Rezgések, kiegészítés

Werner Miklós Antal

2014. május 8.

Tartalomjegyzék

1. Harmonikusan rezgő tömegpont

Egy m tömegű tömegpont egydimenziós harmonikus rezgést végez, ha egy egyenes mentén mozog, és egyensúlyi helyzetéből x távolságra kitérítve egy a kitéréssel arányos visszatérítő erő hat rá: $F = -D\,x$, ahol az arányossági tényezőt nevezik direkciós erőnek, vagy rugóállandónak. A rugóállandó SI mértékegysége láthatóan $[D] = N/m$.

Egy ilyen tömegpont mozgásegyenlete

$$m\ddot{x} = -D\,x \quad . \tag{1}$$

Ez egy másodrendű differenciálegyenlet, ugyanis a keresett $x(t)$ függvény második deriváltja a legmagasabb, ami megjelenik benne. Egy ilyen differenciálegyenlet megoldásához ismernünk kell a kezdeti feltételeket. Mivel az egyenlet másodrendű, ezért valamely t_0 időpontban meg kell adnunk az $x(t_0)$ és $\dot{x}(t_0)$ értékeket. Gyakran ezt a t_0 időpontot választjuk az idő nulla pontjának, azaz a kezdeti feltételeket a $t = 0$-ban adjuk meg.

Természetesen szeretnénk, hogy ezt a differenciálegyenletet tetszőleges kezdőfeltételre meg tudjuk oldani. Ehhez kényelmes, ha az egyenletnek ismerjük az általános megoldását. Ebben lesznek ún. szabad paraméterek, melyek értékét a kezdeti feltételek határozzák meg. Másodrendű, egyváltozós differenciálegyenlet esetén két kezdeti feltételünk van: a kezdeti hely és sebesség. Ez azt jelzi, hogy az általános megoldásban két szabad paraméternek kell megjelennie.

A fenti egyenlet egy lehetséges általános megoldása az alábbi alakú:

$$x(t) = A\ \sin(\omega t + \varphi)\ , \text{ ahol} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}\ . \tag{2}$$

Láthatóan három paraméter jelent meg a megoldásban. Ebből ω a rugóállandóval és a tömeggel van kapcsolatban, ez a rendszert jellemzi, nem a kezdeti feltételeket. Megjelent továbbá az A és φ paraméter, melyek az általános megoldás szabad paraméterei. Ketten vannak, tehát rendben vagyunk.

Ahhoz, hogy lássuk, hogyan kell a kezdeti feltételeket illeszteni, adjuk meg a kezdeti feltételeket: Legyen a kezdeti hely $x(0) = x_0$, a kezdeti sebesség pedig $\dot{x}(0) = v_0$. A kezdeti helyre való feltétel:

$$x_0 = x(0) = A\ \sin(\omega \cdot 0 + \varphi) = A\ \sin(\varphi) \quad . \tag{3}$$

A kezdeti sebességre való feltétel felírásához ki kell számítanunk az általános megoldásból a sebesség általános kifejezését:

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} A\ \sin(\omega t + \varphi) = A\,\omega\ \cos(\omega t + \varphi) \quad . \tag{4}$$

Ennek segítségével a kezdeti sebességre való feltétel:

$$v_0 = \dot{x}(0) = A\,\omega\ \cos(\omega \cdot 0 + \varphi) = A\,\omega\ \cos(\varphi) \tag{5}$$

A (3) és (5) egyenleteket megoldva A-ra és φ-re, megkaphatjuk a differenciálegyenletnek a kezdeti feltételeket is kielégítő megoldását. Ennek egy lehetséges módja, hogy elosztjuk a (3) egyenletet az (5) egyenlettel. Amit kapunk:

$$\frac{x_0}{v_0} = \frac{1}{\omega}\ \tan(\varphi) \quad . \tag{6}$$

Ebből:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega\, x_0}{v_0}\right) \quad . \tag{7}$$

Ezt visszahelyettesítve a (3) egyenletbe:

$$x_0 = A \sin\left(\arctan\left(\frac{\omega\, x_0}{v_0}\right)\right) \quad , \tag{8}$$

ebből

$$A = \frac{x_0}{\sin\left(\arctan\left(\frac{\omega\, x_0}{v_0}\right)\right)} \quad . \tag{9}$$

Ezeket az általános megoldásba behelyettesítve kapjuk a kezdeti feltételeknek is megfelelő megoldást:

$$x(t) = \frac{x_0}{\sin\left(\arctan\left(\frac{\omega\, x_0}{v_0}\right)\right)} \sin\left(\omega\, t + \arctan\left(\frac{\omega\, x_0}{v_0}\right)\right) \quad . \tag{10}$$

Megjegyzés: Ha jobban belegondolunk, akkor amit itt kaptunk, az is tekinthető általános megoldásnak, aminek x_0 és v_0 a szabad paraméterei. Ekkor a kezdeti feltételek illesztése nagyon egyszerűvé válna, ugyanis csak be kellene őket írni. Azonban ez az általános alak ilyen formában elég ronda, nehezen megjegyezhető.

