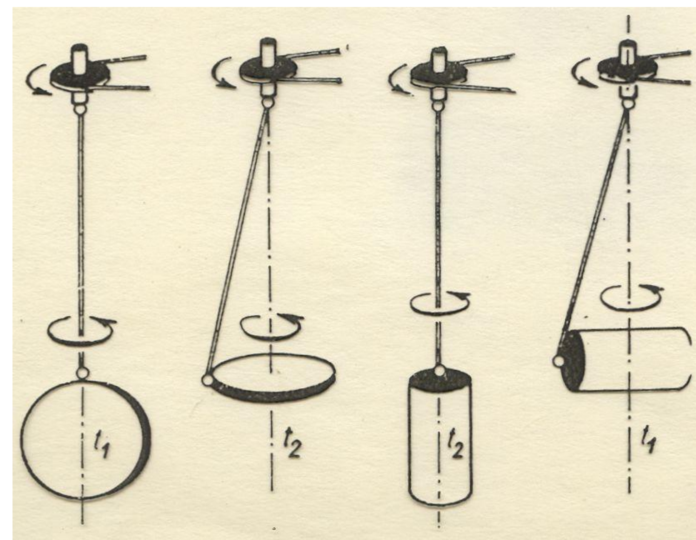
bármely testben

$$N_x = \Theta_{xx}\omega_x$$
$$N_y = \Theta_{yy}\omega_y$$
$$N_z = \Theta_{zz}\omega_z \,.$$

főtehetetlenségi tengelyek



szabad tengely



♦ csak főtehetetlenségi tengely lehet,

♦ csak tömegközépponton átmenő tengely lehet,

♦ stabilis forgás csak a legnagyobb- és a legkisebb tehetetlenségi nyomatékú főtehetetlenségi tengely körül jön létre (előbbi a stabilabb)

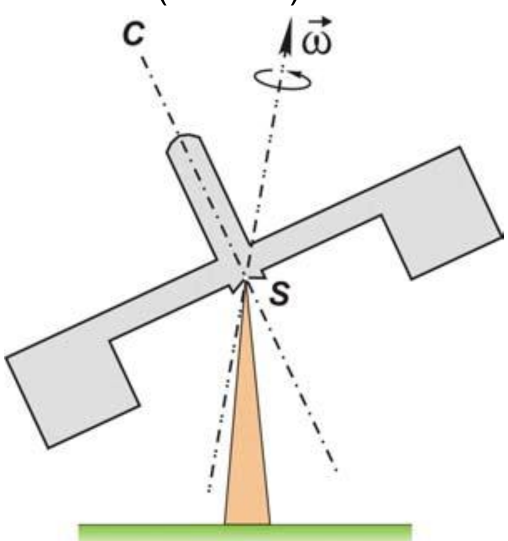
Pörgettyűk

Pörgettyűnek nevezünk egy tetszőleges alakú és tömegeloszlású merev testet, ha egy rögzített, vagy rögzítettnek képzelhet pont körül foroghat.

Erőmentes

$\mathbf{M} = 0$ $\mathbf{N} =$ áll.

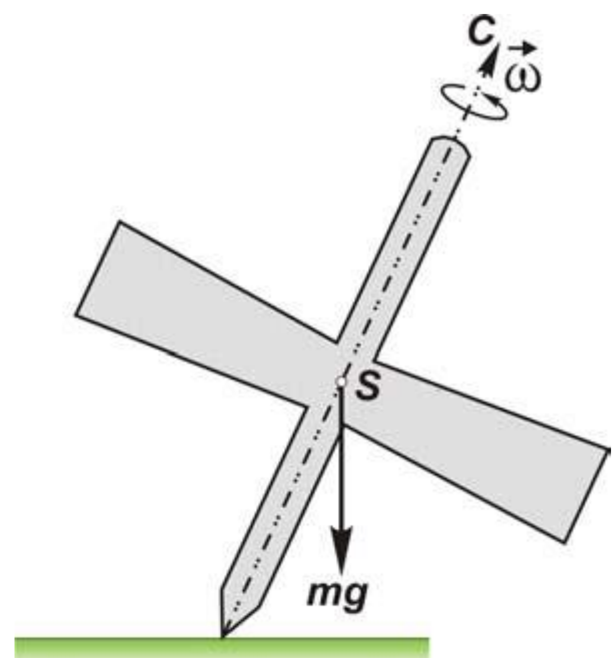
A súlypont körül forog.
a) a szimm. tengely helyzete nem változik
b) a szimm. tengely egy körkúpon mozog a térben állandó impulzustengely körül. (nutáció)



