Bevezetés a modern fizika fejezeteibe

1. (b)

Rugalmas hullámok

Utolsó módosítás: 2012. szeptember 28.

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Síkhullámok végtelen kiterjedésű, szilárd izotróp közegekben (1)

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (2\mu + \lambda_L) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

longitudinális hullám

$$\varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

transzverzális hullám

$$\varrho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

transzverzális hullám

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Síkhullámok végtelen kiterjedésű, szilárd izotróp közegekben (2)

Két új együttható bevezetésével

$$c_1^2 = \frac{2\mu + \lambda_L}{\varrho}$$

$$c_2^2 = \frac{\mu}{\varrho}$$

alakilag egyforma egyenleteket kapunk! →

A hullámegyenlet általános alakja

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

vagy

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Térbeli problémák esetén:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) = c^2 \Delta\psi$$

Laplace-operátor:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

A hullámegyenlet általános megoldásai

$$\psi(x,t) = f(t - \frac{x}{c})$$

vagy

$$\psi(x,t) = f(t + \frac{x}{c})$$

Az f tetszőleges függvény!

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A hullámegyenlet megoldásának fizikai jelentése – síkhullámok (1)

A t_1 időben az x_1 helyen keltett zavarra érvényes:

$$f\left(t_1 - \frac{x_1}{c}\right)$$

Ez a zavar az x_2 helyen

$$t' = \frac{x_2 - x_1}{c}$$

idővel később jelenik meg, azaz a $t_2 = t_1 + t'$ időben.

A hullámegyenlet megoldásának fizikai jelentése – síkhullámok (2)

Az

$$f\left(t_2-\frac{x_2}{c}\right)=f\left(t_1+\frac{x_2-x_1}{c}-\frac{x_2}{c}\right)$$
$$=f\left(t_1-\frac{x_1}{c}\right)$$

összefüggés miatt egy „+" (növekvő x) irányban terjedő hullám. Az

$$f\left(t+\frac{x}{c}\right)$$

megoldás pedig egy „–" (csökkenő x) irányba terjedő hullám.

Harmonikus hullám

A harmonikus vagy szinuszos síkhullám, amely térben és időben egyaránt periodikus:

$$\psi(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \delta\right]$$

A: amplitúdó

ω: körfrekvencia

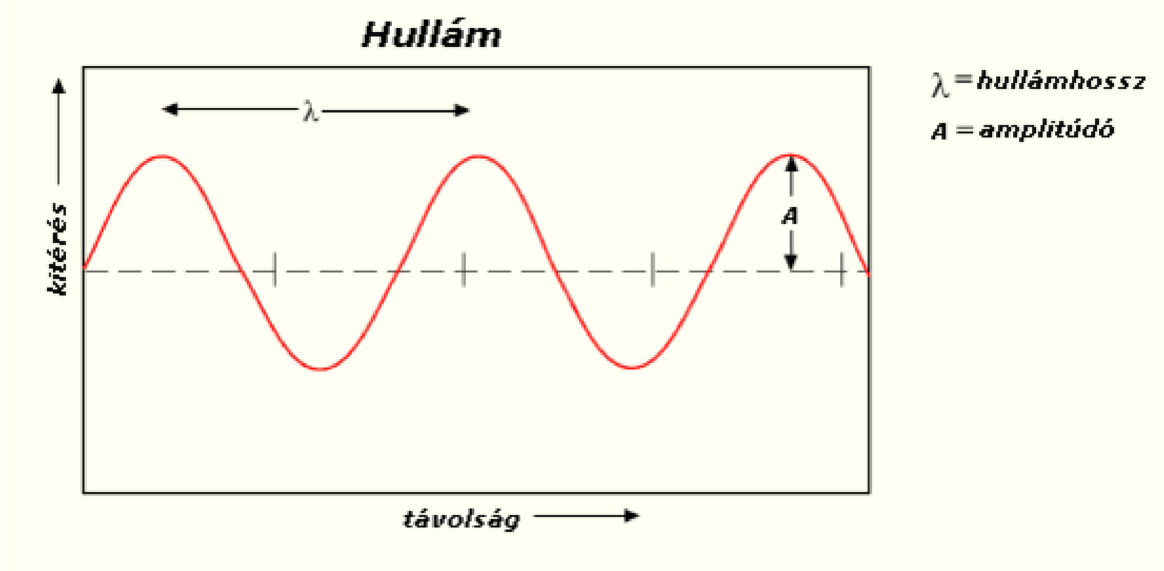
c: terjedési sebesség

δ: kezdő fázis

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Hullámtani alapfogalmak

Hullámforrás: ahol a rezgés kialakul. A hullámforrás rezgését a környező tér részecskéi átveszik, de késve követik azt → fáziskésés.
A mechanikai hullámokkal energia és impulzus terjed tovább.



fázis: a hullám adott pontjának mozgásállapota (Síkhullámoknál hullámfrontot, térbeli hullámoknál hullámfelületet alkotnak az azonos fázisú pontok.)
hullámhossz (λ): az egymás melletti azonos fázisú pontok távolsága
a hullám terjedési sebessége (c): a rezgés fázisának terjedési sebessége, nem egyezik meg a hullámban mozgó részecskék sebességével a hullámforrás rezgésének periódusideje alatt a hullám egy hullámhossznyi távolságot tesz meg

A hullámtani mennyiségek közötti fontos matematikai összefüggések

c: terjedési sebesség
λ : hullámhossz
T: periódus idő
f vagy   : frekvencia
ω: körfrekvencia
k: hullámszám

$$\lambda = cT$$

$$f = \nu = \frac{1}{T}$$

$$c = \lambda\nu$$

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

$$k = \frac{1}{\lambda}$$

A hullámok terjedési sebessége a mérhető fizikai mennyiségekkel kifejezve

A longitudinális hullám sebessége:

$$c_{long} = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda_L}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\nu_P)}{\rho(1+\nu_P)(1-2\nu_P)}}$$

A transzverzális hullám sebessége:

$$c_{transzv} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu_P)}}$$

Itt a μ és λ_L a két Lamé-állandó, E a Young-modulus, ν_P a Poisson szám!

http://www.vilaglex.hu/Lexikon/Html/Hullam.htm

Rugalmas hullámok sebessége vasban (1)

sűrűség:

$$\rho = 7850\ kg/m^3$$

Young-modulus:

$$E = 2 \times 10^{11}\ Pa$$

Poisson-szám:

$$\nu_P = 0{,}29$$

longitudinális sebesség:

$$c_{long} = 5800\ m/s$$

transzverzális sebesség:

$$c_{transzv} = 3150\ m/s$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Rugalmas hullámok sebessége vasban (2)

Ha a haránt irányú kontrakció elhanyagolható ($\nu_P = 0$), akkor

$$c_{long} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

A vas esetében:

$$c_{long} = 5050\ m/s$$

Kisebb mint a transzverzális hullámok jelenléte esetén!

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Hullámok térben → gömbhullámok (1)

A Laplace-operátor alakja 3D-ben gömbszimmetrikus esetre szorítkozva:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)$$

Ezzel a hullámegyenlet:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\psi) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)$$

http://www.walter-fendt.de/ph14hu/dopplereff_hu.htm

Hullámok térben → gömbhullámok (2)

Ennek megoldása:

$$\psi(r,t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

„kifutó" hullám

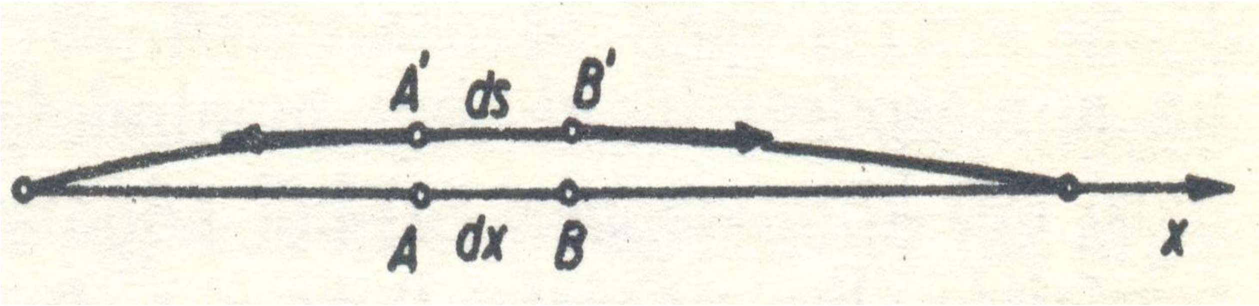
$$\psi(r,t) = \frac{1}{r} f\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