Az (1) mozgásegyenlet általános megoldását gyakran egy másik alakban írjuk fel:

$$x(t) = A_1\ \sin(\omega t) + A_2\ \cos(\omega t)\ , \text{ ahol } \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}\ . \tag{11}$$

Láthatóan ismét megjelent a rendszert jellemző ω paraméter, és a kezdeti feltételeket jellemző két szabad paraméter, A_1 és A_2. Ha $t = 0$-ban ismerjük a helyet és sebességet (x_0 és v_0), a szabad paraméterek illesztése egyszerű:

$$x_0 = x(0) = A_1 \sin(0) + A_2 \cos(0) = A_2 \ \Rightarrow\ A_2 = x_0\ , \tag{12}$$

valamint

$$\dot{x}(t) = A_1\omega \cos(\omega t) - A_2\omega \sin(\omega t)\ , \tag{13}$$

ebből:

$$v_0 = \dot{x}(0) = A_1\omega \cos(0) - A_2\omega \sin(\omega t) = A_1\omega \ \Rightarrow\ A_1 = \frac{v_0}{\omega}\ . \tag{14}$$

A kezdeti feltételeket kielégítő megoldása a mozgásegyenletnek tehát

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + x_0 \cos(\omega t)\ . \tag{15}$$

Láthatóan a mozgásegyenletet nem csak egyféle általános megoldással tudjuk megoldani. Felmerülhet bennünk a kérdés, hogy át lehet-e transzformálni az egyik alakot a másikba? Vegyük példaként a (2) alakú általános megoldást, és használjuk ki a szinusz függvény addíciós formuláját:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\ . \tag{16}$$

Ezt felhasználva:

$$x(t) = A\ \sin(\omega t + \varphi) = A\cos(\varphi)\sin(\omega t) + A\sin(\varphi)\cos(\omega t) \tag{17}$$

Ebből az alakból könnyen leolvashatók az áttérés formulái:

$$A_1 = A\cos(\varphi) \quad \text{és} \quad A_2 = A\sin(\varphi) \tag{18}$$

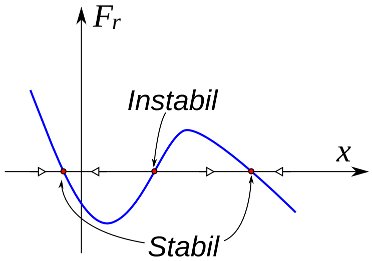
2. Anharmonikus rezgések harmonikus közelítése

2.1. Elmélet

Harmonikusnak tekinthető rezgésekkel nagyon gyakran találkozunk a természetben. Ez igencsak meglepő, ugyanis az (1) mozgásegyenlet nagyon speciális alakú. A kérdés, hogy miért találkozunk ilyen mozgásokkal oly gyakran? Vegyünk egy általánosabb, anharmonikus oszcillátort. Ez egy m tömegű test melyre olyan erő hat, aminek a kitéréstől való függése valamilyen tetszőleges $F_r(x)$ függvénnyel írható le. A mozgásegyenlet:

$$m\ddot{x} = F_r(x) \tag{19}$$

Keressük először meg a tömegpont egyensúlyi helyzeteit. Ezek ott lesznek, ahol a tömegpontra nem hat erő, azaz, ahol $F_r(x) = 0$. Jelöljük ennek az egyenletnek valamely megoldását x_0-lal, amire tehát $F_r(x_0) = 0$.



1. ábra. *Stabil és instbil egyensúlyi pontok*

A kérdés az, mi történik a tömegponttal, ha ebből az egyensúlyi helyzetéből kimozdítjuk. Feltételezhetjük, hogy az $F_r(x)$ függvény kellően sima az x_0 környezetében, ezért Taylor-sorba fejthető:

$$F_r(x) = F_r(x_0) + F_r'(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{1}{2}F_r''(x_0)\cdot(x - x_0)^2 + \ldots \quad . \tag{20}$$

Ha az $(x - x_0)$ kitérítés elegendően kicsi, akkor nem követünk el túl nagy hibát, ha a Taylor sornak csak az $(x - x_0)$-ban elsőrendű tagjait őrizzük meg. Az x_0 egyensúlyi helyzetet pedig éppen az definiálta, hogy $F_r(x_0) = 0$, ezért a Taylor sor első, konstans tagja is kiesik. A rugóerő tehát:

$$F_r(x) \approx F_r'(x_0)\cdot(x - x_0) \tag{21}$$

Vezessük be a $D = -F_r'(x_0)$ jelölést a rugóállandóra. Ha a mozgás során $x - x_0$ végig kicsi marad, a mozgásegyenletet közelíthetjük az alábbi alakkal:

$$m\ddot{x} = -D\cdot(x - x_0)\ . \tag{22}$$

Ez már majdnem az az alak, amit szeretnénk. Toljuk el a koordinátarendszerünk origóját az x_0-ba, azaz térjünk át az $y = x - x_0$ koordinátára. Ennek az idoderiváltjai:

$$\dot{y} = \frac{d}{dt}(x - x_0) = \dot{x} \quad \text{és} \quad \ddot{y} = \ddot{x}\ . \tag{23}$$