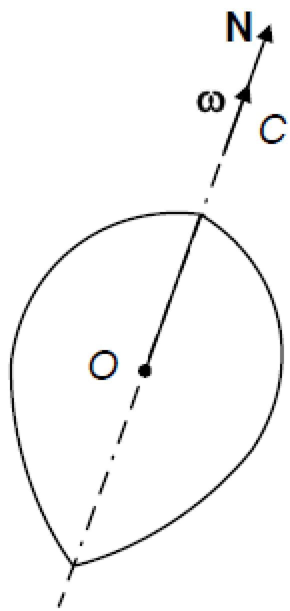
Súlyos

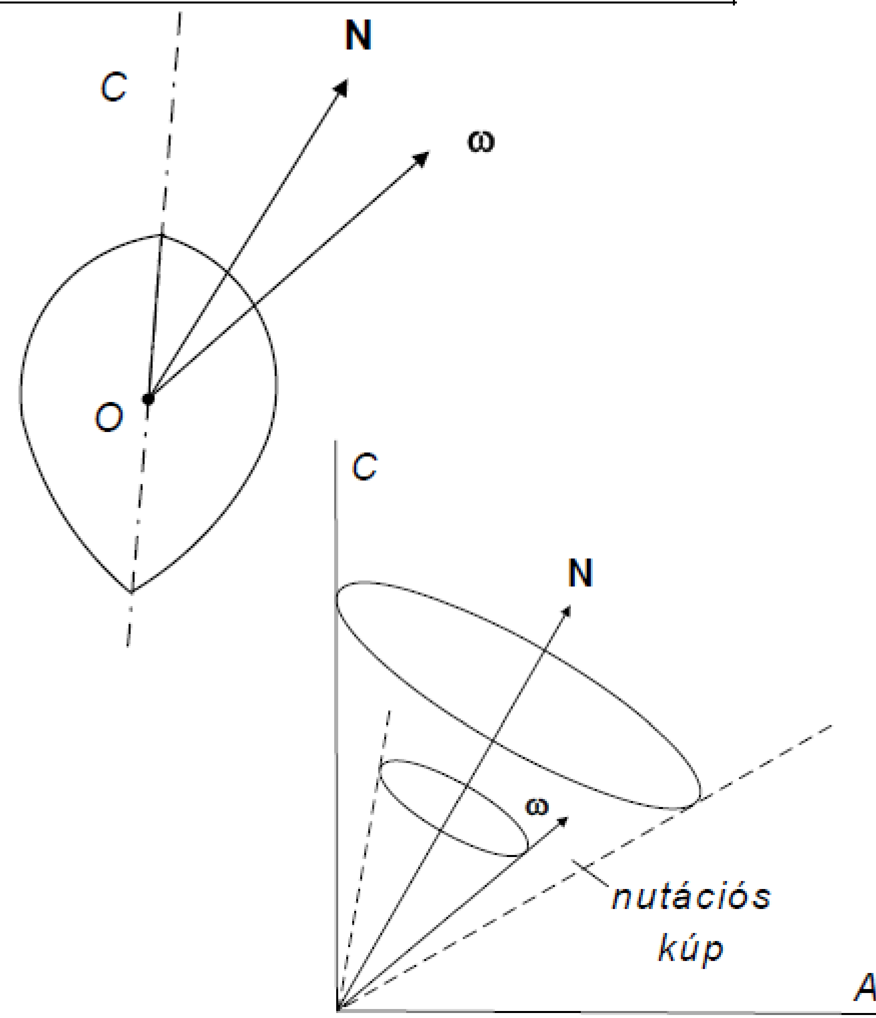
M <> 0

A szimm. tengely függőleges tengelyű körkúp palástja mentén mozog. (precesszió)