„befutó" hullám

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A húr rezgése

Az F erővel feszített q keresztmetszetű húr kezdetben az x tengelyre rásimulva nyugalomban van. Tekintsünk két egymáshoz közeli pontot a húron:



$$A(x, 0{,}0) \qquad B(x + dx, 0{,}0)$$

A húrt megfeszítve a pontok elmozdulnak:

$$A'(x + \xi, \eta, \zeta)$$

$$B'\left(x + dx + \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx, \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx, \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx\right)$$

A húr longitudinális rezgése (1)

A megnyúlt húrdarab hossza:

$$ds \approx (1 + \frac{\partial \xi}{\partial x})dx$$

A relatív megnyúlás:

$$\frac{ds - dx}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Ezért az A' helyen ébred egy F' erő a „-” irányban a megnyúlásnak megfelelően:

$$F' = Eq\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

A húr longitudinális rezgése (2)

A B’ pontban ébredő F” erő „+” irányban:

$$F'' = Eq\frac{\partial \xi}{\partial x} + Eq\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}dx$$

A két erő eredője dF = F”-F’, amely *a* gyorsulással mozgatja a dm tömegű húrdarabot. (Newton II. axiómája!)

$$a = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$dm = \rho q dx$$

A húr longitudinális rezgése (3)

Ekkor a húr x irányú (hosszanti) elmozdulásának mozgásegyenlete egy hullámegyenlet. A kialakuló hullám longitudinális.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Az egyenletből a hullám terjedése közvetlenül leolvasható:

$$c_{long} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Ezt összevethetjük egy korábbi eredménnyel!

A húr transzverzális rezgése

Hasonló meggondolásokkal a haránt irányú rezgések is leszármaztathatók. A kapott hullámegyenletek és a terjedési sebesség:

y irányú kitérésre

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

z irányú kitérésre

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

Itt σ a húrbeli feszültség:

$$\sigma = \frac{F}{q}$$

$$c_{transzv} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

Hullámok szuperpozíciója

A szuperpozíció elve: Lineáris rendszerekre megfogalmazható általános elv, amely a hullámok esetén azt mondja ki, hogy egy adott pontban a kölcsönható hullámok kitéréseinek algebrai összege eredményezi az eredő hullám kitérését.

Pl. az y_1 és y_2 harmonikus hullámok esetére:

$$y_1 = A_1 \sin\left(\omega_1 t - k_1 x_0 + \delta_1\right)$$

$$y_2 = A_2 \sin\left(\omega_2 t - k_2 x_0 + \delta_2\right)$$

Az eredő hullám az adott pontban:

$$y = y_1 + y_2$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Interferencia

Definíció:

Interferencia: Olyan hullámtani jelenség, amely akkor következik be, ha két különböző forrású koherens hullám találkozik. A találkozó rezgések fázisától függően a hullámok szuperpozíciójának eredménye lehet erősítés vagy gyengítés, esetleg teljes kioltás attól függően, hogy a hullámok azonos vagy ellentétes fázisban találkoznak.

Definíció:

Koherencia: hullámok közötti viszony. Két azonos frekvenciájú hullám akkor mondható koherensnek (összetartozónak), ha fáziskülönbségük egy adott helyen időben állandó.

Ha két koherens hullám találkozásáról beszélünk , akkor a hullámok olyanok, amelyek fáziskülönbsége állandó. Következésképp csak az azonos frekvenciájú hullámok képesek interferenciára.

http://www.walter-fendt.de/ph14hu/interference_hu.htm

ÁLLÓHULLÁM

Definíció:

Az állóhullámok egymással szemben haladó egyenlő amplitúdójú, frekvenciájú és polaritású hullámok interferenciája esetén fellépő jelenség.