Ezeket figyelembe véve, a mozgásegyenletet átírhatjuk az y változóra:

$$m\ddot{y} = -Dy \; . \tag{24}$$

Ez a közelítő mozgásegyenlet mindaddig megfelelő nekünk, amíg y nem túl nagy. Ha pontosabban szeretnénk számolni, akkor a Taylor sorban tovább kell mennünk. Ekkor egy anharmonikus oszcillátor mozgásegyenletével állunk szemben, melyet általában nem lehet zárt alakban megoldani: a megoldást is sorfejtett alakban kereshetjük. Akit ez jobban érdekel, a Landau Elméleti Fizika I. kötetben van egy szép, de számolós módszer, ahogy szisztematikusan lehet közelíteni az anharmonikus oszcillátor megoldását.

További probléma lehet, hogy ha $F_r'(x_0) > 0$, úgy $D < 0$, azaz minél jobban eltávolodik a tömegpont az egyensúlyi helyzetétől, annál jobban löki kifelé a rugó. Ez azt jelenti, hogy az olyan egyensúlyi helyzetek, ahol $F_r'(x_0) > 0$, instabilak. Ilyen instabil egyensúlyi helyzetek körül a megoldások exponenciális gyorsasággal eltávolodnak az egyensúlyi helyzettől. Harmonikus rezgést csak stabil egyensúlyi helyzetek körül láthatunk, ahol $F_r'(x_0) < 0$, azaz $D = -F_r'(x_0) > 0$. (Lásd: 1. ábra)

2.2. Példák

2.2.1. Rugóra akasztott tömegpont külső gravitációs térben

Ha gravitációs térben vizsgáljuk egy rugóra akasztott tömegpont mozgását, a következő mozgásegyenletre jutunk:

$$m\ddot{x} = -Dx + mg \; . \tag{25}$$

A feljebb bevezetett F_r függvény ezért:

$$F_r(x) = -Dx + mg \; . \tag{26}$$

Az egyensúlyi helyzetet meghatározó egyenlet:

$$\begin{aligned} F_r(x_0) &= 0 \\ -Dx_0 + mg &= 0 \\ x_0 &= \frac{mg}{D} \end{aligned} \tag{27}$$

A lineáris közelítéshez meg kell határoznunk az F_r függvény deriváltját az x_0 pontban:

$$F_r'(x_0) = -D \tag{28}$$

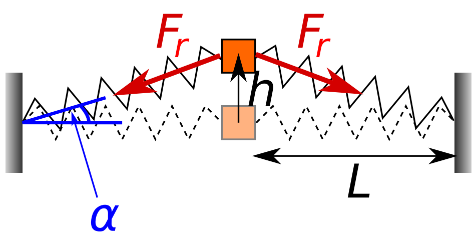
Minden további derivált zérus, így ebben az esetben a lineáris közelítés egzakt, bármekkora kitérésre jó:

$$F_r(x) = -D(x - x_0) \tag{29}$$

Innen már ugyanúgy számolunk tovább, mint az előző fejezetben.

Azt láttuk tehát, hogy egy külső gravitációs erő csupán eltolja az egyensúlyi helyzetet az $x_0 = \frac{mg}{D}$ pontba.

2.2.2. Előfeszített rugók közé helyezett tömegpont transzverz rezgései



Tekintsük az ábrán is látható rendszert! (Képzeljük az egészet egy vízszintes asztal felszínére, azaz tekintsünk el a gravitációtól!) Amikor a test az egyensúlyi helyzetében van, a rugók hosszát jelölje L.

A rugók nyújtatlan hosszát jelöljük L_0-lal. Ezért amikor az egyensúlyi helyzetben van, akkor is a rugók kifejtenek egy-egy $D(L - L_0)$ erőt jobbra, ill. balra.

Megoldás egyszerű geometriai megfontolásokkal:
Mozdítsuk ki a testet függőleges irányba, egy kicsiny h távolságra!($h \ll L$) Az első kérdésünk az lehet, hogy mennyivel nyúltak meg a rugók? A rugó új hosszát Pitagorasz tételével tudjuk kifejezni:

$$L' = \sqrt{L^2 + h^2} = L\sqrt{1 + \frac{h^2}{L^2}} \approx L\left(1 + \frac{h^2}{2\,L^2}\right) , \tag{30}$$

ahol felhasználtuk a gyökfüggvény Taylor-sorát:

$$\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2} . \tag{31}$$

Azt látjuk, hogy a rugó megnyúlása négyzetesen függ csak $\frac{h}{L}$-től, ezért lineáris rendben elhanyagolható. Ez azt jelenti, hogy lineáris rendben a rugóerő a kitéréstől függetlenül $D(L - L_0)$-nak vehető.