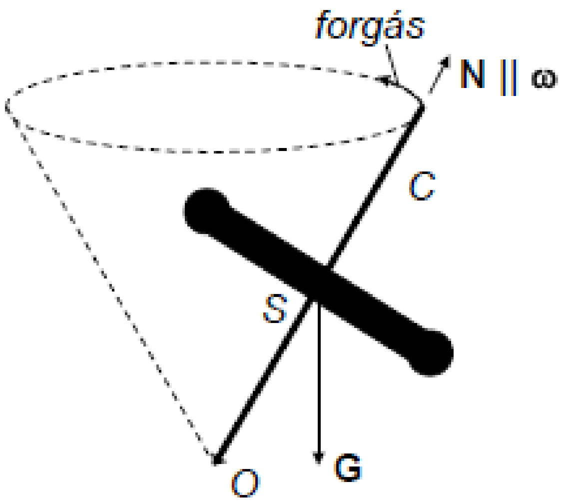


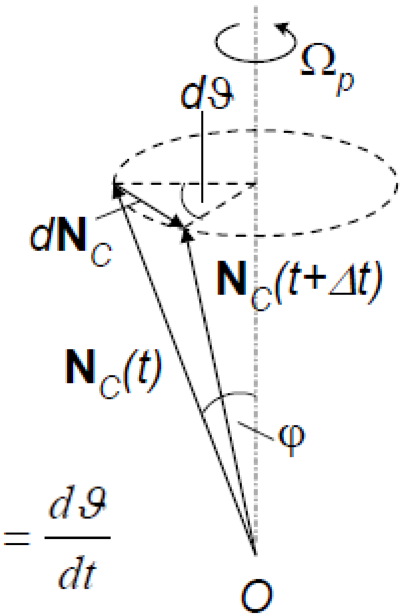
KÍSÉRLET:
Súlypontjában (O) alátámasztott pörgettyűt ferdén álló szimmetriatengelye (C) körül gyorsan megforgatjuk (baloldali ábra). Ekkor a pörgettyű a tengelye irányát megtartva forog. A szimmetriatengelyt kissé kibillentve (a jobboldali ábrán a függőlegeshez közelítve), a tengely egy kúp mentén körbeforog. A jelenség neve: *nutáció*.

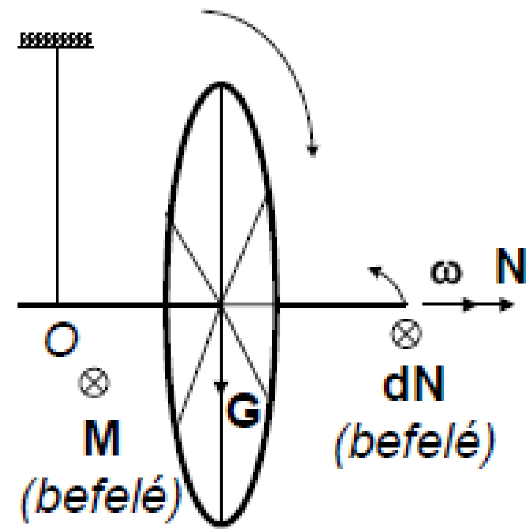




Precesszió 1.



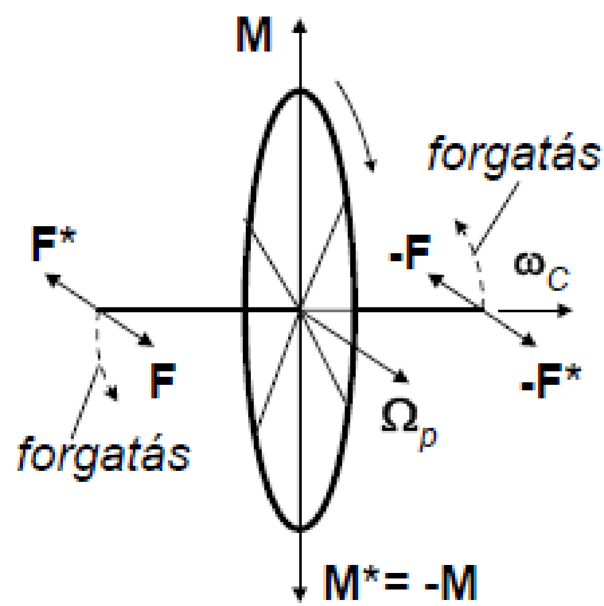




$$\Omega_p = \frac{d\vartheta}{dt}$$

$$dN_C = M dt \qquad d\vartheta = \frac{dN_C}{N_C \sin\varphi}$$

$$\Omega_p = \frac{M}{N_C \sin\varphi}$$



Precesszió 2.