A kialakult állóhullám két alapvető jellegzetessége kísérletileg is megfigyelhető. http://www.walter-fendt.de/ph14hu/stwaverefl_hu.htm

Az egyik az, hogy pl. a rezgő test különböző részei nem egymás után, hanem egyszerre végzik *rezgésüket.*

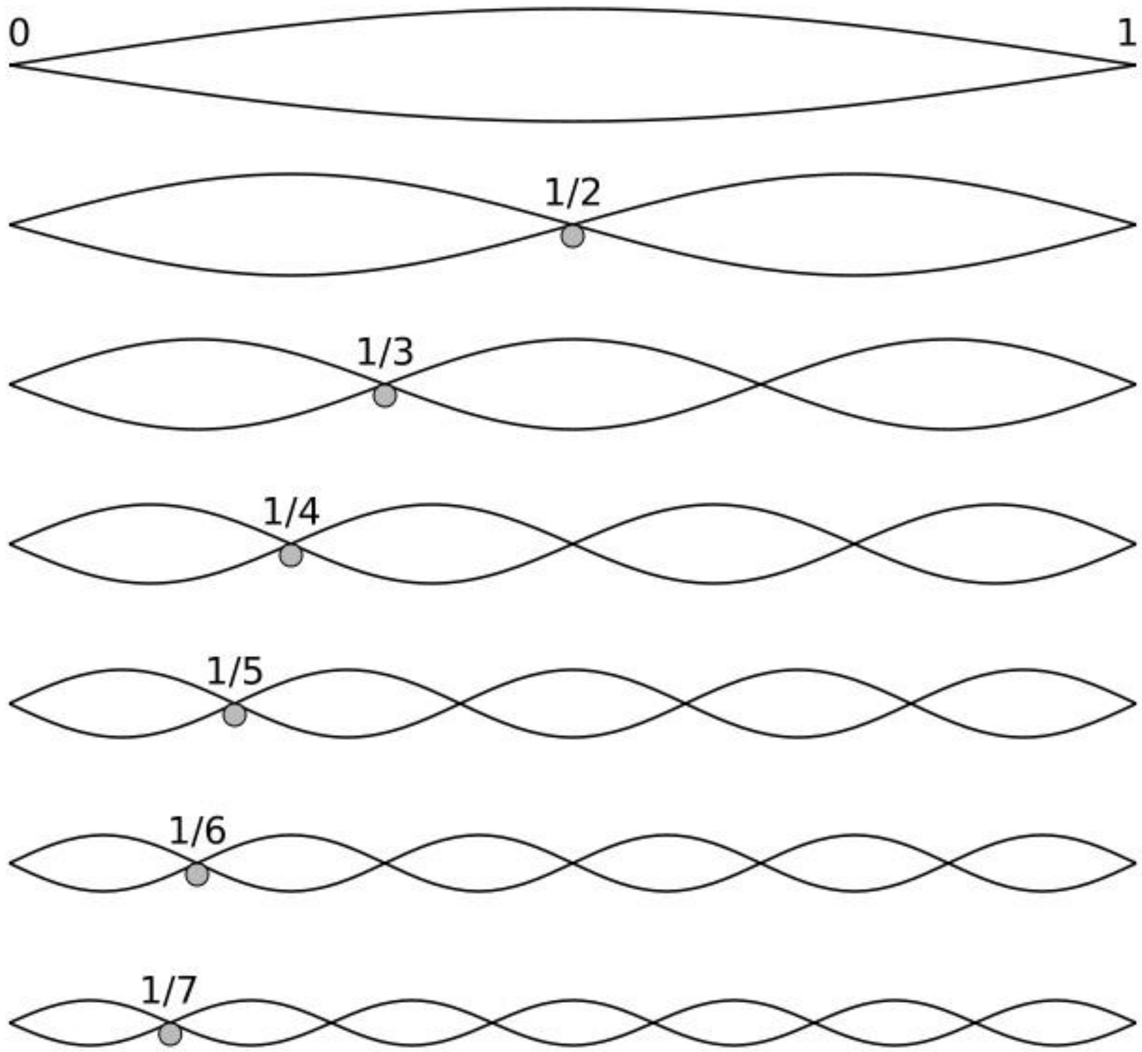
A másik jellegzetesség az amplitúdó-eloszlásnál figyelhető meg. Bizonyos pontok nyugalomban vannak (ezek a *csomópontok), ill. elektromágneses hullámok esetén a csomópontokban zérus az elektromágneses* tér, mások pedig maximális kitéréssel végzik rezgésüket (ezek a *duzzadási helyek).*