Most tekintsük a rugóerők függőleges irányú eredőjét, amikor kitérítjük a tömeget függőlegesen h távolságra. Ezt egyszerűen kifejezhetjük a rugók vízszintessel bezárt α szögét felhasználva:

$$F_e = -2 \cdot D(L - L_0)\,\sin(\alpha) \approx -2 \cdot D\,(L - L_0)\frac{h}{L} = -D\,\frac{2 \cdot (L - L_0)}{L} h = -D_{eff}\,h \tag{32}$$

Itt a közelítésnél ismét felhasználtuk, hogy a rugó megnyúlása elhanyagolható. Azt kaptuk tehát, hogy visszatérítő erő jellemezhető egy effektív rugóállandóval:

$$D_{eff} = D\,\frac{2 \cdot (L - L_0)}{L} . \tag{33}$$

Most már fel tudjuk írni a test mozgásegyenletét:

$$m\,\ddot{h} = -D_{eff}\,h . \tag{34}$$

Innen már az ismert utat kell járni.

Megoldás közvetlen sorfejtéssel: Most ne közelítsünk semmit menet közben, írjuk fel egzaktul a visszatérítő erőt, és csak a végén fejtsünk sorba! Térítsük ki a rugót h magasságra! A rugó hossza

$$L' = \sqrt{h^2 + L^2} , \tag{35}$$

a rugóerő:

$$F_r = D\,(L' - L_0) = D\,(\sqrt{h^2 + L^2} - L_0) , \tag{36}$$

a rugóerők eredője:

$$F_e(h) = -2F_r \sin(\alpha) = -2F_r \frac{h}{L'} = -2F_r \frac{h}{\sqrt{h^2 + L^2}} = -2D\,(\sqrt{h^2 + L^2} - L_0)\frac{h}{\sqrt{h^2 + L^2}} . \tag{37}$$

A Taylor-sorhoz szükségünk van a függvény értékére az egyensúlyi helyzetben, azaz $h = 0$-ban:

$$F_e(h = 0) = -2D\,(\sqrt{0 + L^2} - L_0)\frac{0}{\sqrt{0 + L^2}} = 0 . \tag{38}$$

A lineáris rendű taghoz szükségünk van $F_e(h)$ deriváltjára:

$$\begin{aligned}\frac{dF_e(h)}{dh} &= -\;2D\,\frac{h}{\sqrt{h^2 + L^2}}\frac{h}{\sqrt{h^2 + L^2}} - 2D(\sqrt{h^2 + L^2} - L_0)\frac{1}{\sqrt{h^2 + L^2}} + \\ &+\;2D(\sqrt{h^2 + L^2} - L_0)\frac{h}{(h^2 + L^2)^{3/2}}\end{aligned} \tag{39}$$

Ennek az értékére a $h = 0$ pontban van szükségünk. Ekkor csak a második tag marad meg:

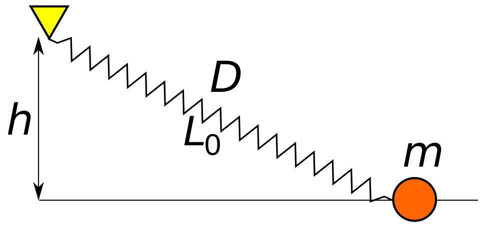
$$\left.\frac{dF_e(h)}{dh}\right|_{h=0} = -2D(\sqrt{0 + L^2} - L_0)\frac{1}{\sqrt{0 + L^2}} = -2D\,\frac{L - L_0}{L} \tag{40}$$

A 2.1. fejezet alapján az effektív rugóállandó éppen ezen derivált mínusz egyszerese, azaz:

$$D_{eff} = D\,\frac{2\cdot(L-L_0)}{L}\ . \tag{41}$$

Megnyugvással tapasztaljuk, hogy ugyanazt kaptuk, mint az egyszerű közelítgetéssel. Az első megoldás egyszerűbb, de ehhez szükség van, hogy lépésről lépésre lássuk, milyen tagokat dobunk ki, és azok milyen rendben befolyásolhatják az eredményt. A második megoldás csúnyább, könnyű elszámolni, viszont tetszőlegesen bonyolult probléma esetén célravezető lehet.

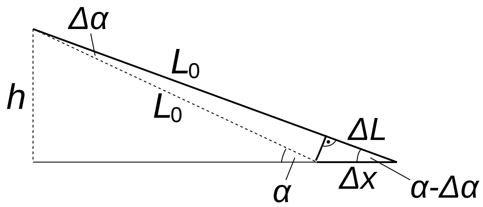
2.2.3. Vízszintes pályán mozgó test ferde rugóval összekötve



Tekintsük az ábrán látható rendszert. Amennyiben $h < L_0$, úgy egyensúlyi helyzetben a rugó ferde lesz, és a hossza a nyújtatlan hossz. Mozdítsuk ki a testet, és vizsgáljuk meg a rá ható vízszintes visszatérítő erőt. A függőleges irányú erőket a pálya tartóereje kompenzálja.

Megoldás egyszerű geometriai megfontolásokkal

Térítsük ki a testet egy kicsiny x mértékben, jobbra. Számítsuk ki először a rugó megnyúlását. Ehhez



egy kicsiny körívet húzzunk egy kis körívet L_0 sugárral, aminek a középpontja a rugó felfüggesztési pontja. ez kimetsz a megnyúlt rugóból egy L_0 hosszú darabot, a maradék a megnyúlás. Egy ilyen kis körív azonban jól közelíthető egy egyenessel, így létrejön egy derékszögű háromszög, melyből:

$$\Delta L = x\cos(\alpha-\Delta\alpha) \approx x\cos(\alpha)\ . \tag{42}$$

Az utolsó közelítésben kihasználtuk, hogy $\Delta\alpha$ kicsi, azaz x-ben lineáris, és mivel kívül már volt egy x szorzó, így a koszinusz függvény lineáris korrekciója összességében már x^2 korrekciót jelentene, ami elhanyagolható.

A rugóerő vízszintes komponense:

$$F_{r,v} = -D\Delta L\cos(\alpha-\Delta\alpha) \approx -D\ x\ \cos(\alpha)^2 = -D\left(\frac{\sqrt{L_0^2-h^2}}{L_0}\right)^2 x = -D\frac{L_0^2-h^2}{L_0^2}x\ . \tag{43}$$

Azt kaptuk tehát, hogy az effektív rugóállandó:

$$D_{eff} = D\frac{L_0^2-h^2}{L_0^2}\ , \tag{44}$$

amiből a mozgásegyenlet az x kitérésre:

$$m\ddot{x} = -D_{eff}\ x\ , \tag{45}$$

Ezt már meg tudjuk oldani.

Az előző feladathoz hasonlóan közvetlen sorfejtéssel is célba érhetünk, de ez lényegesen több számolást igényel.

3. Csillapított és gerjesztett rezgések

3.1. Csillapított rezgések

Ideális rezgő rendszer a természetben csak nagyon egzotikus esetekben fordulhat elő. A megrezgetett test idővel megáll, mechanikai energiája hővé alakul. Bár elvileg tetszőleges súrlódási erő felléphetne, az egyszerűség kedvéért azokat a rendszereket szoktuk tekinteni, ahol egy, a sebességgel arányos fékezőerő lép fel. Egy ilyen rendszer mozgásegyenlete:

$$m\,\ddot{x} = -D\,x - k\dot{x}\ . \tag{46}$$

A sebességgel arányos súrlódási erő kifejezése $-k\dot{x}$. Osszuk le az egyenletet m-mel és rendezzünk mindenkit a baloldalra:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0 \tag{47}$$

Itt szokás bevezetni a következő paramétereket:

$$\alpha = \frac{k}{2m} \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{D}{m}\ . \tag{48}$$

Ha megnézzük a mértékegységeket, mind α, mind ω_0 mértékegysége $1/s$. A mozgásegyenlet alakja pedig a következő:

$$\ddot{x} + 2\alpha\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0\ . \tag{49}$$

Ezt az alakot használjuk a leggyakrabban.

Ez egy lineáris másodrendű homogén differenciálegyenlet. Lineáris, mert az $x(t)$ függvény és deriváltjai csak az első hatványon szerepelnek. Másodrendű, mert a legmagasabb derivált, ami megjelenik a második. Homogén, mert a jobboldalon zérus áll, azaz nincs külső gerjesztés. Az ilyen lineáris egyenleteket általában próbafüggvényes módszerrel oldjuk meg. Az általános, komplex megoldási módszert később áttekintjük, most vizsgáljuk az alábbi valós próbafüggvényt:

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi)\ . \tag{50}$$

Az A és φ a megoldás szabad paraméterei, az ω és β a rendszer paramétereitől függ, egyelőre még nem tudjuk mekkorák. Számítsuk ki ennek a deriváltjait:

$$\dot{x}(t) = -\beta Ae^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi) + \omega Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)\ , \tag{51}$$

$$\ddot{x}(t) = (\beta^2 - \omega^2)Ae^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi) - 2\omega\beta Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)\ . \tag{52}$$

Írjuk ezt be a (49) mozgásegyenletbe! A szinuszos és koszinuszos tagok összegyűjtése után:

$$\left(\beta^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - 2\alpha\beta\right) Ae^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi) + (2\alpha\omega - 2\omega\beta)\,Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi) = 0 \tag{53}$$

Most használnunk kell azt a tételt, hogy a sin() és cos() függvények lineárisan függetlenek, tehát csak akkor kaphatunk tetszőleges t-re zérust, ha az együtthatók külön-külön eltűnnek. Ebből a következő egyenleteket nyerjük:

$$\begin{aligned} 2\alpha\omega - 2\omega\beta &= 0 \\ \beta^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - 2\alpha\beta &= 0\ . \end{aligned} \tag{54}$$

Az első egyenletben tekintsünk el az $\omega = 0$ gyöktől, ez ugyanis azt jelentené, hogy a próbafüggvényünk egyszerű exponenciális, ezt pedig majd a komplex megoldásnál megvizsgáljuk részletesen. Ha $\omega \neq 0$, akkor leoszthatunk vele, és az első egyenletből:

$$\boxed{\beta = \alpha}\ . \tag{55}$$

Ezt behelyettesítve a másik egyenletbe:

$$\omega_0^2 - \omega^2 - \alpha^2 = 0\ , \tag{56}$$

ebből:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}\ . \tag{57}$$

Megtaláltuk tehát a (49) mozgásegyenlet általános valós megoldását:

$$\boxed{x(t) = Ae^{-\alpha t}\sin(\omega t + \varphi) \quad , \text{ahol} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}\ . \tag{58}$$

A feladatok jelentős részének megoldásához elegendő megjegyezni a (49) mozgásegyenlet fenti alakját és az (58) általános megoldást. A komplex formalizmus megkönnyíti majd ezen megoldás levezetését, de ha pl. egy ZH-n gyorsan kell számolni, érdemes arra az alkalomra inkább megjegyezni ezt az általános végeredményt.

3.1.1. Az általános megoldás illesztése kezdeti feltételekhez

Tegyük fel, hogy ismerjük a kezdeti x_0 kitérést, és v_0 sebességet. Ekkor a következő egyenleteket kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0) = A\sin(\varphi) \\ v_0 &= \dot{x}(0) = -\alpha A\sin(\varphi) + \omega A\cos(\varphi) \end{aligned} \tag{59}$$

Az elsőből kifejezve A-t és beírva a másodikba ($A = x_0/\sin(\varphi)$)

$$v_0 = -\alpha x_0 + x_0\frac{\omega}{\tan(\varphi)}\ . \tag{60}$$

Ebből:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{x_0\omega}{v_0 + x_0\alpha}\right)\ . \tag{61}$$

Ezt kiszámítva, az amplitudó:

$$A = x_0/\sin(\varphi)\ . \tag{62}$$

3.2. Komplex számok, áttekintés

Mielőtt áttérünk a komplex számokat használó megoldásra, tekintsük át, mit tudunk a komplex számokról. Egy komplex szám algebrai alakja:

$$z = x + y\,i\ , \tag{63}$$

ahol x és y valós számok. Ha figyelembe vesszük, hogy $i^2 = -1$, akkor az ilyen számokkal ugyanúgy számolhatunk, mint a valósakkal, azaz:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= x_1 + y_1\,i + x_2 + y_2\,i = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)\ , \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + y_1\,i)(x_2 + y_2\,i) = x_1x_2 - y_1y_2 + i\,(x_1y_2 + y_1x_2)\ . \end{aligned} \tag{64}$$

A komplex számok számtestet alkotnak, ugyanis a szorzásnak az inverze, az osztás is elvégezhető közöttük (a nullával, azaz a $0 + 0\,i$ számmal nem lehet osztani itt sem.):

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + y_1\,i}{x_2 + y_2\,i} = \frac{(x_1 + y_1\,i)(x_2 - y_2\,i)}{(x_2 + y_2\,i)(x_2 - y_2\,i)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i\,(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\ . \end{aligned} \tag{65}$$

A síkbeli polárkoordinátarendszer analógiájára szokás bevezetni a komplex számok trigonometrikus alakját. Ehhez szükség van a komplex szám abszolútértékére:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ . \tag{66}$$

Ennek segítségével a komplex szám trigonometrikus alakja:

$$z = x + y\,i = r\cos(\varphi) + i\,r\sin(\varphi) = r\,(\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi))\ . \tag{67}$$

Szokásos még egy harmadik alak is, és ez gyakran a legkényelmesebb: az exponenciális alak:

$$z = r\, e^{i\,\varphi}\,. \tag{68}$$

Ahhoz, hogy ezt megértsük, lássuk be az Euler-összefüggést:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi) \tag{69}$$

Ezt az összefüggést sokféle módon be lehet látni. Itt most Taylor-polinommal látjuk be. Az exponenciális függvény Taylor-sora:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \ldots\,, \tag{70}$$

A szinuszfüggvény Taylor-sora:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots\,, \tag{71}$$

A koszinuszfüggvény Taylor-sora pedig:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(-1)^n x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots\,. \tag{72}$$

Írjuk fel most $e^{i\varphi}$ Taylor sorát, az e^x sorában x helyére $i\varphi$-t helyettesítve:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n x^n = 1 + i\,x - \frac{x^2}{2} - i\,\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + i\,\frac{x^5}{120} + \ldots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots\right) = \cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)\,. \end{aligned} \tag{73}$$

Azt láttuk tehát, hogy $e^{i\varphi}$ sorában a valós részt és képzetes részt szétválasztva éppen megjelenik a sin() és cos() sora, így beláttuk az állítást.

Az exponenciális alak nagyon kényelmes, ha komplex számokat szeretnénk szorozni:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1}\; r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\,. \tag{74}$$

Azt kaptuk, hogy a komplex számok szorzásakor az abszolútértékük valós számként összeszorzódik, a komplex számok fázisait pedig össze kell adni.

Azért, hogy ennek a szorzási szabálynak a hasznosságát érezzük, bizonyítsuk be a szinusz és koszinusz függvények addíciós tételeit két sorban:

$$\begin{aligned} e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} &= e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} \\ \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1+\varphi_2) &= (\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)) \cdot (\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)) = \\ = (\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)) &+ i\,(\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2))\,. \end{aligned} \tag{75}$$

Megnézve a kapott kifejezés valós és képzetes részét, előttünk áll a $\cos(\varphi_1+\varphi_2)$ és $\sin(\varphi_1+\varphi_2)$ kifejezése.

Hasznos lehet továbbá az Euler-összefüggés megfordítása is:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad , \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{76}$$

Ezeket a kifejezéseket tekinthetjük akár a cos() és sin() függvény definíciójának, ez ízlés kérdése.

3.3. A csillapított rezgés problémájának megoldása komplex számok segítségével

Most már, hogy fel vagyunk vértezve a szükséges matematikai háttérrel, oldjuk meg a 49 mozgásegyenletet. Azért, hogy méginkább jelezzük, hogy a megoldás lehet komplex, a kitérés-idő függvényt jelöljük $z(t)$-vel!

$$\ddot{z} + 2\alpha\dot{z} + \omega_0^2 z = 0 \ . \tag{77}$$

A feladatot ismét próbafüggvényes módszerrel oldjuk meg, de a próbafüggvényünk most sokkal egyszerűbb:

$$z(t) = e^{\lambda t} \ . \tag{78}$$

A szabad paraméterek kérdésére később még visszatérünk. Írjuk be ezt próbafüggvényt a mozgásegyenletbe!

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\alpha\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \tag{79}$$

Láthatóan tudunk egyszerűsíteni $e^{\lambda t}$-vel, azaz megfelelő λ megválasztása esetén tetszőleges t időpontban teljesül az egyenlet. A λ-ra vonatkozó egyenlet:

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0 \ . \tag{80}$$

Ezt a másodfokú egyenletet megoldva, a következő gyököket kapjuk:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \tag{81}$$

Itt három lehetőség van:

- $\alpha > \omega_0$ (Túlcsillapított eset)
  Ekkor két valós gyöke van az egyenletnek, λ_1 és λ_2, azaz két megoldását kaptuk a mozgásegyenletnek: $e^{\lambda_1 t}$ és $e^{\lambda_2 t}$. Mivel a mozgásegyenlet lineáris, ezért ezen megoldások tetszőleges lineáris kombinációja is megoldás, tehát az általános megoldás:

  $$z(t) = A_1\, e^{\lambda_1 t} + A_2\, e^{\lambda_2 t} \ . \tag{82}$$

  Láthatóan megjelent a két szabad paraméter, ami tetszőleges kezdeti feltétel előírását lehetővé teszi.[1]

- $\alpha = \omega_0$ (Határcsillapítás)
  Ekkor csak egyetlen gyöke van az egyenletnek, a $\lambda = -\alpha$. Megmutatható, hogy ekkor a $te^{\lambda t}$ próbafüggvény is jó megoldás, azaz az általános megoldás:

  $$z(t) = A_1\, e^{\lambda t} + A_2\, te^{\lambda t} \ . \tag{83}$$

- $\alpha < \omega_0$ (Alulcsillapított eset)
  Ekkor a másodfokú egyenletet csak a komplex számok körében tudjuk megoldani:

  $$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \alpha \pm i\omega \ , \tag{84}$$

  ahol bevezettük az $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ jelölést. Ez azt jelzi számunkra, hogy a (komplex) egyenlet általános megoldása az alábbi alakú:

  $$z(t) = A_1\, e^{-\alpha t}\, e^{i\omega t} + A_2\, e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} \tag{85}$$

  Innen többféle módon eljuthatunk a valós probléma általános megoldásához. Az egyik lehetőség, hogy kirójuk a valós kezdeti feltételeket, és meghatározzuk a komplex A_1 és A_2 amplitudókat. Itt azonban most más utat járunk.[2]

[1] Akár komplex kezdeti feltételeket is kiróhatunk, bár ez nem gyakori.
[2] Ha valakit érdekel, Vankó Péter jegyzetében az előbbi módszer szerepel

A valós egyenlet általános megoldásában két valós szabad paraméter kell legyen, itt azonban két komplex szabad paraméterünk van, ami összesen négy valós paraméter. Ezekre csak akkor van szükségünk, ha tetszőleges komplex kezdeti feltételre meg szeretnénk oldani az egyenletet. Mi azonban valós kezdeti feltételekre szeretnénk csak megkapni a megoldást. Ekkor elég az egyik tagot használnunk, azaz:

$$z(t) = A_1 e^{-\alpha t} e^{i\omega t} \; . \tag{86}$$

Itt az A_1 egy komplex szám, amiben van két valós paraméter, ez elég is lesz nekünk. Írjuk fel A_1-et exponenciális alakban:

$$A_1 = A e^{i\varphi} \; . \tag{87}$$

Ebben a kifejezésben A és φ már valós számok. Ezzel a kifejezéssel a megoldásunk a következő alakú:

$$z(t) = A e^{i\varphi} e^{-\alpha t} e^{i\omega t} = A e^{-\alpha t} e^{i(\omega t + \varphi)} \; . \tag{88}$$

Egyelőre még mindig bajban vagyunk, mert ez a függvény nem valós. Most azonban kihasználhatjuk, hogy a mozgásegyenletünk lineáris, és a benne szereplő α és ω_0 paraméterek valósak. Ezért a mozgásegyenletbe behelyettesítve a $z(t) = x(t) + i\, y(t)$ kifejezést a következőt nyerjük:

$$\left(\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x\right) + i\left(\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega_0^2 y\right) = 0 \; . \tag{89}$$

Vegyük észre, hogy a zárójelekben valós kifejezések állnak. Az egyenlet csak úgy teljesülhet, ha külön x-re, és y-ra teljesül. Mivel azonban $x = Re(z)$, ezért azt kaptuk, hogy a $z(t)$ függvény valós része jó megoldás:

$$x(t) = Re\; z(t) = Re\; A e^{-\alpha t} e^{i(\omega t + \varphi)} = A e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi) \; . \tag{90}$$

Az utolsó lépésben kihasználtuk az Euler-formulát. Megkaptuk tehát a valós általános megoldást, annyi a különbség az (58) kifejezéshez képest, hogy sin() helyett cos() függvény jelent meg. Ezen könnyen változtathatunk, ha bevezetjük a $\tilde{\varphi} = \varphi + \pi/2$ fázisszöget. Ezzel:

$$x(t) = A e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi) = A e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi + \pi/2) = A e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \tilde{\varphi}) \; . \tag{91}$$

Láthatóan megjelent a két szabad paraméter, azaz ez a valós egyenlet teljes általános megoldása.

3.4. Szinuszosan gerjesztett rezgések

Tekintsük egy csillapított oszcillátort, melyre kívülről időben szinuszos gerjesztést kapcsolunk:

$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} + F_0 \cos(\omega t) \tag{92}$$

Átrendezve az egyenletet, és a korábban már bevezetett α és ω_0 paraméterek mellett bevezetve az $f_0 = \frac{F_0}{m}$ paramétert, az egyenlet a következő alakú:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t) \; . \tag{93}$$

Az ilyen egyenlet hosszútávú, ún. állandósult megoldását az alábbi alakban várjuk:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \; . \tag{94}$$

Azaz az indítás után sok idővel a tömegpont a gerjesztő frekvenciával fog rezegni, ahhoz képest φ fáziseltéréssel.

A csillapított esetben láttuk, milyen gyümölcsöző lehet komplex számokat használni. Tegyük ezt itt is! Láttuk, hogy egy $z(t)$ komplex megoldás valós és képzetes része külön-külön is jó megoldás. Változtassuk meg a gerjesztést!

$$f_0 \cos(\omega t) \Rightarrow f_0 e^{i\omega t} = f_0 \cos(\omega t) + i f_0 \sin(\omega t) \tag{95}$$

Láthatóan a megváltoztatott gerjesztés valós része ugyanaz, mint eredetileg, csak megjelent mellette egy képzetes rész is. Mivel azonban a mozgásegyenlet komplex megoldásának a valós és képzetes része külön életet él, ezért megoldva az egyenletet a módosított gerjesztéssel, majd véve a megoldás valós részét, megkapjuk az $f_0 \cos(\omega t)$ gerjesztéssel várt megoldást.

Tekintsük tehát a következő egyenletet:

$$\ddot{z} + 2\alpha\dot{z} + \omega_0^2 z = f_0 e^{i\omega t} \ . \tag{96}$$

Ezt megoldva, majd véve a megoldás valós részét, megkapjuk az eredeti problémánk megoldását.

Keressük az állandósult megoldást a következő alakban:

$$z(t) = A_c e^{i\omega t} \ , \tag{97}$$

ahol A_c egy komplex amplitudó: $A_c = Ae^{i\varphi}$. Írjuk be ezt a próbafüggvényt az egyenletbe:

$$-\omega^2 A_c e^{i\omega t} + 2i\omega\alpha A_c e^{i\omega t} + \omega_0^2 A_c e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t} \ . \tag{98}$$

Ismét azt látjuk, hogy tudunk egyszerűsíteni $e^{i\omega t}$-vel, azaz ha jól választjuk meg A_c értéket, akkor az egyenlet minden időpontban teljesül. Az A_c-re vonatkozó egyenlet:

$$-\omega^2 A_c + 2i\omega\alpha A_c + \omega_0^2 A_c = f_0 \ . \tag{99}$$

Ebből kifejezve A_c-t:

$$A_c = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\alpha} \ , \tag{100}$$

ennek abszolútértéke:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\alpha^2}} \ , \tag{101}$$

fázisszöge pedig:

$$\varphi = arg(A_c) = -\text{arccot}\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega\alpha}\right) \ . \tag{102}$$

A gerjesztett egyenlet komplex megoldása tehát, ezekkel a paraméterekkel az alábbi alakba írható:

$$z(t) = Ae^{i\varphi}e^{i\omega t} \tag{103}$$

Ennek valós része az eredeti probléma megoldása:

$$x(t) = Re\ z(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{104}$$