Egyenletesen gyorsuló tömegpont világvonala

Az x tengely mentén, $+x$ irányban gyorsuló tömegpontról van szó. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a tömegpont az origóból indul [$x(t = 0) = 0$], 0 kezdősebességgel [$u(t = 0) = 0$].

I. A newtoni mechanika szerint

A konstans a' gyorsulással mozgó tömegpont helyzet-idő függvénye:

$$x(t) = \frac{a'}{2} t^2 . \tag{1}$$

A világvonal tehát az (x,t) grafikonon (azaz a téridő-diagramon) egy *parabola*.

Rögtön adódik a probléma: a világvonal dx/dt meredeksége a tömegpont sebességét adja. A parabola meredeksége viszont tart a végtelenhez, ha $t \to \infty$. Tapasztalataink szerint egy tömegpont sebessége nem haladhatja meg, vagy érheti el a fénysebességet. A newtoni számításból kapott (1) képlet tehát legfeljebb kis t-kre adhat pontos eredményt, nagy t-kre mindenképpen ellentmond a tapasztalatnak.

II. A relativisztikus mechanika szerint

A speciális relativitáselméletbeli kinematika a világvonal *pontos* alakját rajzolja meg nagy sebességekre (esetünkben nagy t időkre) is. Végezzük el a számolást, majd hasonlítsuk össze a kapott pontos eredményt a közelítő (1) képlettel.

A tömegpont jobbra mozog állandó gyorsulással, és egy adott t időpillanatban éppen u a sebessége. Először is tisztázzuk, hogy
1. az u sebesség az álló vonatkoztatási rendszerben mérve értendő (nevezzük ezt a rendszert S-nek),
2. az "állandó gyorsulás"-t viszont *nem* érthetjük S-ben mért gyorsulásként: ha ott a gyorsulás (du/dt) állandó volna, akkor a tömegpont előbb-utóbb mindenképpen átlépné a fénysebességet! Ennek elkerülésére nem elég az, hogy az S-beli gyorsulás fokozatosan csökkenjen, hanem ennél szigorúbb követelménynek is teljesülnie kell: annak, hogy az S-beli du/dt gyorsulás 0-hoz tart! (Ezt később ellenőrizni fogjuk, és igaznak is találjuk.)
Tehát amikor "állandó gyorsulás"-ról beszélünk, ezt úgy értjük, hogy a tömegpont mindig ugyanazt a gyorsulást *érzi*. Ez azt jelenti, hogy egy adott időpillanatban a tömegponttal éppen együtt mozgó, ún. *pillanatnyi nyugalmi rendszerben* (nevezzük ezt S'-nek) mért a' gyorsulás (= du'/dt') az, ami egy konstans szám. Ahogy a tömegpont folyamatosan újabb és újabb (egyre gyorsabb) ilyen pillanatnyi nyugalmi rendszerekre "ugrik át", minden ilyen rendszerbeli megfigyelő ugyanazzal az a' gyorsulással méri "megindulni".

Tekintsünk egy bizonyos időpillanatot, amikor éppen S' a tömegpont pillanatnyi nyugalmi rendszere. S és S' között a lineáris Lorentz-transzformáció adja meg a kapcsolatot, amelynek a differenciálokra felírt alakja:

$$dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2}$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3}$$

ahol v az S és S' rendszerek relatív sebessége.

(2)-t és (3)-at osztva kapjuk a sebességtranszformációs összefüggést:

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \tag{4}$$

Az S-ben, ill. S'-ben mért *gyorsulások* kiszámításához a sebesség idő szerinti *differenciál*hányadosára van szükség. Vegyük tehát a (4) kifejezés differenciálját (konstans v és c mellett):

$$du = \frac{du'\left(1 + \frac{u'v}{c^2}\right) - (u' + v)\frac{v}{c^2} du'}{\left(1 + \frac{u'v}{c^2}\right)^2} = \frac{du'\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{u'v}{c^2}\right)^2} \tag{5}$$

A (4) és (5) képletek általános összefüggést adtak arra, hogy
(a) ha az S' rendszerben egy tömegpont valamilyen (x-irányú) u' sebességgel mozog, akkor ez mekkora u sebességnek mérődik S-ből nézve,
(b) mi a sebesség*növekmények* közötti összefüggés a két rendszerből mérve.