*(*Pl. egy nagyobb teljesítményű állóhullámú antenna csomópontjait akár meg is lehet fogni, de a duzzadási helyek érintése áramütéssel járhat, tehát életveszélyes.)

http://www.walter-fendt.de/ph14hu/stlwaves_hu.htm http://www.tests.hu/show/159/F-C-C

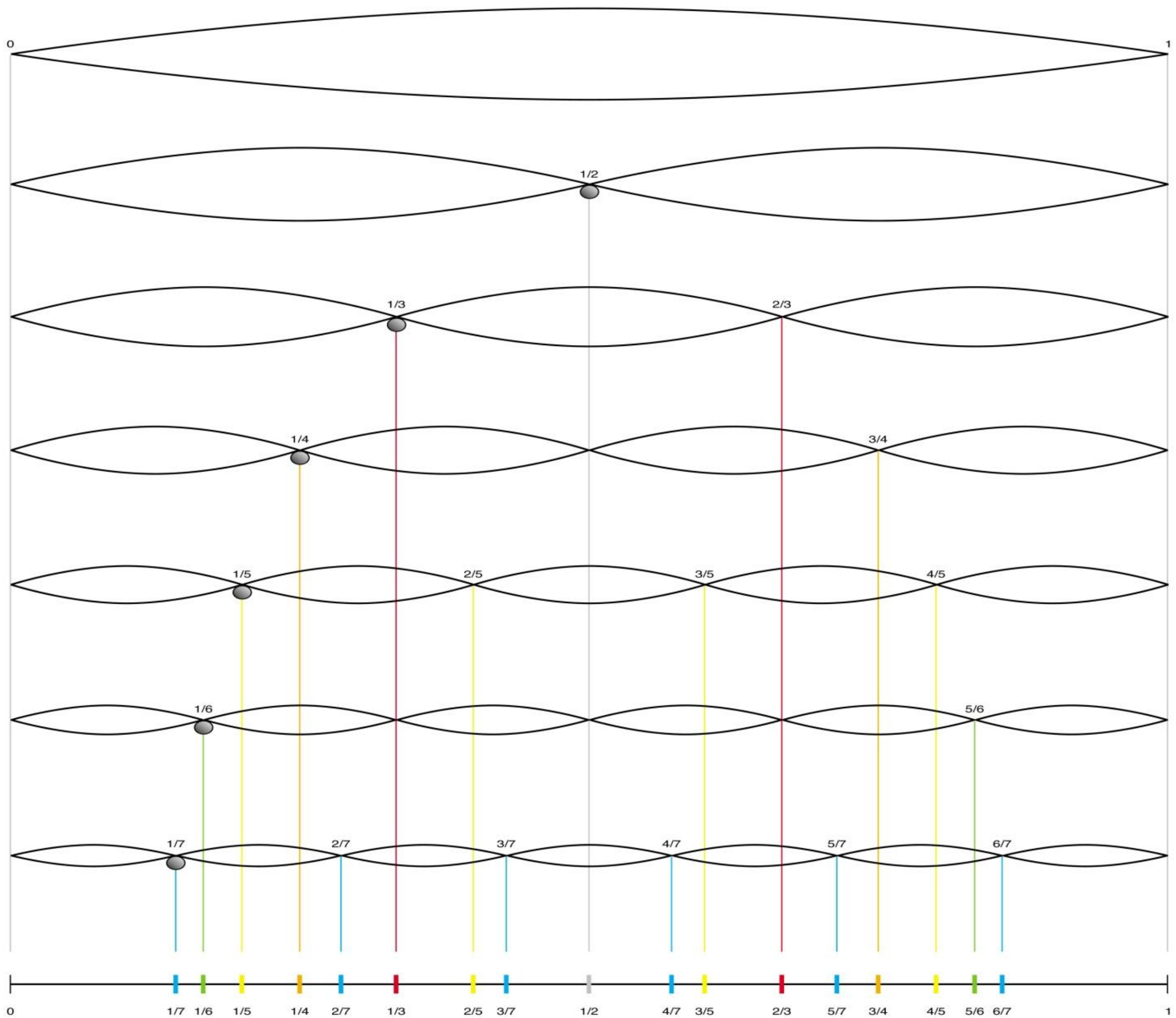
Állóhullámok rezgő húron (1)

