Fizika 1i, 2020 őszi félév, 6. gyakorlat - MEGOLDÁS

Órai munkára javasolt feladatok

F1. *a*) A rezgés körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 6\ \frac{1}{\mathrm{s}}.$$

A test kitérés-idő és sebesség-idő függvénye:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0),$$
$$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Ezeket $t = 0$ időpillanatra felírva:

$$x_0 = A\sin\varphi_0,$$
$$v_0 = A\omega\cos\varphi_0.$$

A két egyenlet hányadosából:

$$\tan\varphi_0 = \frac{\omega x_0}{v_0}\ \rightarrow\ \varphi_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}\ \mathrm{rad}.$$

Az amplitúdó pedig

$$A = \frac{x_0}{\sin\varphi_0} = \sqrt{2}\cdot 13\ \mathrm{cm} \approx 18{,}4\ \mathrm{cm},$$

ezzel már felírhatjuk a kitérés-idő függvényt:

$$x(t) = 18{,}4\ \mathrm{cm}\cdot\sin\left(6\ \frac{1}{\mathrm{s}}\cdot t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Egyensúlyi állapotban $x(t) = 0$, azaz a legkisebb pozitív t:

$$t = \frac{\pi - \varphi_0}{\omega} = \frac{3\pi}{4\omega} = \frac{3T}{8} = \frac{\pi}{8}\ \mathrm{s} \approx 0{,}40\ \mathrm{s},$$

ahol felhasználtuk, hogy $T = 2\pi/\omega$.

b) A test legnagyobb kitérése a rezgés amplitúdója, azaz $A = \sqrt{2}\cdot 13\ \mathrm{cm} \approx 18{,}4\ \mathrm{cm}$. A legnagyobb sebsség $v_{\max} = A\omega \approx 110\ \mathrm{cm/s}$, és a legnagyobb gyorsulás $a_{\max} = A\omega^2 \approx 6{,}6\ \mathrm{m/s^2}$.

c) A rezgésben tárolt energia

$$E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \approx 1{,}5\ \mathrm{J}.$$

F2. A rugalmas fallal való ütközés során a test sebességvektora ellentétes irányúvá válik, nagysága nem változik. Meg kell határozni azt az időt, amíg az inga az egyensúlyi helyzettől mérve az $\alpha/2$ szöghelyzetbe jut. Ennek négyszerese az új periódusidő.

Az inga szögkitérése az idő függvényében (egyensúlyi helyzettől mérve):

$$\varphi = \alpha\sin(\omega t),$$

azaz $\varphi = \alpha/2$ esetén

$$\frac{1}{2} = \sin(\omega t)\ \rightarrow\ t = \frac{\pi}{6\omega} = \frac{T}{12}.$$

Az új lengésidő $T' = 4t = T/3$.

F3. Abban az esetben, amikor a test két oldalról van a rugókhoz csatlakoztatva, a rugó rendszere helyettesíthető egyetlen $D = D_1 + D_2$ rugóállandójú rugóval (párhuzamos kapcsolás). Hiszen, ha kitérítjük a testet az egyensúlyi helyzetéből, akkor mindkét rugó megnyúlásának nagysága azonos (x), így az eredő visszatérítő erő $(D_1 + D_2)x$. Tehát a rezgés periódusideje:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D_1 + D_2}}.$$

A másik esetben a két rugóban azonos erő ébred, de a megnyúlásuk különböző, x_1 és x_2, a test elmozdulása pedig $x_1 + x_2$. Tehát a rugórendszer helyettesíthető egy $D = D_1D_2/(D_1 + D_2)$ rugóállandójú rugóval (soros kapcsolás). Ezzel a rezgés periódusideje:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m(D_1 + D_2)}{D_1D_2}}.$$

F4. Legyen a rúd kicsiny szögkitérése φ. Ekkor a rugók jó közelítéssel vízszintesek maradnak, az egyik összenyomódik, a másik megnyúlik $L\varphi$ távolsággal, azaz a rugók összességében $2DL\varphi$ erőt fejtenek ki a rúd végére vízszintes irányban. Mivel a felfüggesztési pontban ható erő nem ismert, erre a pontra érdemes felírni a rúd forgására vonatkozó egyenletet. A felfüggesztési pontra ható forgatónyomatékok:

$$\sum M = mg\cdot\frac{L\varphi}{2} + 2DL\varphi\cdot L.$$

Mivel ez az eredő forgatónyomaték az egyensúlyi helyzetbe téríti vissza a rudat, vagyis a kitéréssel ellentétes irányban, azaz rezgés alakul ki, valamint a szögkitérés arányos a szögygorsulással, hiszen a $\sum M = \Theta\beta$ forgásegyenlet

$$\left(\frac{mgL}{2} + 2DL^2\right)\varphi = \frac{1}{3}mL^2\beta,$$

azaz

$$\underbrace{\left(\frac{3g}{2L} + \frac{6D}{m}\right)}_{\omega^2}\varphi = \beta.$$

A rezgés frekvenciája innen leolvasható:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2L} + \frac{6D}{m}}.$$

F5. *a*) A fallal történő rugalmas ütközés során ΔN számú molekula falra merőleges sebességvektorkomponense ellentétes irányú lesz $\Delta t = 1$ s idő alatt, azaz a falra kifejtett átlagos nyomóerő:

$$F = \frac{2\Delta N m\left\langle |v_x|\right\rangle}{\Delta t},$$

ahol $m=\frac{28\ \mathrm{g/mol}}{6\cdot 10^{23}\ 1/\mathrm{mol}}$ egy nitrogénmolekula tömege. Az A felületű falra ható nyomás

$$p=\frac{F}{A}=\frac{2\Delta N m\left\langle |v_x|\right\rangle}{A\Delta t}=17500\ \mathrm{Pa}.$$

b) Az ekvipartíció-tétel szerint egy szabadsági fokra $\frac{1}{2}kT$ energia jut, azaz

$$\frac{1}{2}m\left\langle v_x^2\right\rangle=\frac{1}{2}kT\ \rightarrow\ T=\frac{m\left\langle v_x^2\right\rangle}{k}\approx 304\ \mathrm{K}.$$

Felhasználtuk, hogy a megadott átlagos sebességkomponens jó közelítéssel az x irányú sebességkomponens négyzetátlagának gyöke.

A gáz belső energiája (a szabadági fokok száma $f=5$)

$$E_\mathrm{b}=\frac{5}{2}NkT,$$

azaz egy molekulára átlagosan

$$\varepsilon=\frac{5}{2}kT\approx 1{,}0\cdot 10^{-20}\ \mathrm{J}\approx 66\ \mathrm{meV}.$$

energia jut.

c) Ha a gázt egy L oldalhosszúságú dobozban képzeljük el, akkor a $V=L^3$ térfogatú dobozban N molekula van, azaz egy élhossz mentén $\sqrt[3]{N}$ darab molekula van, azaz a molekulák közötti átlagos távolság

$$\lambda=\frac{L}{\sqrt[3]{N}}.$$

Az ideális gáz állapotegyenletéből

$$V=L^3=\frac{NkT}{p}\ \rightarrow\ L=\sqrt[3]{\frac{NkT}{p}}.$$

Tehát az átlagos távolság:

$$\lambda=\sqrt[3]{\frac{kT}{p}}\approx 6{,}2\cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}=6{,}2\ \mathrm{nm}.$$

F6. Stacionárius esetben a rúd mentén, a T_1 hőmérsékletű végponttól mérve x távolságban a hőmérsékletet a

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\kappa_1 A\frac{T_1-T(x)}{x},\ \text{ha } x\le L,$$

illetve a

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\kappa_2 A\frac{T(x)-T_2}{2L-x},\ \text{ha } x\ge L$$

egyenletekből kaphatjuk meg. A rúd bármelyik pontján a $P=\Delta Q/\Delta t$ hőáram ugyanakkora. Ha $x=L$, akkor a fenti két egyenletből a T hőmérséklet:

$$T=\frac{\kappa_1 T_1+\kappa_2 T_2}{\kappa_1+\kappa_2}=37{,}5\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Ezzel a rendszeren átmenő hőáram:

$$P=\kappa_1 A\frac{T_1-T}{L}=\frac{\kappa_1\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}A\frac{T_1-T_2}{L}=30\ \mathrm{W}.$$

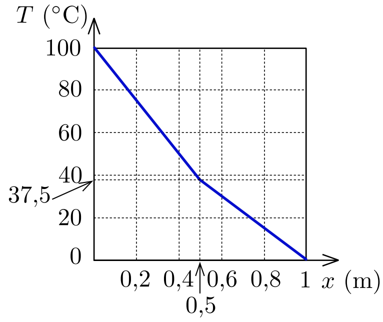
Tehát a rúd hőmérséklete:

$$T(x)=\begin{cases} T_1-\frac{P}{\kappa_1 A}x, & \text{ha } 0\le x\le L,\\ T_2+\frac{P}{\kappa_2 A}(2L-x), & \text{ha } L\le x\le 2L.\end{cases}$$

Behelyettesítve a számadatokat:

$$T(x)=\begin{cases} 100\ ^\circ\mathrm{C}-125\ \frac{^\circ\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\cdot x, & \text{ha } 0\le x\le L,\\ 75\ ^\circ\mathrm{C}-75\ \frac{^\circ\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\cdot x, & \text{ha } L\le x\le 2L.\end{cases}$$

Ábrázolva:



F7. A falakon keresztül egységnyi idő alatt távozó hőmennyiség megegyezik a kályha P teljesítményével, hiszen a belső hőmérséklet állandó:

$$P=\kappa A\frac{T_\mathrm{bent}-T_\mathrm{kint}}{d}.$$

Tehát porotherm tégla esetén szükséges teljesítmény:

$$P_2=P_1\cdot\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\frac{d_1}{d_2}\approx 0{,}44P_1,$$

azaz kb. 56%-kal kisebb teljesítményű kályhára lenne szükség.

F8. *a*) A Nap által másodpercenként kisugárzott energia

$$P_\mathrm{Nap}=\sigma\cdot 4R_\mathrm{N}^2\pi T_\mathrm{N}^4.$$

Ugyanekkora hőenergia érkezik a Nap köré képzelt, r sugarú gömbfelületre egyenletesen. A Hold $1\ \mathrm{m}^2$ nagyságú, sugárzásra merőleges felületére eső energia másodpercenként (intenzitás):

$$I_\mathrm{Hold}=\frac{P_\mathrm{Nap}}{4r^2\pi}=\frac{\sigma R_\mathrm{N}^2 T_\mathrm{N}^4}{r^2}\approx 1600\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}.$$

b) Ha a Hold felszínének hőmérséklete állandó, akkor az egységnyi felületre, egységnyi idő alatt beérkező és az egységnyi felület által, egységnyi idő alatt kisugárzott energia megegyezik. A kisugárzott energia teljesítménye $1\ \mathrm{m}^2$ felületen

$$I_\mathrm{ki}=\sigma T_\mathrm{H}^4.$$

Az elnyelt intenzitás az előző rész eredménye szerint $I_\mathrm{be}=I_\mathrm{Hold}$, tehát az $I_\mathrm{be}=I_\mathrm{ki}$ egyenlőségből megkapjuk a Hold felszínének hőmérsékletét ott, ahol merőleges a beeső napfény:

$$T_\mathrm{H}=T_\mathrm{N}\sqrt{\frac{R_\mathrm{N}}{r}}\approx 410\ \mathrm{K}.$$

F9. Legyen $T_0 = 6000$ K, $T_1 = 1000$ K, $I = 1400$ W/m^2. Az előző feladat a) eredményével:

$$I = \frac{\sigma R_\mathrm{N}^2 T_0^4}{r^2},$$

ahol $r = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m a Nap-Föld átlagos távolság.

A Nap sugárzása során energiát veszít. Ennek hatására kicsiny $\mathrm{d}t$ idő alatt a Napban lévő $M_\mathrm{N} = 2 \cdot 10^{30}$ kg tömegű hidrogén hőmérséklete $\mathrm{d}T$-vel csökken, azaz T hőmérsékleten

$$\sigma \cdot 4R_\mathrm{N}^2 \pi T^4 \mathrm{d}t = -cM_\mathrm{N}\mathrm{d}T,$$

ahol $c = 10$ kJ/(kg °C) a hidrogén (állandó nyomáson vett) fajhője. Felhasználva az I-re vonatkozó egyenletet:

$$\frac{\mathrm{d}T}{T^4} = -\frac{4r^2\pi I}{cM_\mathrm{N}T_0^4}\mathrm{d}t.$$

Integrálva az egyenletet:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{T_1^3} - \frac{1}{T_0^3}\right) = \frac{4r^2\pi I}{cM_\mathrm{N}T_0^4} \cdot t,$$

ahonnan

$$t = \frac{cM_\mathrm{N}T_0^4}{12r^2\pi I}\left(\frac{1}{T_1^3} - \frac{1}{T_0^3}\right) \approx 700000 \text{ év}.$$

A becslés során kapott ereményt összevetve a feladat szövegében jelzett időtartammal, azt mondhatjuk, hogy az alkalmazott modell túlságosan leegyszerűsíti a helyzetet, a valóságot nem írja le megfelelően.