

# Fizika M1, BME, gépészmérnök mesterszak, 2018. őszi félév (v3)

Pályi András  
*Elméleti Fizika Tanszék, BME*  
(Dated: September 16, 2018)

Ebben a fájlban az előadás menetrendjét követve gyűjtöm össze az egyes témakörökhöz kapcsolódó gyakorló feladatokat. A fájl hétről-hétre frissülni fog az adott hét feladataival. A zárthelyiken ehhez hasonló feladatok várhatók, feleletválasztós változatban.

(F-0/1) Nagyon ritkán, de előfordul, hogy egy gépészhallgató készülés és tudás nélkül megy el a zárthelyire. A zárthelyin feleletválasztós tesztet kap, 20 kérdéssel, és minden kérdésre 4 lehetséges válaszlehetőség közül kell kiválasztania az egyetlen helyes választ. 7 helyes válasz még elégtelen, 8 helyes válasz már elégségest ér, azaz 40%-tól eredményes a zárthelyi. Csupán véletlenül tippelgetve mekkora a valószínűsége, hogy eredményes lesz a zárthelyije?

## TERV: TÉMÁK, MENETREND

- **Elektronok atomokban.** Klasszikus mechanika alapjai. Klasszikus atommodell. A kvantummechanika alapjai. Elektronállapotok a hidrogénatomban. A periódusos rendszer. (1.-3. előadás)
- **Elektronok kristályos szilárdtestekben.** A Sommerfeld-modell. A szoroskötésű modell. Elektronok sáv szerkezete. Szigetelők, félvezetők, fémek. Elektromos vezeték. (4.-6. előadás)
- 1. zárthelyi (7. előadás)
- **Elektromechanika.** Elektromechanikai kölcsönhatási mechanizmusok: kapacitív, piezorezisztív, piezoelektromos. Szenzorok és aktuátorok. (8.-10. előadás)
- **Lézerek.** Lézerek működési elve, típusai, alkalmazásai. (11.-12. előadás)
- 2. zárthelyi (13. előadás)

## I. ELEKTRONOK ATOMOKBAN

### A. Az atomok abszorpciós színe vonalas szerkezetet mutat

(F-I/1) Mik a jellemzői ( $k$  hullámszám,  $\omega$  körfrekvencia,  $f$  frekvencia,  $T$  periódusidő) a  $\lambda = 540$  nm hullámhosszú zöld fénynek?

(F-I/2) A két elektronvoltos energiakvantummal rendelkező elektromágneses sugárzásnak mennyi a hullámhossza és a frekvenciája?

### B. Klasszikus mechanika: állapotjelzők, fizikai mennyiségek, mozgásegyenlet

(F-I/3) Egy méter magasból elengedünk egy egykilós testet. Mennyi idő múlva ér földet? Mekkora sebességgel csapódik be?

(F-I/4) Az előző feladatban leírt jelenség esetén melyek a rendszer állapotjelzői? Ezek milyen függvények, azaz honnan hova képeznek? Melyek a rendszer paraméterei?

(F-I/5) Írd fel a fenti rendszer mozgásegyenleteit  $\dot{x}(t) = \dots$ ,  $\dot{v}(t) = \dots$  alakban. Add meg a kezdeti feltételeket is. Legyen a koordináta-rendszer origója a földfelszínen, és az  $x$  tengely legyen felfelé irányítva. Add meg a test teljes energiáját (mozgási energia és helyzeti energia) leíró formulát (a) a hely  $x(t)$  és a sebesség  $v(t)$  függvényeként, (b) a hely  $x(t)$  és az impulzus  $p(t) = mv(t)$  függvényeként. Itt  $m$  a test tömegét jelöli.

(F-I/6) Tekintsünk egy adott  $m$  tömegű, egydimenziós mozgást végző tömegpontot. A  $t$  időpontban  $x(t)$  a helykoordinátája,  $v(t)$  a sebessége, és  $F(t)$  erő hat rá. Add meg a tömegpont helykoordinátáját és sebességét infinitezimálisan rövid  $\Delta t$  idő múlva:  $x(t + \Delta t) = ?$ ,  $v(t + \Delta t) = ?$

(F-I/7) Egy  $k$  rugóállandójú rugóra rögzített  $m$  tömegű testet  $F(t) = F_0 \sin(2\pi ft)$  erővel gerjesztünk. Írd fel a mozgásegyenleteket,  $\dot{x}(t) = \dots$ ,  $\dot{v}(t) = \dots$  alakban.

- Példák: szabadesés (egydimenziós), harmonikus oszcillátor (egydimenziós), hidrogénatom (háromdimenziós).

### C. Kvantummechanika: állapotjelzők, fizikai mennyiségek, mozgásegyenlet

(F-I/8) Egy dimenzióban mozgó elektron dinamikáját szeretnénk leírni a kvantummechanika eszközeivel. Az elektron pillanatnyi hullámfüggvénye honnan hova képez? Mi a dimenziója (mértékegysége) az argumentumainak és az értékének? Az elektron állapotának időfüggését leíró hullámfüggvény honnan hova képez?

(F-I/9) Egy elektron egy proton közelében tartózkodik a háromdimenziós térben. Az elektron dinamikáját szeretnénk kvantummechanikailag leírni. Mi az állapotjelző a kvantummechanikai leírásban? Milyen függvény, azaz honnan hova képez? Mik a fizikai mennyiségek? Milyen függvények, honnan hova képeznek?

(F-I/10) Milyen operátorok ábrázolják a három helykoordinátát és a három impulzuskoordinátát a kvantummechanikai leírásban?

(F-I/11) Egy egy dimenzióban mozgó elektront írunk le kvantummechanikailag. Egy adott pillanatban ismerjük az elektront leíró  $\psi(x)$  hullámfüggvényt. Hogyan fejezhető ki a hely (azaz az  $x$  koordináta) várhatóértéke a hullámfüggvény segítségével?

(F-I/12) Legyen  $\chi_{[a,b]}(x)$  az  $[a, b]$  intervallum karakterisztikus függvénye, azaz az a függvény aminek értéke 1 ha  $x \in [a, b]$ , és 0 egyébként. Legyen  $\psi_1(x) = N_1 \chi_{[0,a]}(x)$ . Mekkora kell választani  $N_1$ -et, hogy  $\psi_1$  normált legyen? Rajzold fel a normált hullámfüggvényt a hely függvényeként, jelölve a nevezetes tengelymetszeteket is. Rajzold fel az elektron  $|\psi(x)|^2$  megtalálási valószínűségét a hely függvényeként, jelölve a nevezetes tengelymetszeteket is.

(F-I/13) Legyen  $\psi_2(x) = \frac{i}{\sqrt{2a}} \chi_{[0,2a]}$ . Számold ki  $\psi_1$  és  $\psi_2$  skalárszorzatát:  $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = ?$

(F-I/14) Egy dimenzióban mozgó elektron hullámfüggvénye egy adott pillanatban

$$\psi(x) = \begin{cases} N \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), & \text{ha } 0 < x < L, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (1)$$

Normált-e a  $\psi$  hullámfüggvény, ha  $N = 1$ ? Hogyan válasszuk  $N$ -t, hogy  $\psi$  normált legyen? Rajzold fel a normált hullámfüggvényt. Rajzold fel az elektron  $|\psi(x)|^2$  megtalálási valószínűségét a pozíció függvényeként.

(F-I/15) Egy dimenzióban mozgó elektron hullámfüggvénye egy adott pillanatban

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), & \text{ha } 0 < x < L, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (2)$$

Ebben az állapotban mekkora a valószínűsége annak, hogy az elektront a  $[0, L/4]$  szakaszon találjuk?

(F-I/16) Az előző  $\psi$  hullámfüggvénnyel jellemzett állapotban mennyi a pozíció várhatóértéke? Mennyi az impulzus várhatóértéke?

(F-I/17) Egy dimenzióban mozgó elektron dinamikáját szeretnénk leírni a klasszikus mechanika eszközeivel. Az elektron helyzeti energiájának helyfüggése  $V(x) = -V_0 e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$  alakú. Add meg az elektron teljes energiáját a sebessége ( $v$ ) és a pozíciója ( $x$ ) függvényeként. Fejezd ki ezt a teljes energiát az impulzusa ( $p$ ) és a pozíciója függvényeként.

(F-I/18) Írd fel az előző példában szereplő elektron időfüggő Schrödinger-egyenletét. Milyen differenciálegyenlet ez? Közönséges vagy parciális? Melyik változóban hányadrendű? Lineáris vagy nemlineáris?

(F-I/19) Három dimenzióban mozgó elektron dinamikáját szeretnénk leírni a kvantummechanika eszköztárával. Az elektron hullámfüggvénye honnan hova képez? Mi a dimenziója (mértékegysége) az argumentumainak és az értékének?

### D. Stacionárius állapotok a kvantummechanikában

(F-I/20) A három Pauli-mátrix:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Határozd meg mindhárom Pauli-mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

(F-I/21) Vizsgáljunk egy egydimenzióban mozgó elektront. Legyen a pillanatnyi hullámfüggvénye egy Gauss-hullámcsomag, azaz  $\psi(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{a}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ . Sajátfüggvénye ez a hullámfüggvény az  $\hat{x}$  helyoperátornak? Sajátfüggvénye ez a hullámfüggvény a  $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \partial_x$  impulzusoperátornak?

### E. A klasszikus Rutherford-modell nem magyarázza az atomok vonalas színeképét

(F-I/22) Egy elektron a hidrogénatom klasszikus Rutherford-modelljének megfelelően körpályán mozog egy rögzítettnek tekintett proton körül. Tegyük fel, hogy a mozgás az  $xy$  síkban történik, és a pálya sugara  $R = 0.2 \text{ \AA}$ . Mekkora az elektron sebessége  $m/s$  egységekben? Hányadrésze ez a fénysebességnek? Mekkora és milyen irányú az elektron  $\mathbf{L}$  perdülete (pontosabban perdület-vektora) SI egységekben, illetve  $\hbar$  egységekben? Mekkora az elektron mozgási energiája elektronvoltban kifejezve? Mekkora az elektron helyzeti energiája elektronvoltban kifejezve?

(F-I/23) Tekintsük az előző feladatban vizsgált egyenletes körmozgást. Hogyan függ az elektron teljes energiája az  $L = |\mathbf{L}|$  perdületétől?

### F. A félklasszikus Bohr-modell megmagyarázza a vonalas színeképet

(F-I/24) A félklasszikus Bohr-modell szerint milyen frekvenciájú és hullámhosszú elektromágneses sugárzást bocsát ki a hidrogénatom elektronja, amikor az első gerjesztett állapotból az alapállapotba relaxál?

### G. A hidrogénatom kvantummechanikai modellje

(F-I/25) Egy dimenzióban mozgó elektron dinamikáját szeretnénk leírni a klasszikus mechanika eszközeivel. Az elektron helyzeti energiájának helyfüggése  $V(x) = -V_0 e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$  alakú, ahol  $V_0 > 0$ . Add meg az elektron teljes energiáját a sebessége ( $v$ ) és a pozíciója ( $x$ ) függvényeként. Fejezd ki ezt a teljes energiát az impulzusa ( $p$ ) és a pozíciója függvényeként.

(F-I/26) Ha az előző példában az elektronnal tudjuk, hogy kötött állapotban van, akkor mit tudunk a teljes energiájáról? Ha tudjuk, hogy szórás állapotban van, akkor mit tudunk a teljes energiájáról?

(F-I/27) Írd fel a rögzített proton Coulomb-erőterében mozgó elektron időfüggetlen Schrödinger-egyenletét. Mik az ismeretlenek?

### H. Elektronállapotok a hidrogénatomban

(F-I/28) A hidrogénatomban levő egyetlen elektron kötési energiája az alapállapotban 1 Rydberg. Hány Rydberg a kötési energiája az elektronnak az első gerjesztett állapotban?

(F-I/29) Hányszorosan degenerált a hidrogénatom  $n = 2$  főkvantumszámú nívója, a spin szabadsági fokot is figyelembe véve? Hányszorosan degenerált az  $n = 3$  főkvantumszámú nívó?

(F-I/30) Legyen egy egydimenzióban mozgó elektron pillanatnyi hullámfüggvénye egy Gauss-hullámcsomag és egy síkhullám szorzata:  $\psi(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{a}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} e^{ikx}$ . Számold ki és ábrázold a  $\rho(x) = |\psi(x)|^2$  részecskesűrűséget az  $x$  helykoordináta függvényeként. Számold ki és ábrázold a  $j(x) = \text{Re} \left( \psi^*(x) \frac{\hat{p}}{m} \psi(x) \right)$  részecskeáram-sűrűséget az  $x$  helykoordináta függvényeként.

## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönet Mihály Györgynek és Orosz Lászlónak a tananyag összeállításában nyújtott segítségért.