Állóhullámok rezgő húron (2)



Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Állóhullámok rezgő húron (3)

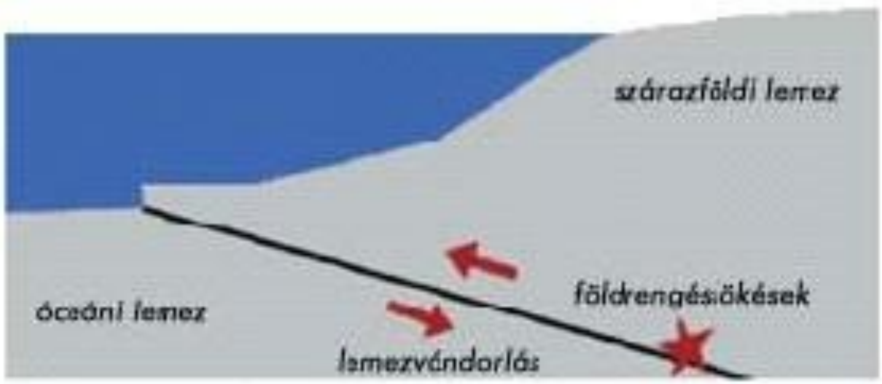


http://www.illyes-bors.sulinet.hu/uj/oktatas/tantargyak/Fizika/Fejezetek/Hullamtan/113-1/allohull.htm

