

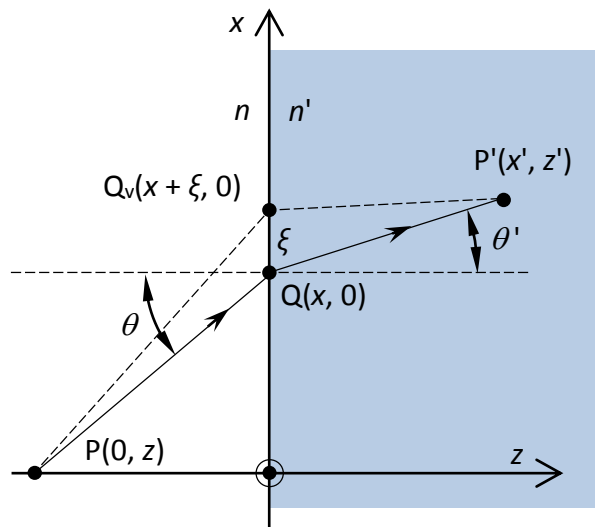
1. GYAKORLAT

Dr. Erdei Gábor, 2019-09-11

Bemelegítő kérdés: Hogyan hangzik a Fermat-elv az eredeti megfogalmazás szerint?

Fermat-elv működésének demonstrációja: törési törvény

Tudjuk, hogy homogén közegben egyenes vonal mentén terjed a fény, ezért csak ilyen lehetséges pályákat vizsgálunk. Q-val azt a pontot jelöljük, ahol a fénysugár valójában metszi a felületet.



$$OPL(PQ_vP') = n\sqrt{(x + \xi)^2 + z^2} + n'\sqrt{(x' - x - \xi)^2 + z'^2} \quad (1)$$

$$\frac{dOPL}{d\xi} = \frac{n}{2} \frac{2(x+\xi)}{\sqrt{(x+\xi)^2+z^2}} - \frac{n'}{2} \frac{2(x'-x-\xi)}{\sqrt{(x'-x-\xi)^2+z'^2}} = 0 \quad (2)$$

Ha $\xi = 0$

$$\frac{nx}{\sqrt{x^2+z^2}} = \frac{n'(x'-x)}{\sqrt{(x'-x)^2+z'^2}} \quad (3)$$

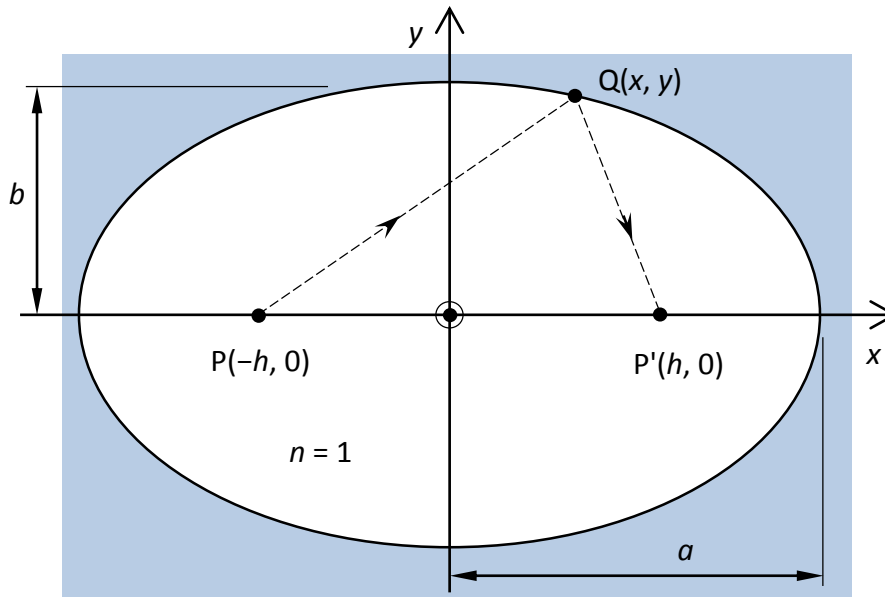
Trigonometriai összefüggések alapján:

$$\sin(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} \quad \text{és} \quad \sin(\theta') = \frac{x'-x}{\sqrt{(x'-x)^2+z'^2}} \quad (4)$$

Ezeket beírva (3)-ba:

$$n \cdot \sin(\theta) = n' \cdot \sin(\theta') . \quad (5)$$

Fermat-elv alkalmazása: leképezés ellipszoidtükrrel



A Fermat-elv értelmében az OPL egyenlő minden PQP' út mentén:

$$OPL(PQP') = n\sqrt{(x+h)^2 + y^2} + n\sqrt{(h-x)^2 + y^2} , \quad (6)$$

ahol legyen $n = 1$. Mivel minden út egyenlő, OPL értékét könnyen meghatározhatjuk a x -tengely mentén haladó fényterjedéssel:

$$OPL = (a+h) + (a-h) = 2a , \quad (7)$$

Vagyis (6)-ból ez lesz:

$$\sqrt{(x+h)^2 + y^2} + \sqrt{(h-x)^2 + y^2} = 2a , \quad (8)$$

Az y -tengelyen lévő Q pont esetén:

$$OPL = 2\sqrt{h^2 + b^2} = 2a \rightarrow b^2 = a^2 - h^2 \quad (9)$$

(8)-at átrendezve és négyzetreemelve:

$$(h-x)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+h)^2 + y^2} + ((x+h)^2 + y^2) , \quad (10)$$

$$a^2 + hx = a\sqrt{(x+h)^2 + y^2} , \quad (11)$$

$$a^4 + 2a^2hx + h^2x^2 = a^2(x+h)^2 + a^2y^2 , \quad (12)$$

$$a^4 + 2a^2hx + h^2x^2 = a^2x^2 + 2a^2hx + a^2h^2 + a^2y^2 , \quad (13)$$

$$a^4 + h^2x^2 = a^2x^2 + a^2h^2 + a^2y^2 , \quad (14)$$

$$a^2 + \frac{h^2x^2}{a^2} = x^2 + h^2 + y^2 , \quad (15)$$

Átrendezve és csoportosítva a tagokat:

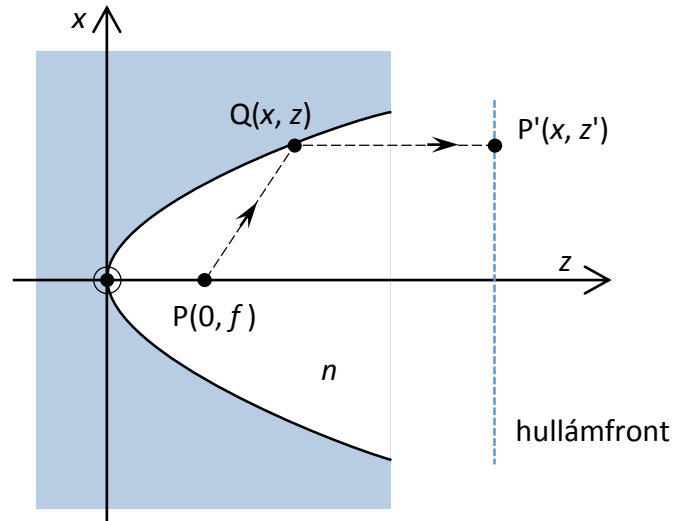
$$a^2 - h^2 = x^2 \frac{a^2 - h^2}{a^2} + y^2 , \quad (16)$$

(9) alapján valóban egy ellipszis egyenletét kapjuk:

$$b^2 = x^2 \frac{b^2}{a^2} + y^2 , \quad (17)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 . \quad (18)$$

Fermat-elv alkalmazása: leképezés paraboloidtükörrel



$$OPL(PQP') = n\sqrt{(z-f)^2 + x^2} + n(z'-z) , \quad (19)$$

Az egyszerűség kedvéért legyen $z' = f$ és $n = 1$. Ekkor

$$OPL = \sqrt{(z-f)^2 + x^2} + (f-z) , \quad (20)$$

Ha a z-tengely mentén vizsgáljuk a fénysugarat:

$$OPL = 2f , \quad (21)$$

Mivel minden optikai úthossz egyforma:

$$\sqrt{(z-f)^2 + x^2} + (f-z) = 2f , \quad (22)$$

$$(z-f)^2 + x^2 = (f+z)^2 , \quad (23)$$

$$z^2 - 2zf + f^2 + x^2 = f^2 + 2fz + z^2 , \quad (24)$$

$$x^2 = 4fz , \quad (25)$$

$$z = \frac{x^2}{4f} . \quad (26)$$

Gömbtükör paraxiális közelítésben

Origón áthaladó, R sugarú gömb felülete az x - z síkban:

$$x^2 + (z-R)^2 = R^2 \quad (27)$$

Paraxiális közelítésben, azaz ha $x \ll R$:

$$z = R \pm \sqrt{R^2 - x^2} = R - R\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \approx R - R\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{R}\right)^2\right) \quad (28)$$

R előjele akkor pozitív, amikor a középpontja pozitív irányban van eltolva a z-tengely mentén.

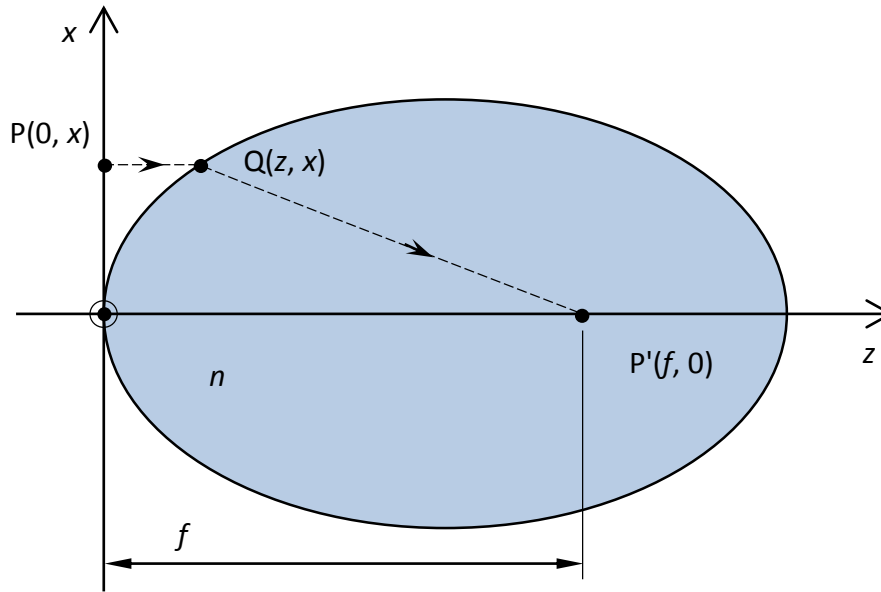
$$z \approx \frac{x^2}{2R} \quad (29)$$

Ezt összevetve (26)-al:

$$f = \frac{R}{2} . \quad (30)$$

Fermat-elv alkalmazása: leképezés ellipszoidlencsével

A PQ szakasz párhuzamos a z-tengellyel (optikai tengely).



Vizsgáljuk meg az optikai úthosszat az x-y síkban elhelyezkedő síkhullámfronthoz képes:

$$OPL(PQP') = z + n\sqrt{x^2 + (f - z)^2}. \quad (31)$$

Az optikai tengelyen:

$$OPL(PQP') = nf. \quad (32)$$

A Fermat-elv alapján minden P' optikai úthossz egyenlő:

$$z + n\sqrt{x^2 + (f - z)^2} = nf. \quad (33)$$

$$n^2(x^2 + (f - z)^2) = (nf - z)^2. \quad (34)$$

$$n^2x^2 + n^2f^2 - n^22fz + n^2z^2 = n^2f^2 - 2nfnz + z^2. \quad (35)$$

$$n^2x^2 = (1 - n^2)z^2 + 2nfnz(n - 1). \quad (36)$$

$$n^2x^2 = (1 - n^2)z^2 - 2nfnz(1 - n). \quad (37)$$

A jobb oldalt teljes négyzetté alakítva:

$$n^2x^2 = (1 - n^2) \left(z - \frac{nf(1-n)}{1-n^2} \right)^2 - \frac{n^2f^2(1-n)^2}{1-n^2}. \quad (38)$$

$$n^2x^2 = (1 - n^2) \left(z - \frac{nf}{1+n} \right)^2 - \frac{n^2f^2(1-n)}{1+n}. \quad (39)$$

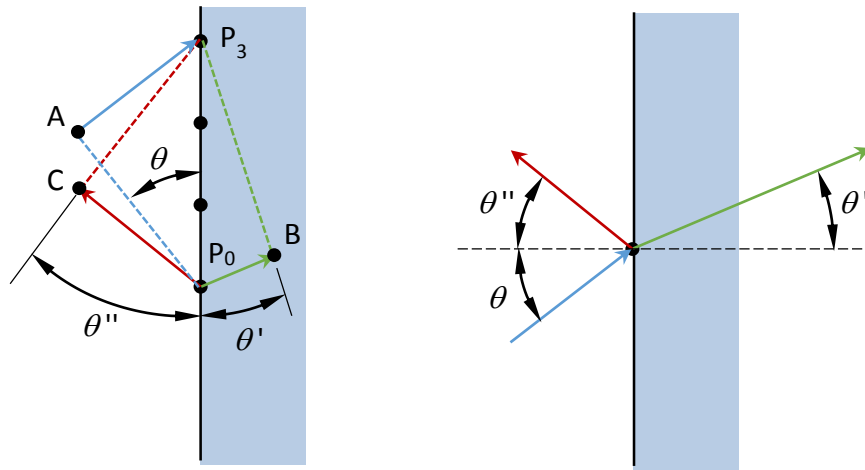
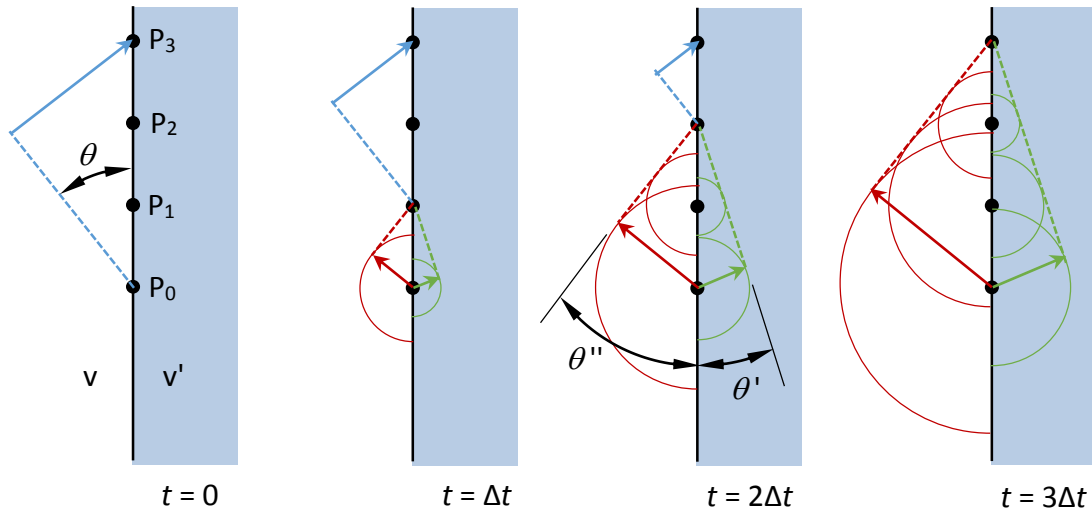
$$\frac{n^2x^2}{1-n^2} = \left(z - \frac{nf}{1+n} \right)^2 - \frac{n^2f^2}{(1+n)^2}. \quad (40)$$

$$\frac{n^2x^2}{n^2-1} + \left(z - \frac{nf}{1+n} \right)^2 = \frac{n^2f^2}{(1+n)^2}. \quad (41)$$

Mindkét oldalt elosztva a jobb oldallal egy ellipszis egyenletét kapjuk:

$$\frac{x^2}{\frac{n-1}{n+1}f^2} + \frac{\left(z - \frac{nf}{1+n} \right)^2}{\frac{n^2f^2}{(1+n)^2}} = 1. \quad (42)$$

Huygens-elv alkalmazása: fénytörés és tükrözés törvényei



$$v' < v \quad ; \quad \overline{AP_3} = v \cdot 3\Delta t \quad ; \quad \overline{P_0B} = v' \cdot 3\Delta t \quad ; \quad \overline{P_0C} = v \cdot 3\Delta t \quad (43)$$

$$\sin(\theta) = \frac{\overline{AP_3}}{\overline{P_0P_3}} \quad ; \quad \sin(\theta') = \frac{\overline{P_0B}}{\overline{P_0P_3}} \quad ; \quad \sin(\theta'') = \frac{\overline{P_0C}}{\overline{P_0P_3}} \quad (44)$$

$$\frac{\sin(\theta)}{v \cdot 3\Delta t} = \frac{1}{\overline{P_0P_3}} \quad ; \quad \frac{\sin(\theta')}{v' \cdot 3\Delta t} = \frac{1}{\overline{P_0P_3}} \quad ; \quad \frac{\sin(\theta'')}{v \cdot 3\Delta t} = \frac{1}{\overline{P_0P_3}} \quad (45)$$

$$\sin(\theta) = \sin(\theta'') \quad ; \quad \frac{\sin(\theta)}{v} = \frac{\sin(\theta')}{v'} \quad (46)$$

Ha bevezetjük az $n = c/v$ és $n' = c/v'$ törésmutatókat:

$$\theta = \theta'' \quad ; \quad n \cdot \sin(\theta) = n' \cdot \sin(\theta') \quad (47)$$