Az általunk tárgyalt eset speciális, hiszen az S' rendszer a tömegpont pillanatnyi *nyugalmi* rendszere, azaz $u' = 0$ (és emiatt $u = v$). Amikor tehát a tömegpont gyorsulását írjuk fel az S-ből mérve, a teendő, hogy az (5) és (3) egyenleteket elosztjuk egymással, és az így kapott differenciálhányadost $u' = 0$ érték mellett nézzük:

$$a = \left(\frac{du}{dt}\right)_{u'=0} = \frac{du'\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{\frac{du'}{dt'}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\frac{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{a'\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\frac{1 + \frac{v}{c^2} u'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} = a'\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} \tag{6}$$

Amint feljebb megállapítottuk, az "állandó gyorsulás" kifejezés jelentése, hogy a' *állandó*:

$$a' = \frac{du'}{dt'} = konst \tag{7}$$

[(6)-ból látható, hogy − amint a tömegpont egyre nagyobb v sebességgel mozgó pillanatnyi nyugalmi rendszerekre "ugrik át" − az S rendszerben mért gyorsulása *nem állandó*, hanem egyre kisebb, és végül 0-hoz tart, ahogy azt vártuk is.]

Az S' pillanatnyi nyugalmi rendszer, tehát $u = v$, és (6) átírható a következő alakra:

$$\frac{du}{dt} = a'\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2} \tag{8}$$

A (8) differenciálegyenletet integrálással oldjuk meg:

$$\int \frac{du}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} = a't\,, \tag{9}$$

amelyből a tömegpont sebességének időfüggésére kapjuk:

$$\frac{u(t)}{\left(1 - \frac{u(t)^2}{c^2}\right)^{1/2}} = a't + K \tag{10}$$

A K konstans értékét abból a kezdőfeltételből állapítjuk meg, hogy $t = 0$-ban az $u(t = 0)$ kezdősebesség legyen 0. Ebből $K = 0$.

A (10) egyenletet $u(t)$-re megoldva:

$$u(t) = a't\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{a'^2 t^2}{c^2}}}\,. \tag{11}$$

A (11) képletet összevetve a newtoni kinematikából ismert $u(t) = a't$ képlettel azt mondhatjuk, hogy a (11)-ben szereplő négyzetgyökös tényező a relativisztikus korrekciót adja meg.

A (11) képletből látható, hogy − ahogy vártuk − az állandó "sajátgyorsulással" mozgó tömegpont S-ben mért sebessége *nem* végtelenhez tart, ha $t \to \infty$. A sebesség határértéke, ahogy sejtjük, a fénysebesség:

$$\lim_{t\to\infty}\left(a't\sqrt{\frac{1}{1+\frac{a'^2t^2}{c^2}}}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{a'^2t^2}+\frac{1}{c^2}}}\right)=c\,. \qquad (12)$$

A (11)-ben szereplő *u*-t *dx/dt*-ként felírva

$$\frac{dx}{dt}=a't\sqrt{\frac{1}{1+\frac{a'^2t^2}{c^2}}} \qquad (13)$$

A (13) differenciálegyenletet integrálva kapjuk:

$$x(t)=x_0+\int a't\sqrt{\frac{1}{1+\frac{a'^2t^2}{c^2}}}dt=x_0+\frac{1}{a'}\sqrt{c^2\left(a'^2t^2+c^2\right)} \qquad (14)$$

Az x_0 integrálási konstansot abból a kezdőfeltételből határozzuk meg, hogy $x(t=0)=0$. Eszerint $x_0=-\frac{c^2}{a'}$, és *a tömegpont világvonalának egyenlete*:

$$x(t)=-\frac{c^2}{a'}+\frac{1}{a'}\sqrt{c^2\left(a'^2t^2+c^2\right)} \qquad (15)$$

A (15) pontos, relativisztikus képlet tehát az (1) newtoni közelítő képlet általánosítása. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy kis *u* sebességekre − ez esetünkben az indulástól számított kis *t* időknek felel meg − a két világvonal jó közelítéssel azonos:

$$\begin{aligned}x(t)&=-\frac{c^2}{a'}+\frac{1}{a'}\sqrt{c^2\left(a'^2t^2+c^2\right)}=\\&=-\frac{c^2}{a'}+\frac{c^2}{a'}\sqrt{1+\frac{a'^2t^2}{c^2}}=-\frac{c^2}{a'}+\frac{c^2}{a'}\left(1+\frac{a'^2t^2}{2c^2}+\ldots\right)\approx\frac{a'}{2}t^2\end{aligned} \qquad (16)$$

A newtoni számolásból kapott világvonal a téridő-diagramon ábrázolva parabola. De vajon milyen görbét ír le a pontos, relativisztikus számolásból kapott (15) képlet? A választ könnyű látni, ha (15)-et átalakítjuk:

$$\frac{\left(x+c^2/a'\right)^2}{c^4/a'^2}-\frac{t^2}{c^2/a'^2}=1 \qquad (17)$$

Amint láthatjuk tehát, a világvonalat meglepő (?) módon parabola helyett egy másik kúpszelet, *hiperbola* ábrázolja a téridő-diagramon.

Az alábbi ábra ezt szemlélteti. Vízsz. tengely: x, függ. tengely: ct, a newtoni világvonal a piros görbe, a relativisztikus számolásból adódó pedig a kék görbe.