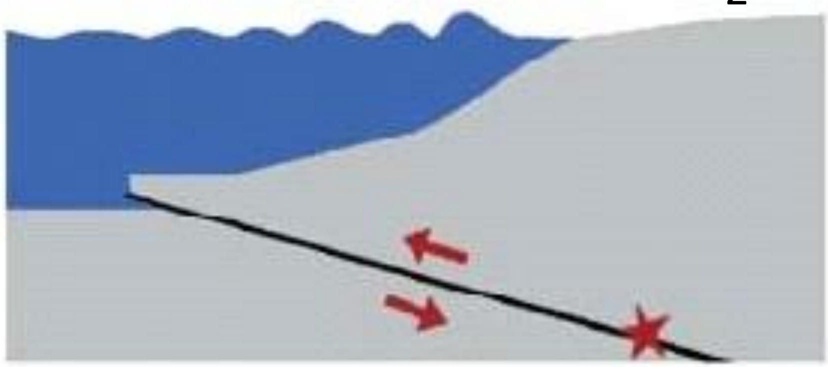
Szökőár

A szökőár (cunami) születése

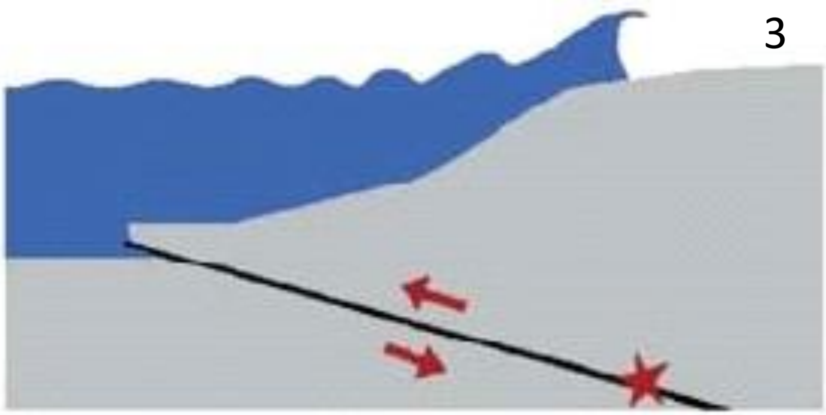
1



2



3



Óriáshullámok

Az óriáshullámok a nyílt (tengeri, óceáni) vizeken jelennek meg. Óriáshullámnak a 25 méternél magasabb hullámokat nevezik. Kialakulásukban a hullámok szuperpozíciója mindenképp fontos szerepet játszik. Elméleti számítások szerint maximális magasságuk 60 méter körül lehet. A megfigyelt óriáshullámok átlagosan 30 méter magasak voltak.

Fourier-soros vagy Bernoulli-féle megoldás (1)

Feladat:

Egy húr fekszik az x=0 és x=l pontok között. A végpontok rögzítése mellett keressük a

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

hullámegyenlet megoldását, amikor már kialakultak az állóhullámok.

Fourier-soros vagy Bernoulli-féle megoldás (2)

Keressük a megoldást $\psi(x,t) = U(x)V(t)$

alakban. A hullámegyenletbe történő behelyettesítés után az U és V függvények szeparálhatók:

$$\frac{U''}{U} = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{V}}{V}$$

Itt a *vessző* helyszerinti, a *pont* időszerinti deriváltat jelent.

A két oldal külön-külön ugyanazzal a konstanssal kell egyenlő legyen. A konstanst $-k^2$ –nek választva írható:

$$U'' = -k^2 U$$

$$\ddot{V} = -k^2 c^2 V$$

Harmonikus rezgőmozgás mozgásegyenletei!

Fourier-soros vagy Bernoulli-féle megoldás (3)

Megoldás az U-ra: $U(x) = A\,sin\,kx + B\cos kx$

A határfeltételeket figyelembe vételével:

$$k = k_n = n\frac{\pi}{l}$$

Megoldás az V-ra:

$$V(t) = C\sin kct + D\cos kct$$

$k_nct = 2\pi v_n t$ amivel $v_n = n\dfrac{c}{2l}$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A rezgő húron kialakuló állóhullámok lehetséges hullámhosszai

$$\lambda_n = \frac{c}{\nu_n} = \frac{2l}{n}$$

vagy

$$l = n\,\frac{\lambda_n}{2}$$

Azaz a húron csak a fél hullámhossz egész számú többszörösei jelenhetnek meg ! (lásd az „Állóhullámok rezgő húrokon” képeket)

Kérdések (1)

Mit állít Helmholtz tétele?
Mi a kontinuumok általános mozgásegyenlete (Cauchy-féle mozgásegyenlet). A mechanika mely axiómája van kiterjesztve e mozgásegyenletben? Milyen két nagy csoportra osztjuk az erőket e leírásban?
A kontinuumok általános mozgásegyenlete a feszültségeket (feszültség tenzort) tartalmazza. Milyen lépéseket kell tenni, hogy a mozgásegyenlet megoldható legyen? (→ a feszültségek helyett az elmozdulásokkal kapcsolatos deformáció tenzort kell bevezetni a leírásba)
Homogén izotróp test esetén hány rugalmassági állandóra van szükségünk a mozgás leírásához?
Mi a hullámegyenlet általános alakja?
Mi a hullámegyenlet általános megoldása síkhullámok és gömbhullámok esetén?

Kérdések (2)

Milyen hullámok terjedhetnek rugalmas kontinuumokban?
Mi a harmonikus hullám?
Mit mond ki a szuperpozíció elve?
Hogyan alakulnak ki az állóhullámok?
Milyen a visszavert hullám fázisa a beeső hulláméhoz képest szabad illetve rögzített vég esetén?
Mi a Fourier-soros (Bernoulli) megoldás alapgondolata és főbb lépései?

(folyt. köv.)

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék